普通高等院校规划教材

大学文科数学

DA XUE WEN KE SHU XUE

罗新兵　刘新平　刘　妮　主编

陕西师范大学出版社

DJ 普通高等院校规划教材

大学文科数学

主编 罗新兵 刘新平 刘 妮

编者 （以姓氏笔画为序）

于建伟 刘 妮 刘新平

孙广才 罗新兵 杨明顺

唐 泉

陕西师范大学出版社

图书代号:JC8N0331

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/罗新兵,刘新平,刘妮主编.—西安:陕西师范大学出版社,2008.7
ISBN 978-7-5613-4364-7

Ⅰ.大…　Ⅱ.①罗…②刘…③刘…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第096278号

大学文科数学

罗新兵　刘新平　刘　妮　主编

责 任 人　陈焕斌
视觉设计　吉人设计
出版发行　陕西师范大学出版社
社　　址　西安市陕西师大120信箱(邮政编码:710062)
网　　址　http://www.snupg.com
经　　销　新华书店
印　　刷　西安建筑科技大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　15.5
字　　数　250千
版　　次　2008年7月第1版
印　　次　2008年7月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5613-4364-7
定　　价　25.00元

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社教材中心联系、调换。
电　话:(029)85307826　85303622(传真)
E-mail:jcc@snnup.net

编写说明

目前，我国大多数高校的文科专业已开设了“大学文科数学”或者“文科高等数学”课程，人们对在高校文科专业开设数学课程的必要性已经达成了共识。但是由于文科专业开设数学课程时间不长，还有很多问题需要深入探讨，如文科数学的课程定位、教学目的、教学要求、教学内容等。在编写本书时，对上述问题作了一些思考，并形成了以下编写思路：

1. 精心选择内容

众所周知，体现现代数学的连续性、离散性、随机性三种思维方法和内容的是微积分、线性代数和概率统计，这三部分内容应是文科数学的核心知识。本书在兼顾知识的逻辑性和学生的可接受性的基础上，从微积分、线性代数和概率统计中选择了基本的、有用的知识作为主体教学内容。

2. 适当降低要求

与理工科相比，文科专业对数学的要求相对要低很多；另外，文科学生在数学思维上也与理工科的学生有很大的区别，因此文科数学在难度和深度上必须有所降低。本书在保证知识严谨性的前提下，适度弱化了较强的概念，适当淡化了较难的定理。另外，习题在数量和难度上的要求也有所降低。

3. 注重培养能力

对文科学生来说，除了强调传授数学知识，更要注重培养学生的数学思维能力，因为当学生走上工作岗位后，实际起作用的往往不是具体的数学知识，而是在学习知识的过程中形成的思维能力。所以，本书在编写时尤其注重培养学生的数学思维能力，如直觉感知能力、观察发现能力、归纳类比能力、抽象概括能力、数学猜想能力等。

4. 渗透数学应用

数学不仅广泛应用于自然科学，而且渗透进了很多社会科学。为了反映这一深刻变化，教材既注重从生活实例中引进知识，又适当介绍了数学建模知识，让学生从中体会数学的应用方法，感受数学的工具作用，进而提高学生对数学的兴趣，并在此基础上形成正确的数学观。

编写一本好的《大学文科数学》教材难度确实很大，我们虽然作了一些思考和尝试，也进行了多次磋商和修改，不妥乃至错误之处必定难免，希望各位读者多提宝贵意见。本书在编写过程中参阅了多种同类教材，在参考文献中已经列出，在此谨向这些作者一并表示诚挚谢意！

编 者

2008 年 6 月

内容简介

本书是教育部高等学校特色专业建设点项目和陕西师范大学本科教学质量与教学改革工程项目的研究成果。

全书内容分为三大部分，第一部分为微积分，具体内容包括函数、极限、导数与微分、不定积分、定积分；第二部分为线性代数，具体内容包括矩阵、行列式、线性方程组；第三部分为概率统计，具体内容包括概率初步与统计初步。

本书是在充分考虑文科学生数学学习基本特点的基础上编写而成的，既吸收了同类教材的好的做法，又保持了自己独有的基本特色；既注重基础知识的教授与传承，更强调思维能力的训练和发展；既适当淡化了推理的缜密性，又合理保持了数学的严谨性。

本书可作为高等院校各个文科专业教材。

目录

CONTENTS

第一部分　微积分

第二部分　线性代数

第三部分　概率统计

第 1 章　微积分的主要研究对象——函数

微积分以函数的微分与积分为主要内容，函数则是微积分的主要研究对象，它是从量的角度对自然现象或社会现象中的运动变化的抽象描述，是一种刻画某一运动变化过程中量的依存关系的数学模型.

§1.1　函数概念

在某个特定的自然现象或社会现象中，往往同时有几个变量不断发生变化，这些变量并不是孤立地变化，而是相互关联，并且遵循某个特定规律，函数就是描述变量之间依存关系的一个法则. 我们来看下述三个具体的例子.

例 1　根据某所中学统计资料，近几年来这所中学考取重点大学的人数情况如下表所示.

年份 x(单位:年)	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
人数(单位:个)	172	181	224	256	258	313	321

在上表中，对于任何 $x \in \{2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007\}$，都能唯一确定这所中学考取重点大学人数 y 的一个值.

例 2　温度自动仪所记录的某地某天 24 小时气温变化曲线描述了这天气温 T 随时间 t 的变化.

在图 1－1 中，对于任何时刻 $t_0 \in [0, 24)$，可以按照图上曲线确定出一个对应的气温 T_0 的值.

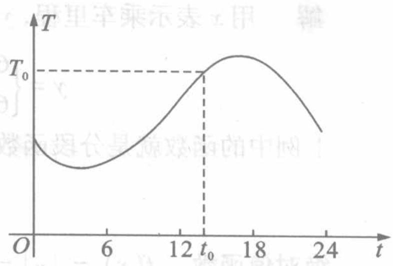

图 1－1

例 3 某工厂每天最多能生产 1 000 件产品，固定成本为 1 000 元，每生产一件产品，成本增加 50 元，则该工厂每天的总成本 C 与总产量 q 有如下关系
$C = 1\ 000 + 50q$.

当 q 在生产能力容许的范围 $\{0,1,2,3,\cdots,99,100\}$ 内取定某一数值时，总成本也随之有一个确定的数值与之对应，例如 $q = 30$ 时，$C = 1\ 000 + 50 \times 30 = 2\ 500$ 元.

如果我们将上述这些变量之间的关系进行数学抽象，就可以得到函数的概念.

定义 1 设 x,y 是两个变量，X 是一个给定的数集，如果对于 X 中的每一个 x 值，根据某一法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，那么我们就说变量 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x),x \in X.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量. 自变量 x 的变化范围 X 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域，因变量 y 的变化范围称为函数 $y = f(x)$ 的值域，有时也记作 $f(X) = \{y \mid y = f(x),x \in X\}$.

例如，函数 $y = \sin x + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[0,2]$；又如函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,1]$；再如函数 $y = \arcsin(x - 3)$ 的定义域为 $[2,4]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

有些函数对于其定义域内自变量不同的取值，不能用一个统一的数学表达式来表示，而需要用两个或者两个以上的表达式来表示，这类函数我们将其称为分段函数.

例 4 某座城市出租车的起步价为 6 元，起步里程为 3 km，超过 3 km 后每千米价格为 1.5 元，请你给出乘车里程与乘车费用的函数关系式.

解 用 x 表示乘车里程，y 表示乘车费用，则有

$$y = \begin{cases} 6, & 0 < x \leqslant 3, \\ 6 + 1.5x, & x > 3, \end{cases}$$

上例中的函数就是分段函数. 下面介绍几个重要的函数.

绝对值函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域

为$[0,+\infty)$,图象如图1-2所示.

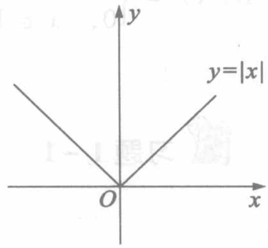

图1-2

符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{-1,0,1\}$,图象如图1-3所示.

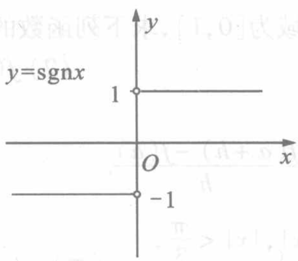

图1-3

取整函数 $f(x)=[x]$ 表示不超过x的最大整数.如$[3.2]=3$,$[5]=5$,$[\pi]=3$,$[-5.5]=-6$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为整数集$\mathbf{Z}$,图象如图1-4所示.

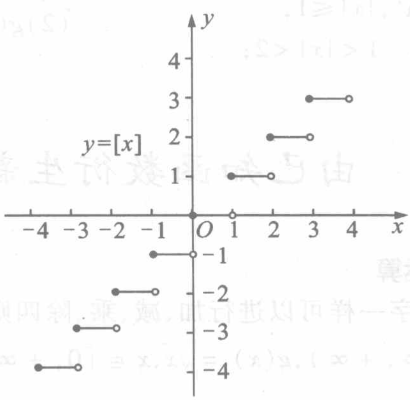

图1-4

狄利克雷函数 $f(x)=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{0,1\}$.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; (2) $y=\tan(x-1)$;

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\lg(x+2)$; (4) $y=x\sqrt{\cos x}$;

(5) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$; (6) $y=\sqrt{\lg(x+1)}+\dfrac{1}{|x|+x}$.

2. 设函数$f(x)$的定义域为$[0,1]$,求下列函数的定义域.

(1) $f(4x^2)$; (2) $f(\tan x)$;

(3) $f(\sin x+\cos x)$.

3. 设函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$,求$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$求$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,$f\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

5. 画出下列分段函数的图象.

(1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<|x|<2;\end{cases}$ (2) $g(x)=\begin{cases}x, & x<-1,\\ |x|, & |x|\leqslant 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$

§1.2 由已知函数衍生新函数

一、函数的四则运算

函数也与具体数字一样可以进行加、减、乘、除四则运算,例如给定函数$f(x)=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$,$g(x)=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$,经过四则运算可以形成一些新的函数.

$$f(x)+g(x)=\sin x+\sqrt{x},x\in[0,+\infty),$$
$$f(x)-g(x)=\sin x-\sqrt{x},x\in[0,+\infty),$$
$$f(x)\cdot g(x)=\sin x\cdot\sqrt{x},x\in[0,+\infty),$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}},x\in(0,+\infty).$$

这里需要注意两点：一是经过四则运算形成的新函数的定义域要随之发生相应的变化；二是形成的新函数形式并非仅仅局限于上述几种，例如还有 $g(x)-f(x)=\sqrt{x}-\sin x,x\in[0,+\infty)$；$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{x}}{\sin x},x\in\mathbf{R}\backslash\{x\mid x=k\pi\}$.

二、复合函数

我们先来看下面的实际事件：一个中国人准备从中国去美国旅游，将50 000元人民币以1:0.12 的比率兑换成美元，但因发生了 9 · 11 恐怖袭击事件，美国暂停办理入境签证，这名中国人只好放弃去美国旅游的计划，改去日本观光游览，于是，他又将兑换的美元以1:836.4 的比率兑换成日元. 若先用人民币数 x 作自变量，美元数 z 作因变量，则人民币换成美元的公式是 $z=f(x)=0.12x$，接着又以美元数 z 作自变量，换成的日元数 y 为因变量，则美元换成日元的公式是 $y=g(z)=836.4z$，从拿出人民币到换成日元的过程是：人民币 $\xrightarrow{f}$ 美元 $\xrightarrow{g}$ 日元.

其实，在数学中存在大量类似的运算过程. 例如，从自变量 x 到函数 $\sin^2x$ 的计算过程是：先对 x 取正弦得到 $\sin x$，再对 $\sin x$ 进行平方运算得到 $\sin^2x$，运用数学符号表示就是

$$x\xrightarrow{\text{正弦}}\sin x\xrightarrow{\text{平方}}\sin^2x.$$

若令 $z=\sin x,y=\sin^2x$，则上式可变为

$$x\xrightarrow{\text{正弦}}z\xrightarrow{\text{平方}}y.$$

z 起到了自变量 x 到因变量 y 的过渡作用，我们将其称为中间变量，并称 y 是函数 $z=\sin x$ 与 $y=z^2$ 的复合函数.

我们把上述过程一般化就可以得到复合函数的概念.

定义 1　设函数 $y=f(u)$，定义域为 D_f，值域为 R_f；函数 $u=g(x)$，定义域为 D_g，值域为 R_g，现在将 $u=g(x)$ 代入函数 $y=f(u)$ 中，即可得到 $y=f[g(x)]$，将其称为函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 之间的复合运算. 为了保证函数的复合运算有意义，前提条件就是 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$.

这个复合过程可用图 1－5 直观表示：

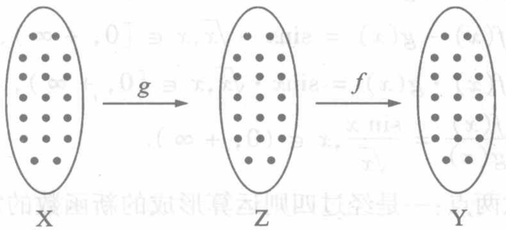

图 1－5

另外，复合函数 $y=f[g(x)]$ 的条件是：函数 g 在其定义域上的值域 R_g 必须含在 f 的定义域 D_f 内，即 $R_g \subset D_f$，否则，不能构成复合函数. 例如，$y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在 $\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ 上有定义，并且 $R_g \subset [-1,1]$，则 g 与 f 可以构成复合函数 $y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2}$，$x\in\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，但是函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数，这是因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$u=2+x^2$ 都不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内.

当然，有时我们也会经常碰到由两个以上的函数所构成的复合函数，例如函数 $y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$ 就是由函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\cos v$，$v=\frac{x}{2}$ 复合形成的，这里的 u 与 v 都是中间变量.

例 1　试分析函数 $y=\frac{1}{\lg(3-x)}$ 是由哪几个函数复合形成的.

解　函数 $y=\frac{1}{\lg(3-x)}$ 是由函数 $y=\frac{1}{u}$，$u=\lg v$，$v=3-x$ 复合形成的.

三、反函数

我们现在研究指数函数 $y=2^x$，在函数表达式中，x 为自变量，y 为因变量，它是用 x 来表示 y 的. 现在反过来，用 y 来表示 x，即可得到 $x=\log_2 y$，在这个表达式中，y 就成了自变量，x 则成了因变量，它也是一个函数，我们就把这样变形得到的函数 $x=\log_2 y$ 称为函数 $y=2^x$ 的反函数. 按照传统习惯，用 x 表示自变量，y 表示因变量，函数 $y=2^x$ 的反函数就是 $y=\log_2 x$，更一般地，$y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R_f$.

将上述过程一般化就得到了反函数的概念.

定义 2　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，如果对任意 $y \in R_f$，总有唯一的 $x \in D_f$ 与之对应，并且满足等式 $y = f(x)$，则称 x 是定义在 R_f 上的以 y 为自变量的函数，记作

$$x = f^{-1}(y), y \in R_f,$$

并称其为 $y = f(x)$ 的反函数. 鉴于函数符号的一般用法，通常按照习惯把 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$.

是不是每一个函数都有反函数呢？答案当然是否定的. 一般情况下，函数 $y = f(x)$ 不一定存在反函数，这是因为对于每一个自变量 $x \in D_f$ 可以保证有唯一的 y 与之对应，但对于每一个 $y \in R_f$ 并不能保证有唯一的 x 与之对应. 一个函数 f 只有当其定义域到值域是一一对应时，即对每个 $x_0 \in D_f$，有唯一的 $y_0 \in R_f$ 与 x_0 对应；反过来，对每个 $y_0 \in R_f$，也有唯一的 $x_0 \in D_f$ 与 y_0 对应，它才具有反函数. 从图象上直观理解就是：只有当每一条水平直线 $y = y_0 \in R_f$ 与函数图象 $y = f(x)$ 相交于唯一的点 (x_0, y_0) 时，函数 $y = f(x)$ 才具有反函数.

例如，给定正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$，其值域是 $[-1, 1]$，它就不存在反函数，因为它不满足一一对应，比如就有无数多个 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$ 使得 $\sin x = 1$. 由此可见，三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ 在其定义域内不存在反函数，但在某些局部的区间上存在反函数. 比如，对应正弦函数 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，可定义反函数为 $y = \arcsin x$，它的定义域 $D_f = [-1, 1]$，值域 $R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，函数图象如图 1-6 所示.

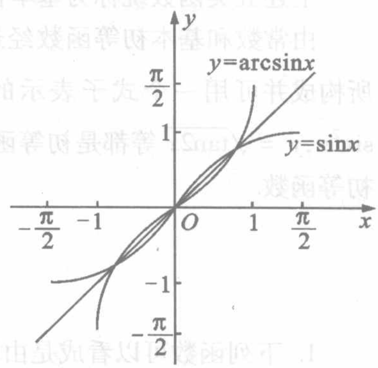

图 1-6

考察正弦函数 $y = \sin x$ 和反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的图象，可以发现它们是关于直线 $y = x$ 对称的. 由上述分析知，$y = \sin x$ 的定义域和值域正好是 $y = \arcsin x$ 的值域和定义域. 其实这个结论对函数 $y = f(x)$ 及其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 都是成立的.

如何求一个函数的反函数呢？下面通过具体例子进行说明.

例 2　求函数 $y = \log_3 \frac{x-1}{x+2}$ 的反函数.

解　由方程 $y = \log_3 \frac{x-1}{x+2}$，有

$$3^y=\frac{x-1}{x+2}.$$

进一步反解得
$$x=\frac{1+2\times 3^y}{1-3^y},$$

将其记作
$$y=\frac{1+2\times 3^x}{1-3^x}.$$

将上述求解过程归纳即得求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤：先从 $y=f(x)$ 中解出 x，得 $x=\varphi(y)$；再将 x,y 互换，得 $y=\varphi(x)$ 即为所求.

四、初等函数

在中学我们已经学习了下面几类函数：

幂函数：$y=x^u(u\in\mathbf{R},u$ 是常数)；

指数函数：$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

对数函数：$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

三角函数：$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

上述五类函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 例如 $y=\sqrt{1-x^2},y=\sin^2 x,y=\sqrt{\tan 2x}$ 等都是初等函数. 在本门课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

习题 1－2

1. 下列函数可以看成是由哪些简单函数复合形成的？

(1) $y=\sqrt{(x-1)^2+1}$；　　(2) $y=[1+\ln(x^2+1)]^2$.

2. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{1}{x-2}$；　　(2) $y=2^x+3$；

(3) $y=(x+1)^3-1$；　　(4) $y=\log_a x^3(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

3. 判断下列函数是否为初等函数，并请指出原因.

(1) $y=|\log_2 x|$；　　(2) $y=\begin{cases}x^2-x+1,x\leqslant 1,\\ x^2+x-1,x>1;\end{cases}$