■ 全国高等农林院校十一五规划教材辅导丛书
quanguo gaodeng nonglin yuanxiao shiyiwu guihua jiaocai fudao congshu

线性代数习题精解与学习指导

房　宏　王学会　主编

南开大学出版社

线性代数习题精解与学习指导

房　宏　王学会　主编

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题精解与学习指导 / 房宏，王学会主编.
天津：南开大学出版社，2009.5
ISBN 978-7-310-03135-1

Ⅰ.线… Ⅱ.①房…②王… Ⅲ.线性代数—高等学校—
教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 057803 号

南开大学出版社出版发行
出版人:肖占鹏
地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071
营销部电话:(022)23508339 23500755
营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200
*
天津泰宇印务有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
2009 年 5 月第 1 版 2009 年 5 月第 1 次印刷
880×1230 毫米 32 开本 10 印张 284 千字
定价:20.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

前　言

线性代数是高等学校普遍开设的一门重要的数学基础课，它具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和工程应用的广泛性。不少读者在学习后觉得内容似乎是懂了，但到分析、解决具体问题时，概念容易混淆，能力明显不足。为了解决这些矛盾，同时帮助读者进一步加深对线性代数中基本概念、基本定理的理解，引导读者掌握线性代数的解题方法和技巧，启发、培养读者学习线性代数的兴趣，提高其逻辑思维能力、计算能力和演绎论证的能力，特编写了本书。

本书根据现行教学大纲和研究生入学考试大纲进行编写，采用以章节为序的方法，归纳了这门课中所涉及的大量题型，精心选编和分析了一些经典题型及考研题，以供读者学习。本书在编写上有以下几个特点：一、画龙点睛，给出了每一章的学习要求与内容提要，使读者学习时心中有数，有的放矢。二、答疑解惑，对重点、难点及容易混淆的概念进行诠释，使读者对学习中遇到的问题能迎刃而解，便于掌握线性代数的实质。三、典型例题解析，尽可能全面归纳这门课程所涉及的典型题型，其中有介绍基本概念和基本运算方法的计算题及证明题，有一题多解的开拓思路题，有较灵活的综合题，也有历届的考研题。不少例题在解答前有详细的分析，请读者务必仔细阅读、品味，做到明其精髓，举一反三。四、本书的另一特点是将知识点的讲解、分析与习题的解析及答案合二为一，便于读者的学习及使用。五、每一章后安排了综合练习题，旨在进一步强化解题训练，帮助读者掌握本章的重点及难点，提高和巩固学习的效果。当然解题能力的提高需要读者亲自动手，只有通过本身的实践，才能真正得到锻炼，从而不断提高解题能力。

本书不仅是广大学生的学习指导书、教师教学的参考书，而且也可作为硕士研究生入学考试的一本复习丛书，具有很强的实用性。

参加本书编写的教师有：房宏（第二章、第三章），王学会（第一章、第五章），崔军文（第四章），张文辉（第六章），全书由房宏统稿。

本书在编写、出版过程中，得到了张孝义老师以及南开大学出版社张燕等老师的热心支持与帮助，在此表示衷心的感谢。

编写本书时，参阅了许多书籍，引用了一些经典的例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。

编　者

2009 年 2 月

于天津农学院

目　　录

第一章　行列式

1.1　学习要求与内容提要

一、学习要求

1. 掌握 n 阶行列式的定义.

2. 熟练掌握行列式的性质,会利用行列式的性质计算行列式.

3. 熟练掌握利用行列式按行(列)展开的方法计算行列式.

4. 会用克莱姆法则求解线性方程组.

本章重点:行列式的计算.

二、内容提要

(一)排列的逆序数

1. n 级排列:自然数 $1,2,\cdots,n$ 按一定次序排成的一个无重复数字的有序数组称为一个 n 级排列,记为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$.

2. 逆序和逆序数:在一个 n 级排列中,若一个较大的数排在一个较小的数的前面,则称这两个数构成一个逆序.

一个排列中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(i_1,i_2,\cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

(二)n 阶行列式的定义

1.定义:n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

它是 $n!$ 项的代数和,$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$取自 D 的不同行不同列.

2.对角线法则适用于二阶和三阶行列式.

3.由 n 阶行列式的定义可得到一些特殊行列式:

(1)上、下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11} a_{22} \cdots a_{nn};$$

(2)对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$$

(3)副对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1};$$

(4)关于副对角线的上、下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

(三)行列式的性质：

1. 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

2. 交换行列式的两行(或两列),行列式改变符号.

3. 如果行列式有两行(或两列)完全相同,则行列式等于零.

4. 用一个数 k 乘行列式,等于行列式某一行(或一列)的所有元素都乘以 k. 也可以说,如果行列式某一行(或一列)元素有公因子,则可将公因子提到行列式外面.

5. 如果行列式有一行(或一列)元素全为零,则该行列式等于零.

6. 如果行列式有两行(或两列)对应元素成比例,则该行列式等于零.

7. 如果行列式某一行(或一列)元素可表示为两项的和,则该行列式可表示为两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8. 行列式的第 i 行(列)元素 k 倍后加到第 j 行(列)对应元素上,行列式值不变.

(四)行列式按行(列)展开

1. 代数余子式:在 n 阶行列式 D 中划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列的元素后,剩下的元素按原位置构成的 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{ij}的余子式,记为 M_{ij},称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为 a_{ij}的代数余子式,记为 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

2. 定理(1)：一个 n 阶行列式 D，如果其第 i 行(或第 j 列)元素除 a_{ij} 外都为零，则行列式 D 等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

3. 定理(2)：行列式 D 等于它的任一行(列)所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和. 即 $D=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ 或 $D=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$.

4. 定理(3)：行列式 D 的某一行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于 0.

(五)克莱姆(*Gramer*)法则

考虑含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组(1)：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1}$$

1. 如果其系数行列式 $D\neq0$，那么方程组有唯一解：$x_i=\dfrac{D_i}{D}$，其中 D_i 是把 D 中第 i 列元素换成方程组右端的常数项得到的 n 阶行列式.

2. 如果方程组无解或有两个不同的解，则系数行列式 $D=0$.

1.2 答疑解惑

问 1.1 n 阶行列式定义的实质是什么？

答 对于 n 阶行列式的定义的理解应把握以下四点：

(1)行列式的值是一个具体数；

(2)n 级排列的总数是 $n!$，对所有排列求和，共有 $n!$ 项；

(3)每一项都是 n 个不同元素的乘积，这 n 个元素要求取自不同行不同列；

(4)每一项的“符号”规则是当第一个下标排列为自然排列时，由第二个下标排列的奇偶性决定.

例如，考虑 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix}$$

由行列式的定义可知:D 是关于 λ 的 4 次多项式.因为 D 中有正项 $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$,而其他各项 λ 的次数均低于 4.D 中 λ^3 的系数是 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

问 1.2 能否由行列式定义得到下列 2 个关于 x 的多项式的最高次项?

$$(1)D_1=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4x^4+3 \end{vmatrix}$$

$$(2)D_2=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x^4 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ x & -1 & 2 & 4x^4 \end{vmatrix}$$

答 可以得出.考察 D 中所有取由不同行、不同列的 4 个元素之积中含 x 的幂次最高的那些项.

(1)在 D_1 中,含 x 的最高幂次的项为 $x\times 2x^2\times 3x^3\times(4x^4+3)$,从而 D_1 中 x 的最高幂次项为 $24x^{10}$,且含 x^6 项为 $18x^6$,x^9,x^8,x^7 项系数均为零.

(2)在 D_2 中,含 x 的最高幂次的项有两个,分别是 $x\times 2x^2\times 3x^3\times 4x^4$ 和 $x\times 2x^2\times 3x^3\times x^4$,从而 D_2 中 x 的最高幂次项为 $(24+6)x^{10}=30x^{10}$.

问 1.3 (1)余子式与代数余子式有什么特点?

(2)它们之间有什么联系?

答 (1)对于给定的 n 阶行列式 D,元素 a_{ij}的余子式 M_{ij}和代数余子式 A_{ij}仅与元素 a_{ij}的位置有关,而与元素 a_{ij}所在行列元素大小和正负无关.

(2)二者关系是：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则当 $i+j$ 为奇数时，$A_{ij}=-M_{ij}$，当 $i+j$ 为偶数时，$A_{ij}=M_{ij}$.

问 1.4 范德蒙行列式有什么特点？

答 n 阶范德蒙行列式 $D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 记为

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

D_n 有以下三个特点：

(1)从行的角度看，第 i 行元素从左向右依次是各变元的 $i-1$ 次幂，$i=1,2,\cdots,n$.

(2)从列的角度看，第 j 列元素从上向下依次是变元 x_j 的零次幂，1 次幂，$\cdots$，$n-1$ 次幂，$j=1,2,\cdots,n$.

(3)从结果看，D_n 是 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，是$\frac{1}{2}n(n-1)$个一次因式之积，每一个因式形如 x_i-x_j，其中 $1\leqslant j\leqslant i\leqslant n$，即下标大的变元与下标小的变元之差. 于是 n 阶范德蒙行列式是所有可能的下标大的变元与下标小的变元差的乘积.

问 1.5 克莱姆法则的意义是什么？

答 一方面，克莱姆法则给出了求解 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的一般结论，又是 n 个未知数 m 个方程的线性方程组理论的基础.

另一方面，由克莱姆法则可以得出以下结论(1)非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$无解或有两个不同的解，则系数行列式 $D=0$；(2)齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$有非零解，则系数行列式 $D=0$；(3)齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$，则只有零解.

问 1.6 如果线性方程组的系数行列式 $D=0$，能不能说非齐次线性方程组有无穷多解？

答 对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组，系数行列式 $D\neq0$

是方程组有唯一解的充要条件. 因此，如果系数行列式 $D=0$，可以说方程组不是有唯一解，可能无解或有无穷多解两种情况.

1.3 典型例题解析

题型一 计算排列的逆序数

例 1 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1)1 3 4 7 2 6 5

(2)$n(n-1)\ \cdots\ 2\ 1$；

(3)$1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ 2n$.

解 (1)$\tau=0+0+0+0+3+1+2=6$，偶排列

(2)$\tau=0+1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，则当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，为奇排列.

(3)$\tau=0+1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，奇偶性与排列(2)相同.

例 2 选择 i 和 k，使

(1)1 i 2 5 k 4 8 9 7 为奇排列

(2)1 2 7 4 i 5 6 k 9 为偶排列

解 (1)由题意，i,k 只能取 3 和 6，两种可能：$i=3,k=6$ 或 $i=6,k=3$，逆序数分别为 $\tau_1=5,\tau_2=8$.

$\therefore i=3,k=6$ 即为所求.

(2)由题意，i,k 只能取 3 和 8，两种可能：$i=3,k=8$ 或 $i=8,k=3$，逆序数分别为 $\tau_1=5,\tau_2=10$.

$\therefore i=8,k=3$ 即为所求.

题型二 有关行列式的概念

例 3 已知 $a_{3j}\,a_{12}\,a_{41}\,a_{2k}$是 4 阶行列式中带负号的一项，求 j 和 k.

解 $a_{3j}\,a_{12}\,a_{41}\,a_{2k}=a_{12}\,a_{2k}\,a_{3j}\,a_{41}$，则排列 2 k j 1 只有两种可能：2 3 4 1或 2 4 3 1，而 $\tau(2\ 3\ 4\ 1)=0+0+0+3=3$，$\tau(2\ 4\ 3\ 1)=0+0+1+3=4$.

因 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$带负号，故 $i=3,j=4$.

例 4 若 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$

则方程 $f(x)=0$ 根有多少个？

解 由题意可知，$f(x)$是关于 x 的 4 次多项式.

先将行列式进行简化：

$$f(x)\xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}}\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

由行列式的定义可知，$f(x)$是一个关于 x 的二次多项式，故 $f(x)=0$ 只能有两个根.

例 5 证明 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

证明 行列式 D 中的一般项是 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$列标互不相同取 1 至 5，故 j_3,j_4,j_5 中至少有一个要大于或等于 3，那么 $a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$中至少有一个为 0，所以 D 的每一项都为 0，故 $D=0$.

题型三 利用性质计算行列式

将行列式化成上(或下)三角形.

例 6 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解 方法(1) 从第 2 行开始到第 n 行分别减去第 1 行，则

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

再将第 2,3,…,n 列加到第 1 列上，则

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

方法(2) 将第 2,3,…,n 行加到第 1 行上，则

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

从第 2 行开始到第 n 行分别加上第一行的 $(-a)$ 倍，则

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

例 7 计算

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

解 把 D 化成上三角形行列式.

将第 2 列的$\left(-\frac{1}{2}\right)$倍,第 3 列的$\left(-\frac{1}{3}\right)$倍,…,第 n 列的$\left(-\frac{1}{n}\right)$倍分别加到第 1 列上,则

$$D=\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)2\cdot 3\cdots n$$

$$=\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)n!$$

例 8 计算

$$\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$