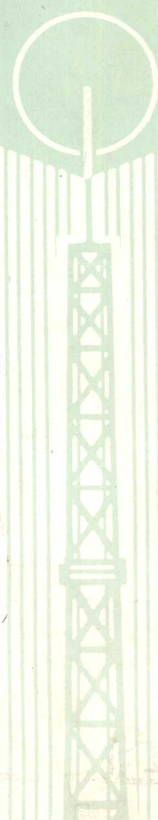
高等学校教材

线性系统理论

沈绍信 编著



大连理工大学出版社

高等学校教材

线性系统理论

沈绍信 编著

大连理工大学出版社

内　容　提　要

本书系统地介绍了控制理论中的线性系统理论。内容包括系统的数学模型、零点和极点、可控性和可观测性及系统结构分解、标准形和实现问题、状态反馈和观测器、解耦控制与鲁棒控制、二次型性能指标的最优控制及系统稳定性分析。

在内容安排上采取以状态空间分析为主兼顾频域分析方法，恰当处理了清晰物理概念与严格数学证明之间的关系。为便于自学，有关的数学基础在书尾引入的附录中予以介绍，各章有一定数量的习题并指出了主要参考文献。

本书可作为自动控制类高年级学生和研究生的教材，也可作为自动化领域科技人员深入学习控制理论的参考教材。

高等学校教材

线　性　系　统　理　论

Xianxing-Xitong Lilun

沈绍信　编著

大连理工大学出版社出版（大连市凌水河）　辽宁省新华书店经销

大连市科技干部进修学院综合经销处印刷厂印刷

开本：787×1092　1/16　印张：22⅝　字数：548 千字

1989年7月第1版　1989年7月第1次印刷

印数：0001—1500册

责任编辑：喆斐　子溢　责任校对：杜祖诚

封面设计：葛　明

ISBN 7-5611-0102-3/TP·7　定价：4.40元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986～1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近 400 种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　　言

本教材系由高等学校《计算机与自动控制》教材编审委员会《自动控制》教材编审小组评选审定，并推荐出版。

该教材由大连理工大学沈绍信编写，成都电讯工程学院任德厚副教授担任主审，编审者均依据《自动控制》编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅的。

本教材介绍线性系统理论的一些基本概念和主要理论，在大学本科自动控制理论基础上深入讨论线性多变量系统数学模型及其分析综合方法。在内容安排上采取以状态空间法为主，兼顾频域分析方法，以使学生对线性系统理论的基本内容有总体的了解，为深入学习自动控制类的其它学科打下基础。本课程参考教学时数为60学时。

全书共分八章。主要内容包括系统的数学模型、系统的零点和极点、系统的可控性和可观测性及结构分解、标准形和实现问题、状态反馈和观测器、解耦控制与鲁棒控制、二次型性能指标的最优控制、系统的稳定性分析。为了便于读者自学，引入了奇异值分解、多项式与多项式矩阵两个附录。本书各章给出了小结并指明了主要参考文献。

王众讬教授审阅了本书的初稿，并提出了许多宝贵意见，这里表示诚挚的谢意。成都电讯工程学院任德厚副教授对原稿进行了极为认真的审阅，为促成书稿完善提出了许多建设性的意见。责任编委古孝鸿教授在本书编写过程中，也提出了不少有益的建议。另外，在编写过程中，得到了教研室徐方等同志的热情支持。对此也一并致谢。

由于编者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

1988年10月

目　　录

第一章　系统的数学模型

§1-1　系统的数学描述

系统分析研究的第一步乃是建立数学模型以描述系统。由于分析方法的不同，或由于所欲解决问题的不同，描述同一系统的数学模型往往有所不同。目前线性多变量系统的数学模型有四种描述形式：

1．传递函数矩阵描述

2．状态空间描述

3．系统矩阵描述

4．矩阵分式描述

本节将分别介绍上述四类描述形式及它们之间的关系。

一、传递函数矩阵描述

这类描述也称系统的输入－输出描述。单输入－单输出系统在时域中关系可用摺积公式表示为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{0}g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{\infty}g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=y(o)+\int_{0}^{\infty}g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-1}$$

在初始条件为零时利用拉氏变换，可得

$$y(s)=g(s)u(s) \tag{1-2}$$

上述描述可推广到图1-1所示的多输入-多输出系统

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{g}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-3}$$

式中

$$\mathbf{g}(t,\tau)=\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{ml} \end{bmatrix}$$

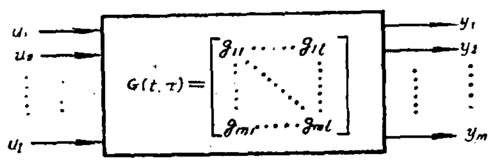


图 1-1

$g_{ij}(t,\tau)$为第 j 个输入u_j到第 i 个输出之间权函数，称 $\mathbf{g}(t,\tau)$ 为系统的权函数矩阵。同样，在初始条件为零时利用拉氏变换可得

$$\mathbf{y}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \tag{1-4}$$

式中

$$
\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots\cdots & g_{1l}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(s) & \cdots\cdots & g_{ml}(s) \end{bmatrix} = [g_{ij}(s)]_{m\cdot l}
$$

$\mathbf{G}(s)$是系统的传递函数矩阵，$\mathbf{y}(s)$是$m\times 1$维输出列向量，$\mathbf{U}(s)$是$l\times 1$维输入列向量。

对上述描述进一步讨论以下几点：

1．线性关系

定义1-1：设H为线性算子，当且仅当对于任何输入u_1和u_2，以及任何实数a_1和a_2系统在零初始状态下的响应为

$$H(a_1u_1+a_2u_2)=a_1Hu_1+a_2Hu_2 \tag{1-5}$$

时，称该系统为线性的，否则该系统为非线性的。

以单输入－单输出系统为例，系统可描述为

$$y=Hu \tag{1-6}$$

对分段连续输入u可用一系列脉冲函数近似，图 1-2 所示脉冲函数定义如下：

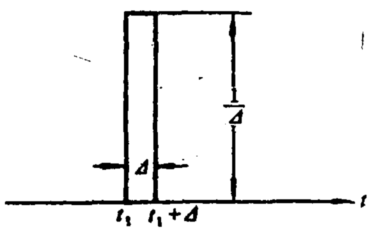


图 1-2

$$
\delta_\Delta(t-t_1)=\begin{cases} 0 & 当 t<t_1 \\ \dfrac{1}{\Delta} & 当 t_1\leqslant t<t_1+\Delta \\ 0 & 当 t\geqslant t_1+\Delta \end{cases}
$$

脉冲函数在Δ宽度内所包含的面积为一个单位，随着Δ趋近于零，可取如下极限：

$$\delta(t-t_1)\triangleq\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t-t_1)$$

即为冲激函数，或称δ函数。

图 1-3 即为用脉冲函数近似输入信号u的图形。此时，输入信号可表示为

$$u\simeq\sum u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta$$

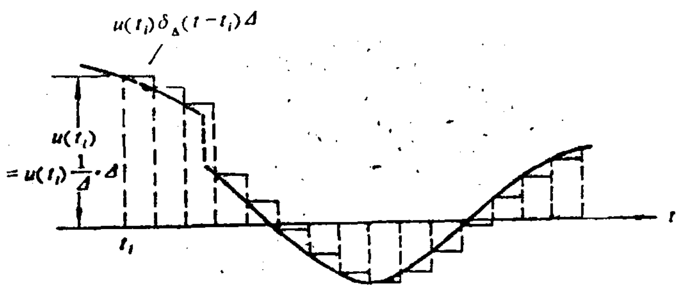


图 1-3

若系统满足线性关系，则有

$$y=Hu\simeq\sum[H\delta_\Delta(t-t_i)]u(t_i)\Delta \tag{1-7}$$

当Δ趋于零，则近似式趋于完全相等，且和式可用积分代替，脉冲函数即为冲激函数，式(1-7)可描述为

$$y=\int_{-\infty}^{\infty}[H\delta(t-\tau)]u(\tau)\mathrm{d}t \tag{1-8}$$

$H\delta(t-\tau)$为在时刻τ对系统加一脉冲函数时的系统输出，并可以表示为

$$H\delta(t-\tau)=g(t,\tau) \tag{1-9}$$

g 为一双变量函数，其中第二个变量τ表示δ函数加于系统的时刻，而第一个变量t为观测到输出的时刻，因为$g(t,\tau)$是由冲激函数所引起的响应，故称其为系统的冲激响应。利用式(1-9) 可写出t时刻的输出为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

上述关系推广到有l个输入和m个输出的系统即得

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{g}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

虽然线性系统的关系可由式(1-3) 描述，但因积分限是从$-\infty$到∞，实际应用中尚有一定困难，以下逐步讨论克服步骤。

2、因果性

任何物理系统都具有因果关系，系统的因果性定义如下：

系统t时刻输出不取决于t以后的输入，而仅与t以前输入有关，则称系统具有因果性。

考虑因果性，系统输入-输出关系可写成

$$\mathbf{y}(t)=H\mathbf{u}(-\infty,t) \tag{1-10}$$

由因果性，有

$$\mathbf{g}(t,\tau)=0 \quad (\text{对所有}\ \tau\text{和所有}t<\tau)$$

故输入－输出可描述为

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathbf{g}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-11}$$

3．松弛性

系统输入-输出关系描述的基础是系统具有松弛性。系统松弛性定义如下：

一个系统在t_0时是松弛的，则必要且只要输出$\mathbf{y}(t_0,\infty)$仅由$\mathbf{u}(t_0,\infty)$唯一地确定。由

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{g}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{g}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{\infty}\mathbf{g}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathbf{y}(t_0)+\int_{t_0}^{\infty}\mathbf{g}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

若$\mathbf{y}(t_0)=0$，则有

$$\mathbf{y}(t_0,\infty)=\int_{t_0}^{\infty}\mathbf{g}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-12}$$

即一个在t_0时刻松弛的系统其输入-输出关系为

$$\mathbf{y}(t_0,\infty)=H\mathbf{u}(t_0,\infty) \tag{1-13}$$

对线性系统，系统在t_0时刻松驰的条件为

$$\mathbf{y}(t_0)=H\mathbf{u}(-\infty,t_0)=0 \tag{1-14}$$

故具有因果性、松驰性线性系统的输入-输出关系为：

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{g}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{1-15}$$

4．时不变性

设Q_a为移位算子，则时不变性的定义如下：

一个松驰系统是时不变的，则必要且只要

$$HQ_a\mathbf{u}=Q_aH\mathbf{u} \tag{1-16}$$

成立（u 为任意输入，α 为任意实数）。否则，系统称为时变系统。

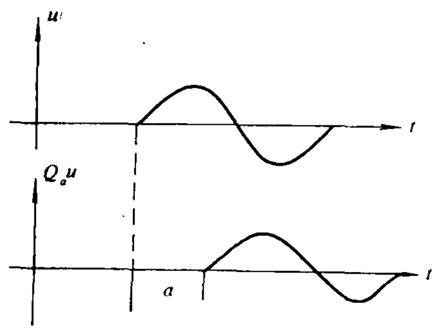


图 1-4

采用移位算子信号关系如图 1-4 所示，式(1-16)也可写为

$$HQ_a\mathbf{u}=Q_a\mathbf{y}$$

即输入移动α 秒后，所得输出波形不变，仅在时间上移动 α秒。下面讨论时不变性对冲激响应的影响（以单输入-单输出采统为例）

$$\begin{aligned}Q_a g(\cdot,\tau)&=Q_aH\delta(t-\tau)\\&=HQ_a\delta(t-\tau)\\&=H\delta[t-(\tau+\alpha)]\\&=g(\cdot,\tau+\alpha)\end{aligned}$$

据 Q_a定义，$Q_a g(\cdot,\tau)=g(\cdot,\tau+\alpha)$ 意味着对任意α,t,τ, $g(t,\tau)=g(t+\alpha,\tau+\alpha)$ 成立。如选$\alpha=-\tau$，则对于任意t,τ,有 $g(t,\tau)=g(t-\tau,0)$ 成立。因此对于线性时不变系统，其冲激响应仅取决于 t 和 τ 之差。这一结论推广到多变量系统有

$$\mathbf{g}(t,\tau)=\mathbf{g}(t-\tau,0)=\mathbf{g}(t-\tau) \tag{1-17}$$

式中 t 和 τ 均为任意值，所以对满足线性、因果性、松驰性、时不变性的系统，其输入-输出关系为：

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{g}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-18}$$

为不失一般性，设 $t_0=0$

$$\mathbf{y}(t)=\int_0^t\mathbf{g}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\mathbf{g}(\tau)\mathbf{u}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-19}$$

5．传递函数矩阵

由摺积分描述系统的最大特点是可以应用拉氏变换，将时域中的摺积变换为频域中的代数方程。设 $Y(s)$是$y(t)$的拉氏变换，即

$$y(s)=\int_0^\infty y(t)\mathrm{e}^{-st}dt$$

对线性、时不变、松驰系统，将式(1-19)代入，有

$$\mathbf{Y}(s)=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty\mathbf{g}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau\right]\mathrm{e}^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\right]u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$=\int_0^{\infty} g(v)\ e^{-sv}dv\int_0^{\infty}u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$=G(s)u(s) \tag{1-20}$$

上述运算中变换了积分次序、代换了变量，且用到了 $g(t)=0\ (t<0)$ 的结论，此时冲激响应矩阵的拉氏变换可写成：

$$G(s)=\int_0^{\infty} g(t)e^{-st}dt \tag{1-21}$$

称之为传递函数矩阵。

应该注意传递函数不一定是 s 的有理函数，例如单位延迟系统，其传递函数 e^{-s} 不是 s 的有理函数。但大部分物理系统的传递函数矩阵为有理函数矩阵，仅在有理传递函数条件下讨论系统的零点、极点才有意义。

这里 $G(s)$ 的每个元 $g_{ij}(s)$ 均为 s 的有理分式，如果它的所有元的分母多项式的次数均不低于分子多项式的次数，则 $G(s)$ 为真有理分式函数阵，若 $G(s)$ 的所有元的分母多项式次数均高于分子多项式的次数，则 $G(s)$ 为严格真有理分式函数。

二、状态空间描述

系统的输入-输出描述仅在初始松驰条件下才能采用。若系统在 t_0 时刻为非松驰的，则等式 $g(t_0,\infty)=Hu(t_0,\infty)$ 不再成立。此时

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t_0} g(t,\tau)u(t)d\tau+\int_{t_0}^{t} g(t,\tau)u(t)d\tau$$

即输出 $y(t_0,\infty)$ 并不仅由 $u(t,\infty)$ 所决定，而且还取决于在 t_0 时的一组初始条件，这组初始条件就称为状态，其定义如下：

系统在 t_0 时刻的状态是系统在 t_0 时刻的一组信息量，它与 $u(t_0,\infty)$ 一起，可以唯一地确定系统在所有 $t>t_0$ 时的行为。

例1-1：图1-5所示电路

其传递函数为

$$g(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{1/s}{3+2s+1/s}$$

$$=\frac{1}{(2s+1)(s+1)}$$

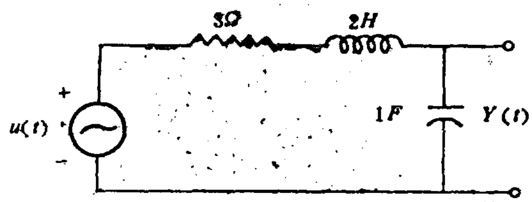


图 1-5

而冲激响应函数

$$g(t)=e^{-0.5t}-e^{-t}$$

从而，对应输入 $u(t_0,t)$ 的输出响应 $y(t)$ 为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)\ d\tau+\int_{t_0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

上式第一项表示 t_0 以前的输入对 t_0 以后输出的影响。本例中

$$\int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)\ d\tau$$

$$=e^{-0.5t}\int_{-\infty}^{t_0}e^{0.5\tau}u(\tau)d\tau-e^{-t}\int_{-\infty}^{t_0}e^{\tau}u(\tau)d\tau$$
$$=e^{-0.5t}x_1-e^{-t}x_2$$

其中 $x_1\triangleq\int_{-\infty}^{t_0}e^{0.5\tau}u(\tau)d\tau$, $x_2\triangleq\int_{-\infty}^{t_0}e^{\tau}u(\tau)d\tau$

这里，x_1, x_2与t无关。若x_1, x_2已知，则$t\geqslant t_0$以后的输出$y(t)$可以唯一确定。故参数x_1，x_2可以认为是t_0时的状态变量。

由上分析可知

$$y(t_0)=e^{-0.5t}x_1-e^{-t}x_2$$
$$\dot{y}(t)=-0.5e^{-0.5t}x_1+e^{-t}x_2+g(0)u(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

因为$g(0)=0$，所以，当$t=t_0$时可得

$$\dot{y}(t_0)=-0.5e^{-0.5t_0}\cdot x_1+e^{-t_0}\cdot x_2$$

因此有

$$x_1=2e^{0.5t_0}\cdot[y(t_0)+\dot{y}(t_0)]$$
$$x_2=e^{t_0}\cdot[y(t_0)+2\dot{y}(t_0)]$$
$$y(t)=2[y(t_0)+\dot{y}(t_0)]e^{-(t-t_0)}-[y(t_0)+2\dot{y}(t_0)]e^{-(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

故若$y(t_0)$，$\dot{y}(t_0)$已知，$t\geqslant t_0$后的输出也能唯一地被确定。所以$y(t_0)$，$\dot{y}(t_0)$可以认为是另一组状态变量。

本例说明，$[-\infty, t_0]$区间输入u对网络的影响可以分别用状态变量x_1, x_2或$y(t_0)$，$\dot{y}(t_0)$来描述，故对非初始松驰系统，状态变量描述是十分重要的。

图 1-6 表示了用状态空间描述的系统框图，其中 $\mathbf{u}$ 为$l\times 1$维输入，$\mathbf{x}$为 $n\times 1$ 维状态向量，$\mathbf{y}$为$m\times 1$维输出向量，状态x张成的向量空间称为状态空间。

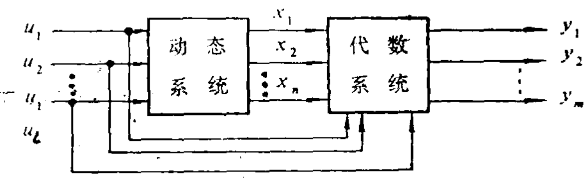


图 1-6

描述输入，状态和输出之间关系的一组方程称为动力学方程，其一般形式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\qquad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0 \tag{1-22a}$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \tag{1-22b}$$

(1-22a)为系统的状态方程，(1-22b)为输出方程。

令

$$\{\mathbf{u}(t_0,\infty),\mathbf{x}(t_0)\}\rightarrow\{\mathbf{x}(t_0,\infty)\mathbf{y}(t_0,\infty)\}$$

表示在$t\geqslant t_0$时由状态$\mathbf{x}(t_0)$和输入$\mathbf{u}[t_0,\infty]$所激励的状态$\mathbf{x}(t)$和输出$\mathbf{y}(t)$，称为输入-状态-输出对。若系统能产生这样的对，则系统的输入-状态-输出对是可容的。

定义1-2 ：当且仅当对任意两个可容对

$$\{x_1(t_0),u_1[t_0,\infty]\}\to\{x_1[t_0,\infty],y_1[t_0,\infty]\}$$

$$\{x_2(t_0),u_2[t_0,\infty]\}\to\{x_2[t_0,\infty],y_2[t_0,\infty]\}$$

和任意两实数α_1和α_2，存在如下可容对

$$\{\alpha_1x_1(t_0)+\alpha_2x_2(t_0),\ \alpha_1u_1[t_0,\infty]+\alpha_2u_2[t_0,\infty]\}$$

$$\to\{\alpha_1x_1[t_0,\infty]+\alpha_2x_2[t_0,\infty],\alpha_1y_1[t_0,\infty]+\alpha_2y_2[t_0,\infty]\}$$

则系统为线性的，否则系统为非线性的。

上述定义中若$\alpha_1=\alpha_2=1$，则表示了叠加性，若$\alpha_2=0$，则反应了齐次性。本定义与输入－输出描述关于线性定义的区别在于包含了所有状态变量的叠加性，故具有更一般的意义。

在上述定义条件下，若$\alpha_1=\alpha_2=1$，，且有

$$x_1(t_0)=-x_2(t_0)\quad 和u[t_0,\infty]=-u_2[t_0,\infty]$$

则有

$$\{0,0\}\to\{0[t_0,\infty],0[t_0,\infty]\}$$

故线性系统在 $x(t_0)\equiv0$，$u[t_0,\infty]\equiv0$ 条件下，状态和输出必恒等于零。由定义得到的一个重要性质为

$$\{x(t_0),u[t_0,\infty]\}的响应=\{x(t_0),0\}的响应+\{0,u[t_0,\infty]\}的响应$$

若系统为线性的，则式(1-22)中f, g可表为x与u的线性函数

$$f[x(t),u(t),t]=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

$$g[x(t),u(t),t]=C(t)x(t)+D(t)u(t)$$

故n维线性动力学方程为

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)\qquad x(t_0)=x_0 \tag{1-23a}$$

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t) \tag{1-23b}$$

方程有唯一解的条件为在t定义区间$(-\infty,\infty)$内，$A(\cdot)$，$B(\cdot)$，$C(\cdot)$和$D(\cdot)$为时间连续函数，式(1-23)称为线性时变动力学方程。

定义：对任意可容对

$$\{x(t_0),u_{[t_0,\infty]}\}\to\{x_{[t_0,\infty]},y_{[t_0,\infty]}\}$$

和任意实数α，及移位算子Q_α，存在可容对

$$\{Q_\alpha x(t_0),Q_\alpha u_{[t_0,\infty]}\}\to\{Q_\alpha x_{[t_0,\infty]},Q_\alpha y_{[t_0,\infty]}\}$$

则系统为时不变的，否则系统为时变的。

线性时不变系统动力学方程为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\qquad x(t_0)=x(o) \tag{1-24a}$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \tag{1-24b}$$

式中A, B, C, D为不依赖于x和u的常数矩阵，其维数分别为$n\times n$，$n\times l$，$m\times n$，$l\times m$。若 u 为有限间断连续函数，初始条件$x(t_0)$已知，方程(1-24)有唯一解。

例1-2：如图1-7所示倒摆装置，在台车上安装一杆，要求在水平方向适当地移动台车使此杆能垂直倒立，试建立该装置的数学模型。

由图1-7可知，台车的位置是ξ，摆的角位移为φ，摆重心的水平位置为$\xi+l\sin\varphi$，