总 主 编 王卫华 林 常
本册主编 黎金传 周 斌 李 红

高中数学联赛讲义

几何分册

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学联赛讲义

- 代数分册
- 几何分册
- 组合数学 数论分册

ISBN 978-7-308-06649-5

定价：20.00元

高中数学联赛讲义

（几何分册）

总主编　王卫华　林　常

本册主编　黎金传　周　斌　李　红

本册编委　陆建根　马玲坤　徐志春

徐建新　田林保　徐小平

刘小杰　解　晋　邱述建

赵建刚　张锦成　汪耀生

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛讲义. 几何分册/黎金传主编. —杭州：浙江大学出版社，2009. 3

ISBN 978-7-308-06649-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. 黎… Ⅲ. 几何课—高中—教学参考资料

Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 036645 号

高中数学联赛讲义（几何分册）

黎金传 周 斌 李 红 主编

责任编辑 沈国明

文字编辑 吴 慧

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

（杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028）

（网址：http://www.zjupress.com）

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 德清县第二印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 13.25

字 数 322 千

版 印 次 2009 年 3 月第 1 版 2009 年 4 月第 2 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-06649-5

定 价 20.00 元

前　言

“全国高中数学联赛”(始于1981年)是教育部批准，由中国科协主管，中国数学会普及工作委员会主办，国内影响最大的一项中学生学科竞赛。

每年10月中旬的第一个周日，全国有近10万学生参加这项重要的竞赛活动，争夺每个赛区的一等奖。每个赛区前几名的同学，还可以获得进入“中国数学奥林匹克”的资格，更进一步，可以争取代表中国参加国际数学奥林匹克竞赛。

2009年1月，中国数学会普及工作委员会在海南召开会议，对全国高中数学联赛的考查方式及考查要求作了调整，进一步加强联赛第二试的内容，并明确将“代数、几何、组合、数论”四块的考查要求写入考试说明。

许多同学在全国高中数学联赛前夕，都会碰到这样的问题：如何进行联赛的复习，选择什么书来看，找一些什么样的题目来做，哪些知识点是联赛重点考查的，哪些数学思想方法是联赛命题者比较青睐的，等等。

为了更有效地应对新的联赛命题方式，提高读者联赛复习的效果，解决读者的这些疑惑，《数学竞赛之窗》编辑部特别邀请了全国各地在数学竞赛辅导一线的教练员和多次参加各级各类竞赛命题的专家编写了本丛书。本丛书分为三册，分别是：代数分册，几何分册以及组合、数论分册。

代数分册：按照全国高中数学联赛考查的重点内容，本册内容包括“函数、数列、不等式、多项式、复数”等部分，涵盖全国联赛一试和二试对代数问题的要求。

几何分册：本册内容分为三大块——立体几何、解析几何和平面几何，其中立体几何和解析几何是一试中的重点考查内容，平面几何是二试的必考内容。

组合和数论分册：本册既注意了联赛一试对简单排列组合问题和数论小题的覆盖，更注重联赛二试中对数论和组合问题的考查，这些问题往往以联赛压轴题的形式出现，在新的考试模式下，这方面的考查会得到加强，希望引起读者注意。

本书的编写过程中，得到《数学竞赛之窗》编委老师的大力支持，他们提出了很多富有建设性、针对性的建议。同时，《数学竞赛之窗》编辑部决定开设一个热线，解答广大读者关于全国高中数学联赛的问题。热线电话是：0512—68184173，也可通过电子邮件联系我们，信箱是：sxjszcbjb@163.com。

限于作者水平，书中不妥之处请广大读者批评指正。我们将综合大家的建议，再版时做出修订，力求使本书更适合联赛实际。

《数学竞赛之窗》编辑部

2009年3月

目　录
CONTENTS

第一章　平面解析几何

第二章　立体几何

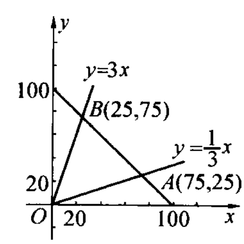
第三章　平面几何

第一章　平面解析几何

1　直线与圆

1.（1995年全国高中数学联赛）直角坐标平面上，满足不等式组 $\begin{cases} y \leqslant 3x, \\ y \geqslant \dfrac{x}{3}, \\ x+y \leqslant 100 \end{cases}$ 的整点个数是＿2551＿.

解　如图，即△OAB 内部及边界上的整点.由两轴及 $x+y=100$ 围成区域（包括边界）内的整点数为 $1+2+3+\cdots+101=5151$ 个.由 x 轴、$y=\dfrac{1}{3}x$，$x+y=100$ 围成区域（不包括 $y=\dfrac{1}{3}x$ 上）内的整点数（$x=1,2,3$ 时各有1个整点，$x=4,5,6$ 时各有2个整点，…，$x=73,74,75$ 时有25个整点，$x=76,77,\cdots,100$ 时依次有 $25,24,\cdots,1$ 个整点）.共有 $3\times1+3\times2+\cdots+3\times25+25+24+\cdots+1=4(1+2+\cdots+25)=1300$ 个.由对称性，由 y 轴、$y=3x$、$x+y=100$ 围成的区域内也有1300个整点.故所求区域内共有 $5151-2600=2551$ 个整点.



2.（第九届全国希望杯邀请赛）设 a、b 是方程 $x^2+\cot\theta\cdot x-\csc\theta=0$ 的两个不等实根，那么过点 $A(a,a^2)$ 和 $B(b,b^2)$ 的直线与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系是＿相切＿.

分析　可以先求出过 A、B 的直线方程，然后运用圆心到直线的距离与半径的大小比较，确定直线与圆的位置关系.

解　根据题意，得

$$\begin{cases} a^2+\cot\theta\cdot a-\csc\theta=0, \\ b^2+\cot\theta\cdot b-\csc\theta=0. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} a^2\sin\theta+a\cos\theta-1=0, \\ b^2\sin\theta+b\cos\theta-1=0. \end{cases}$$

因此，$A(a,a^2)$ 和 $B(b,b^2)$ 都在直线 $y\sin\theta+x\cos\theta-1=0$ 上.

所以过 A、B 的直线方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta-1=0. \qquad ①$$

因此原点到该直线的距离

$$d=\frac{|0\cdot\sin\theta+0\cdot\cos\theta-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1.$$

故过 A、B 的直线与单位圆相切.

说明　1. 本题求过 A、B 的直线的方程的方法很重要，也很简洁.读者也可以思考一下其他解法比较一下.

2. 判断直线与圆的位置关系常用两种方法：① 消去 x，或 y 之一，得到一个一元二次方程，判断 Δ 的符号；② 运用圆心到直线的距离与半径的大小关系的比较进行判断.

3. 式①即是直线 l 的法线式方程，其中熟字"1"就是原点与直线 l 的距离.

3.（1994年全国高中数学联赛）在平面直角坐标系中，方程 $\dfrac{|x+y|}{2a}+\dfrac{|x-y|}{2b}=1$（$a$，$b$ 是不相等的两个正数）所代表的曲线是＿非正方形的菱形＿.

分析　分类讨论去绝对值即可解决本题.

解　$x+y\geqslant0$，$x-y\geqslant0$ 时，（一、四象限角平分线之间）曲线方程为：

$$(a+b)x+(b-a)y=2ab;$$

$x+y\geqslant0$，$x-y<0$ 时，（一、二象限角平分线之间）曲线方程为：

$$(b-a)x+(a+b)y=2ab;$$

$x+y<0, x-y\geqslant 0$ 时,(三、四象限角平分线之间)曲线方程为:

$$(a-b)x-(a+b)y=2ab;$$

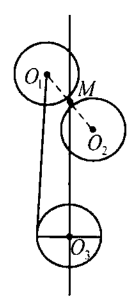
$x+y<0, x-y<0$ 时,(二、三象限角平分线之间)曲线方程为:

$$-(a+b)x+(a-b)y=2ab.$$

四条直线在 $a\neq b$ 时围成一个菱形(非正方形).

4. (第2届美国数学邀请赛)三个圆,半径都是3,中心分别在(14,92)、(17,76)、(19,84),过点(17,76)作一条直线,使得这三个圆位于这条直线某一侧的部分的面积和等于这三个圆位于这条直线另一侧的部分的面积的和.求这条直线的斜率的绝对值.

解 首先注意到这三个圆是互相外离的等圆.记 $O_1(14,92)$,$O_2(19,84)$,$O_3(17,76)$.



由于过 O_3 的直线总把 $\odot O_3$ 分为等积的两部分,因此,只要考虑过平面上怎样一点所画的直线与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交且使直线两侧的面积相等.

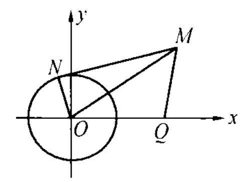
记 O_1O_2 的中点为 M,则 M 为两等圆 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的对称中心,因此过 M 且与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 都相交的直线能满足题目的要求.

因此,所求直线应过 M 和 O_3 的直线,符合题设要求的唯一的.

由于 $M(16.5,88)$,$O_3(17,76)$,则该直线的斜率的绝对值是 $|k|=\left|\dfrac{88-76}{16.5-17}\right|=24$.

5. (1994年全国高考题)已知直角坐标平面上一点 $Q(2,0)$ 和圆 C: $x^2+y^2=1$,动点 M 到圆 C 的切线长与 $|MQ|$ 的比等于常数 $\lambda(\lambda>0)$.求动点 M 的轨迹方程,说明它表示什么曲线.

分析 按求轨迹方程的常规方法,设动点 M 的坐标为 (x,y),将动点 M 满足的条件等式转化为解析表达式,化简得轨迹方程,特别要注意题中的隐含条件:二次方程的二次项系数为0时退化为一次方程,由此引起对 λ 的讨论.



解 如图,设 MN 切圆于 N,则动点 M 组成的集合为

$$P=\{M\mid |MN|=\lambda|MQ|\},$$

式中常数 $\lambda>0$.

因为圆的半径 $|ON|=1$,所以

$$|MN|^2=|MO|^2-|ON|^2=|MO|^2-1.$$

设点 M 的坐标为 (x,y),则

$$\sqrt{x^2+y^2-1}=\lambda\sqrt{(x-2)^2+y^2},$$

整理得

$$(\lambda^2-1)(x^2+y^2)-4\lambda^2x+(1+4\lambda^2)=0.$$

经检验,坐标适合这个方程的点都属于集合 P,故这个方程为所求的轨迹方程.

当 $\lambda=1$ 时,方程化为 $x=\dfrac{5}{4}$,它表示一条直线,该直线与 x 轴垂直且相交于点 $\left(\dfrac{5}{4},0\right)$;

当 $\lambda\neq 1$ 时,方程化为 $\left(x-\dfrac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}\right)^2+y^2=\dfrac{1+3\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}$,它表示圆,该圆圆心的坐标为 $\left(\dfrac{2\lambda^2}{\lambda^2-1},0\right)$,半径为 $\dfrac{\sqrt{1+3\lambda^2}}{|\lambda^2-1|}$.

说明 本题中轨迹方程的探求、对 λ 的讨论及对轨迹所表示的曲线的研究都有一定的难度,应注意理解和掌握.

6. (1991年加拿大数学奥林匹克训练题)A、B 是平面上给定的两点,C 在以 A 为圆心的圆上运动,$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的内角平分线与边 BC 的交点为 P.求:点 P 的轨迹.

解 以 A 为坐标原点,AB 为 x 轴建立平面直角坐标系.

设以 A 为圆心的圆是单位圆 $x^2+y^2=1$,再设 $C(x_0,y_0)$,$B(a,0)$,$P(x,y)$.

由 AP 是 $\angle CAB$ 的平分线，则

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{PC}=\frac{a}{1}=a,$$

从而由定比分点公式得：

$$x=\frac{a+ax_0}{1+a},y=\frac{ay_0}{1+a}.$$

从而解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{(1+a)x-a}{a},\\ y_0=\dfrac{(1+a)y}{a}.\end{cases}$

由 $x_0{}^2+y_0{}^2=1$，得

$$\left[\frac{(1+a)x-a}{a}\right]^2+\left[\frac{(1+a)y}{a}\right]^2=1,$$

整理得 $\quad x^2+y^2-\dfrac{2a}{1+a}x=0.$

因此，P 点的轨迹是一个圆，但去掉此圆与 x 轴的两个交点.

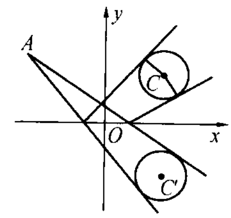
7. (1990 年第 16 届全俄数学奥林匹克题) 给定一个圆和它的内部一点 M，考虑所有可能的矩形 $MKTP$，它的顶点 K 和 P 位于圆上，求点 T 的轨迹.

解 设 $M(a,b)$，圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，此时，$r^2>a^2+b^2$. 又设 $P(x_1,y_1)$，$K(x_2,y_2)$，$T(x,y)$. 由 $MKTP$ 是矩形可得

$$\begin{cases}\dfrac{x+a}{2}=\dfrac{x_1+x_2}{2}, & ①\\ \dfrac{y+b}{2}=\dfrac{y_1+y_2}{2}, & ②\\ (x-a)^2+(y-b)^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2. & ③\end{cases}$$

① 与 ② 平方并相加，注意到 $x_i{}^2+y_i{}^2=r^2(i=1,2)$，得 $(x+a)^2+(y+b)^2=2r^2+2x_1x_2+2y_1y_2$ ④，由 ③ 得：$(x-a)^2+(y-b)^2=2r^2-2x_1x_2-2y_1y_2$ ⑤，④ + ⑤ 可得：$x^2+y^2=2r^2-(a^2+b^2)(r>\sqrt{a^2+b^2})$. 所以所求的点 T 的轨迹是以原点为圆心，$\sqrt{2r^2-(a^2+b^2)}$ 为半径的圆.

8. (1989 年全国高考题) 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 L 射到 x 轴上，被 x 轴反射，其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求光线 L 所在直线的方程.



分析 考虑作出已知圆关于 x 轴的对称图形——圆 C'，则两条入射光线均与圆 C' 相切，以此为突破口解决问题.

解 已知圆的标准方程是

$$(x-2)^2+(y-2)^2=1,$$

它关于 x 轴的对称圆的方程是

$$(x-2)^2+(y+2)^2=1, \qquad ①$$

设光线 L 所在直线的方程是

$y-3=k(x+3)$（其中斜率 k 待定）

由题设知对称圆的圆心 $C'(2,-2)$ 到这条直线的距离等于 1，即 $d=\dfrac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1.$

整理得，$12k^2+25k+12=0$，解得 $k=-\dfrac{3}{4}$，或 $k=-\dfrac{4}{3}$.

故所求的直线方程是 $y-3=-\dfrac{3}{4}(x+3)$，或 $y-3=-\dfrac{4}{3}(x+3)$，即 $3x+4y-3=0$，或 $4x+3y+3=0$.

9. (1986 年全国高考题) 如图 1，在平面直角坐标系中，在 y 轴的正半轴(坐标原点除外) 上给定两点 $A(0,a)$，$B(0,b)(0<b<a)$. 试在 x 轴的正半轴(坐标原点除外) 上求点 C，使 $\angle ACB$ 取得最大值.

分析 已知两个定点的坐标和一个动点 $C(x,0)$ 的坐标，要求锐角 $\angle ACB$ 的最大值，而 $\angle ACB$ 恰好是直线 BC 与 AC 的倾斜角的差，故先求出直线 BC 与 AC 的斜率，即求出直线 BC 与 AC 的倾斜角的正切值，利用三角函数的相关公式及不等式的性质求最值.

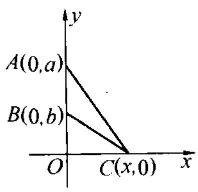


图 1

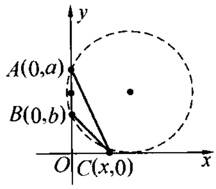


图 2

解　设所求点 C 的坐标为 $(x,0)(x>0)$，$\angle ACx=\alpha$，$\angle BCx=\beta$，α、$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

$$k_{BC}=\frac{b-0}{0-x}=-\frac{b}{x},$$

$$k_{AC}=\frac{a-0}{0-x}=-\frac{a}{x},$$

即　$\tan\alpha=-\frac{b}{x}$，$\tan\beta=-\frac{a}{x}$，

因为　$\angle ACB=\alpha-\beta$，

则 $\tan\angle ACB=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

设 $y=\tan\angle ACB$，

则
$$y=\frac{-\frac{b}{x}-\left(-\frac{a}{x}\right)}{1+\frac{b}{x}\cdot\frac{a}{x}}=\frac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}$$

$$=\frac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}\leqslant\frac{a-b}{2\sqrt{x\cdot\frac{ab}{x}}}=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(a-b)\sqrt{ab}}{2ab},$$

当且仅当 $x=\frac{ab}{x}$，

即 $x=\sqrt{ab}$ 时，$y_{\max}=\frac{(a-b)\sqrt{ab}}{2ab}$，

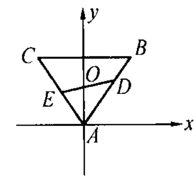
即 $\tan\angle ACB$ 的最大值为 $\frac{(a-b)\sqrt{ab}}{2ab}$.

因为 $\angle ACB$ 为锐角，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，$y=\tan x$ 是增函数，故 $\angle ACB$ 的最大值为 $\arctan\frac{(a-b)\sqrt{ab}}{2ab}$，此时 C 的坐标为 $(\sqrt{ab},0)$.

说明　本题是采用斜率来解决的，事实上本题也可以用平面几何知识来解决，如图 2，当经过 A、B 这两个定点的圆与 x 轴相切时，切点为 C'，此时 $\angle AC'B$ 最大(读者可以自行证明)，故当 C 在 C' 时 $\angle ACB$ 最大，利用切割线定理，得 $|OC|^2=ab$，同样可以得到 C 的坐标为 $(\sqrt{ab},0)$ 时，$\angle ACB$ 的最大值.

10. (1979 年天津市高中数学竞赛)已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，O 为其中心.

试问：过 O 点且两端落在 $\triangle ABC$ 边上的线段中，哪几条最长?哪几条最短?它们各有多长?证明你的结论.



解　如图，以 A 为原点建立直角坐标系 xAy，则直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，直线 AC 的方程为 $y=-\sqrt{3}x$，过 O 点的直线方程为 $y=kx+\frac{\sqrt{3}}{3}$. 不失一般性，我们可以考虑 $0\leqslant k\leqslant k_0$，其中 k_0 表示 OB 的斜率，于是得 D、E 的坐标分别为

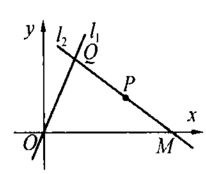
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-k)},\frac{1}{\sqrt{3}-k}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+k)},\frac{1}{\sqrt{3}+k}\right),$$

则
$$|DE|^2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-k}+\frac{1}{\sqrt{3}+k}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-k}-\frac{1}{\sqrt{3}+k}\right)^2$$

$$=\frac{4(1+k)^2}{(3-k^2)^2},$$

可见当 k 最小即 $k=0$ 时，DE 最短，此时 $DE\,/\!/\,BC$，且 $DE=\frac{2}{3}$；当 k 最大即 $k=k_0$ 时，DE 最长，此时 DE 过顶点 B，且 $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由图形的对称性，最长与最短的线段都各有三条.

11. (1978 年全国高中数学联赛)已知直线 l_1：$y=4x$ 和 $P(6,4)$. 在直线 l_1 上求一点 Q，使过 P、Q 的直线与 l_1，以及 x 轴，在第 Ⅰ 象限内围成的三角形的面积最小.



解　如图所示，设 Q 点坐标为 (x_1,y_1)，$y_1=4x_1$，则过 P、Q 的直线 l_2 的方程为 $\frac{y-4}{4x_1-4}=$

$\frac{x-6}{x_1-6}$，PQ 与 x 轴交点 M 坐标为 $\left(\frac{5x_1}{x_1-1},0\right)$.

$\triangle OMQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}\cdot 4x_1$，即 $10{x_1}^2-Sx_1+S=0$.

要使此方程有实根，则 $S^2-40S\geqslant 0$，即 $S\geqslant 40$.

当 $S=40$ 时，$x_1=2$，即 $x_1=2$ 时，S 达到最小.

故所求 Q 点坐标为 $(2,8)$.

说明　本题的关键在于转化为求 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}\cdot 4x_1$ 的最小值，对于求 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}\cdot 4x_1$ 的最小值的方法很多，如 $S=10(x_1-1)+\frac{10}{x_1-1}+20\geqslant 10\times 2+20=40(x_1>1)$.

12.（1997 年全国高考题）设圆满足：① 截 y 轴所得弦长为 2；② 被 x 轴分成两段圆弧，其弧长的比为 3∶1. 在满足条件①、②的所有圆中，求圆心到直线 l：$x-2y=0$ 的距离最小的圆的方程.

分析　要求圆心到直线的距离最小的圆的方程，必须先求出距离的最小值或求出何时距离最小，可以把本题先化成一个最值问题，解决之后再来求圆的方程.

解法一　设圆的圆心为 $P(a,b)$，半径为 r，则点 P 到 x 轴，y 轴距离分别为 $|b|$，$|a|$.

由题设知圆 P 截 x 轴所得劣弧对的圆心角为 $90°$，知圆 P 截 x 轴所得的弦长为 $\sqrt{2}r$，故

$$r^2=2b^2.$$

又圆 P 截 y 轴所得的弦长为 2，所以有

$$r^2=a^2+1.$$

从而得 $2b^2-a^2=1$.

又点 $P(a,b)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离为

$$d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}},$$

所以 $5d^2=|a-2b|^2=a^2+4b^2-4ab\geqslant a^2+4b^2-2(a^2+b^2)=2b^2-a^2=1$. 当且仅当 $a=b$ 时上式等号成立，此时 $5d^2=1$，从而 d 取得最小值.

由此有 $\begin{cases}a=b,\\2b^2-a^2=1.\end{cases}$

解此方程组得 $\begin{cases}a=1,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1.\end{cases}$

由于 $r^2=2b^2$，则 $r=\sqrt{2}$.

于是，所求圆的方程是 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

解法二　同解法一得 $d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$，所以，$a-2b=\pm\sqrt{5}d$，得

$$a^2=4b^2\pm 4\sqrt{5}bd+5d^2, \quad ①$$

将 $a^2=2b^2-1$ 代入 ① 式，整理得

$$2b^2\pm 4\sqrt{5}bd+5d^2+1=0 \quad ②$$

把它看作 b 的二次方程，由于方程有实根，故判别式非负，即 $\Delta=(\pm 4\sqrt{5}d)^2-4\times 2\times(5d^2+1)=8(5d^2-1)\geqslant 0$，解得 $5d^2\geqslant 1$.

所以 $5d^2$ 有最小值 1，从而 d 有最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

将其代入 ② 式得 $2b^2\pm 4b+2=0$，解得 $b=\pm 1$.

将 $b=\pm 1$ 代入 $r^2=2b^2$，$r^2=2$，由 $r^2=a^2+1$ 得 $a=\pm 1$.

综上 $a=\pm 1$，$b=\pm 1$，$r^2=2$，

由 $|a-2b|=1$ 知，a，b 同号，于是，所求圆的方程是 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

说明　在解题的过程中，要体会如何合理刻画最值.

13.（第五届美国普特南数学竞赛题）设已知三条直线 l_1：$mx-y+m=0$；l_2：$x+my-m(m+1)=0$；l_3：$(m+1)x-y+(m+1)=0$，它们围成 $\triangle ABC$.

（1）求证：不论 m 为何值，$\triangle ABC$ 有一个顶点为定点；

（2）当 m 为何值时，$\triangle ABC$ 的面积有最大值、最小值？

(1) **证明** 直线 l_1 的方程可写成 $(x+1)m-y=0$,故直线 l_1 恒过点 $C(-1,0)$.

同样,直线 l_3 的方程可写成 $(x+1)m+x-y+1=0$,故直线 l_3 恒过点 $C(-1,0)$,即直线 l_1、l_3 交于定点 $(-1,0)$,由此可见 $\triangle ABC$ 的顶点 C 为定点.

(2) **解** 注意到 $l_1\perp l_2$,即 $AB\perp AC$,则 $\triangle ABC$ 为直角三角形,

用点到直线的距离公式求出点 C 到直线 AB 的距离为 $d_1=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$,求出 B 到 AC 的距离 $d_3=\dfrac{|m^2+m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$.

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m^2+m+1|}{m^2+1}\\&=\frac{1}{2}\left|1+\frac{1}{m+\frac{1}{m}}\right|.\end{aligned}$$

当 $m>0$ 时,$m+\dfrac{1}{m}\geqslant 2$,等号在 $m=1$ 时成立,S 有最大值 $\dfrac{3}{4}$;

当 $m<0$ 时,$m+\dfrac{1}{m}\leqslant -2$,等号在 $m=-1$ 时成立,S 有最小值 $\dfrac{1}{4}$.

说明 我们可以用下面的方法:直线 l_1、l_2 的交点坐标为 $\left(\dfrac{m}{m^2+1},\dfrac{m(m^2+m+1)}{m^2+1}\right)$,直线 l_2、l_3 的交点坐标为 $(0,m+1)$,直线 l_1、l_3 的交点坐标为 $(-1,0)$. 故 $\triangle ABC$ 的顶点 C 为定点 $(-1,0)$. $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{m^2+m+1}{m^2+1}$. 以下同例题中的解法.

14. (福州市高中数学竞赛题)已知:正数 m 取不同的数值时,方程 $x^2+y^2-(4m+2)x-2my+4m^2+4m+1=0$ 表示不同的圆. 求这些圆的公切线的方程.

解 化圆方程为

$$(x-2m-1)^2+(y-m)^2=m^2.$$

故圆心坐标为 $(2m+1,m)$,半径为 m.

若直线 $y=kx+b$ 是这些圆的公切线,则必须而且只需对于一切正数 m 恒有 $\dfrac{|k(2m+1)-m+b|}{\sqrt{k^2+1}}=m$,两边平方并整理得 $(3k^2-4k)m^2+2(k+b)(2k-1)m+(k+b)^2=0$.

从而 $\begin{cases}3k^2-4k=0,\\2(k+b)(2k-1)=0,\\(k+b)^2=0.\end{cases}$

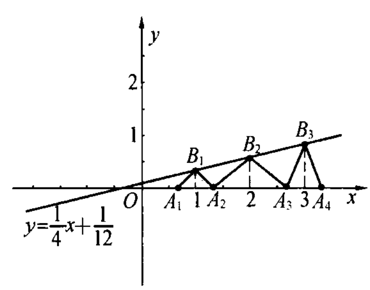
解得 $\begin{cases}k_1=0,\\b_1=0.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k_2=\dfrac{4}{3},\\b_2=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

故这些圆有两条公切线,其方程分别为 $y=0$ 或 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$.

15. 设点 $B_i(i,y_i)(i\in\mathbf{N}^*)$ 是直线 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{12}$ 上的点. 点 $A_i(x_i,0)$ 满足 $x_1=a(0<a<1)$,$\triangle A_iB_iA_{i+1}$ 是以 B_i 为顶点的等腰三角形.

(1) 试求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(2) 是否存在正数 a,使存在正整数 i,$\triangle A_iB_iA_{i+1}$ 为直角三角形.



解 (1) 满足 $x_1=a$,$x_{i+1}=2i-x_i(i=1,2,\cdots)$.

下标加 1:$x_{i+2}=2(i+1)-x_{i+1}$,相减得 $x_{i+2}-x_{i+1}=x_i-x_{i+1}+2$,即 $x_{i+2}=x_i+2$.

则数列 $x_1,x_3,\cdots,x_{2k-1}\cdots$,与数列 $x_2,x_4,\cdots,x_{2k},\cdots$ 分别为以 2 为公差的等差数列.

$\therefore x_{2k-1}=a+2(k-1)=2k+a-2$;

$x_{2k}=2-a+2(k-1)=2k-a$.

$\therefore x_n = \begin{cases} n+a-1, (n \text{为奇数}) \\ n-a, (n \text{为偶数}) \end{cases}$

也可写为

$$x_n = n + (-1)^{n+1}a - \frac{1}{2}[1 + (-1)^{n+1}].$$

(2) $y_n = \frac{1}{4}n + \frac{1}{12}$.

当 n 为奇数时，取

$\frac{1}{4}n + \frac{1}{12} = n - (n + a - 1) = 1 - a$.

$\therefore a = \frac{11}{12} - \frac{1}{4}n$.

当 $n = 1$ 时，$a = \frac{2}{3}$，$n = 3$ 时，$a = \frac{1}{6}$.

当 n 为偶数时，取

$$\frac{1}{4}n + \frac{1}{12} = n - (n - a) = a.$$

$\therefore a = \frac{1}{4}n + \frac{1}{12}$，当 $n = 2$，$a = \frac{7}{12}$.

$\therefore$ 当 $a = \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}$ 时，分别存在 $i = 1,2,3$，使 $\triangle A_iB_iA_{i+1}$ 为直角三角形.

16. 求经过两直线 $2x-3y=1$，$3x+2y=2$ 的交点，且平行于直线 $y+3x=0$ 的直线方程.

解　设所求的直线方程为

$$(2x-3y-1)+\lambda(3x+2y-2)=0,$$

整理得

$$(2+3\lambda)x+(-3+2\lambda)y+(-1-2\lambda)=0. \quad ①$$

由于已知直线 $y+3x=0$ 的斜率为 -3，所以 $-\frac{2+3\lambda}{-3+2\lambda} = -3$.

解得　$\lambda = \frac{11}{3}$.

将 $\lambda = \frac{11}{3}$ 代入 ① 化简得 $39x + 13y - 25 = 0$.

此即为所求的直线方程.

说明　本题还可以采用以下两种思路来求直线方程：

思路一：设所求的直线方程为 $y+3x+\lambda=0$. 解出直线 $2x-3y=1$，$3x+2y=2$ 的交点，代入到 $y+3x+\lambda=0$，解出 λ 即可.

思路二：过直线 $2x-3y=1$，$3x+2y=2$ 的交点的直线系为 $(2x-3y-1)+\lambda(3x+2y-2)=0$，即 $(2+3\lambda)x+(-3+2\lambda)y+(-1-2\lambda)=0$. 与直线 $y+3x=0$ 平行的直线系为 $y+3x+\mu=0(\mu\neq 0)$. 比较系数 $\frac{2+3\lambda}{3} = \frac{-3+2\lambda}{1} = \frac{-1-2\lambda}{\mu}$，解出 μ 即可.

17. 已知平面上两个同心圆的半径分别为 R 和 $r(R>r)$. 设 P 是小圆周上的一个定点，B 是大圆周上的动点，直线 BP 与大圆相交于另一点 C，通过点 P 且与 BP 垂直的直线 l 与小圆周相交于另一点 A(如 l 与小圆周相切于 P，则 $A=P$).

(1) 求表达式 $BC^2+CA^2+AB^2$ 所取值的集合；

(2) 求线段 AB 的中点的轨迹.

解　(1) 以圆心 O 为原点建立直角坐标系，并使 P 点在 x 轴负半轴上，则 $P(-r,0)$. 两圆方程为 $x^2+y^2=R^2$，$x^2+y^2=r^2$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则 $BC^2+CA^2+AB^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4R^2+2r^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)$.

由于 $PA\perp PB$，故有 $(x_1+r)(x_2+r)+y_1y_2=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=-r(x_1+x_2)-r^2$，所以 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1$
$=-r(x_1+x_2)-r^2+x_3(x_1+x_2)+y_3(y_1+y_2)$
$=-(x_1+x_2)(r-x_3)+y_3(y_1+y_2)-r^2$　①

设 BC 与小圆的另一个交点为 A'，因为 $PA\perp PB$，故 $A'(-x_1,-y_1)$. 由同一圆的性质知线段 BC 与 $A'P$ 有相同的中点，所以

$$\begin{cases} x_1+x_2=-r-x_3, \\ y_1+y_2=-y_3. \end{cases} \quad ②$$

② 代入 ①，得 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=-(-r-x_3)(r-x_3)+y_3(-y_3)-r^2=r^2-x_3^{\ 2}-y_3^{\ 2}-r^2=-R^2$. 所以，$BC^2+CA^2+AB^2=6R^2+2r^2$.

（2）设 AB 的中点为 (x,y)，由②知，

$$\begin{cases}x_3=-r-(x_1+x_2)=-r-2x,\\ y_3=-(y_1+y_2)=-2y.\end{cases}$$

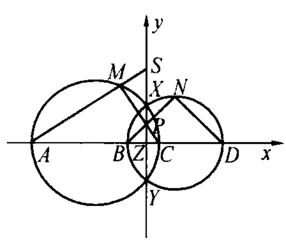
代入 $x_3^{\ 2}+y_3^{\ 2}=R^2$，得 AB 中点的轨迹为 $\left(x+\frac{r}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$，这是一个以点 $\left(-\frac{r}{2},0\right)$ 为圆心，$\frac{R}{2}$ 为半径的圆.

18. 设 A、B、C、D 是一条直线上依次排列的四个不同的点，分别以 AC、BD 为直径的两圆相交于 X 和 Y，直线 XY 交 BC 于 Z. 若 P 为直线 XY 上异于 Z 的一点，直线 CP 与以 AC 为直径的圆相交于 C 和 M，直线 BP 与以 BD 为直径的圆相交于 B 和 N.

试证：AM、DN、XY 三线共点.

分析 只要证明 AM 与 XY 的交点也是 DN 与 XY 的交点即可，为此只要建立坐标系，计算 AM 与 XY 的交点坐标.

证明 如图，以 XY 为弦的任意圆 O，只需证明当 P 确定时，S 也确定.



以 Z 为原点，XY 为 y 轴建立平面直角坐标系，设 $X(0,m)$，$P(0,y_0)$，$\angle PCA=\alpha$，其中 m、y_0 为定值.

于是有 $x_C=y_0\cot\alpha$.

但是 $-x_A\cdot x_C=y_X^{\ 2}$，则 $x_A=-\frac{m^2}{y_0}\tan\alpha$.

因此，直线 AM 的方程为：

$$y=\cot\alpha\left(x+\frac{m^2}{y_0}\tan\alpha\right).$$

令 $x=0$，得 $y_S=\frac{m^2}{y_0}$，即点 S 的坐标为 $\left(0,\frac{m^2}{y_0}\right)$.

同理，可得 DN 与 XY 的交点坐标为 $\left(0,\frac{m^2}{y_0}\right)$.

所以 AM、DN、XY 三线共点.

19. 证明：在坐标平面上不存在一条具有奇数个顶点，每段长度都等于 1 的闭折线，其每个顶点的坐标都是有理数.

证明 设存在这样的闭折线，不失一般性，设其一个顶点为 $A_0(0,0)$，其余顶点为 $A_i\left(\frac{a_i}{b_i},\frac{c_i}{d_i}\right)(i=1,2,\cdots,n$. 且 $\frac{a_i}{b_i}$、$\frac{c_i}{d_i}$ 均为既约分数）并记 $A_{n+1}=A_0$. 又记 p、q 同奇偶为 $p\equiv q$，不同奇偶为 $p\not\equiv q$. 由 $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2+\left(\frac{c_1}{d_1}\right)^2=1$，知 $\left(\frac{a_1d_1}{b_1}\right)^2=d_1^{\ 2}-c_1^{\ 2}$. 但 $(a_1,b_1)=1$，故 $b_1\mid d_1$，同理，$d_1\mid b_1$，于是 $b_1=\pm d_1$. 则 $b_1^{\ 2}=d_1^{\ 2}=a_1^{\ 2}+c_1^{\ 2}$. 故 a_1，c_1 必一奇一偶，且 b_1、d_1 为奇数，从而 a_1+c_1 与 a_0+c_0 奇偶性不同.

下面用数学归纳法证明每个 b_i、d_i 为奇数，$a_{i+1}+c_{i+1}$ 与 a_i+c_i 的奇偶性不同. 设命题对于 $\leqslant m-1$ 的正整数已证. 则 $\frac{a_m}{b_m}-\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}=\frac{a}{b}$，$\frac{c_m}{d_m}-\frac{c_{m-1}}{d_{m-1}}=\frac{c}{d}$. 由 $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{d}\right)^2=1$，知 a，c 必一奇一偶，$b=\pm d$ 且为奇数. 由 $\frac{a_m}{b_m}=\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}+\frac{a}{b}=\frac{ab_{m-1}+ba_{m-1}}{bb_{m-1}}$. 若 $\frac{a_m}{b_m}$ 是既约分数，则 b_m 是 bb_{m-1} 的约数，但 bb_{m-1} 为奇数，故 b_m 为奇数. 同理，d_m 为奇数. 所以 a_m 与 $ab_{m-1}+ba_{m-1}$ 奇偶性相同，同样，c_m 与 $cd_{m-1}+dc_{m-1}$ 奇偶性相同. 由于 $a_m+c_m\equiv ab_{m-1}+ba_{m-1}+cd_{m-1}+dc_{m-1}\equiv a+a_{m-1}+c+c_{m-1}$，由 $a+c\equiv 1$ 知 $a_m+c_m\not\equiv a_{m-1}+c_{m-1}$. 当 $n+1$ 为奇数时，应有 $a_{n+1}+b_{n+1}\not\equiv a_0+b_0$，与 $A_{n+1}=A_0$ 矛盾. 从而得证.

20.（IMO—30 预选题）S 为直线 l_1：$7x+5y+8=0$ 和 l_2：$3x+4y-13=0$ 的交点，点 $P(3,7)$，$Q(11,13)$ 所成的直线 PQ 上有两点 A、B，其中 P 在 A、Q 之间，B 在 P、Q 之间，并且 $\frac{PA}{AQ}=\frac{PB}{BQ}=\frac{2}{3}$. 不求 S 的坐标，试求出直线 SA 与 SB 的方程.

解 由题意知，SA 的方程为：

$$(7x+5y+8)+\lambda(3x+4y-13)=0,\quad ①$$

SB 的方程为：

$$(7x+5y+8)+\mu(3x+4y-13)=0, \quad ②$$

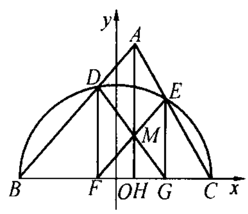
由 $\dfrac{PA}{AQ}=\dfrac{PB}{BQ}=\dfrac{2}{3}$ 及分点公式，得 A、B 的坐标分别为 $A(-13,-5)$，$B\left(\dfrac{31}{5},\dfrac{47}{5}\right)$.

它们分别适合 ①、②，代入后求得

$$\lambda=-\frac{29}{36}, \mu=-\frac{11}{108}.$$

因此，所求的直线 SA、SB 的方程分别为：SA 的方程 $165x-296y+665=0$；SB 的方程 $723x-584y+1007=0$.

21.（1996 年国家队选拔题）以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为直径作半圆，与 AB、AC 分别交于 D 和 E. 过 D、E 作 BC 的垂线，垂足分别为 F、G. 线段 DG、EF 交于点 M. 求证：$AM\perp BC$.



分析　建立以 BC 为 x 轴的坐标系，则只要证明点 A、M 的横坐标相等即可.

证明　以 BC 所在的直线为 x 轴，半圆圆心 O 为原点建立直角坐标系. 设圆的半径为 1，则 $B(-1,0)$，$C(1,0)$.

令 $\angle EBC=\alpha$，$\angle DCB=\beta$，则直线 BD 的方程为 $y=\cot\beta\cdot(x+1)$.

同样，直线 CE 的方程为 $y=-\cot\alpha\cdot(x-1)$，联立这两个方程，解得 A 点的横坐标

$$x_A=\frac{\cot\alpha-\cot\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

因为 $\angle EOC=2\angle EBC=2\alpha$，$\angle DOB=2\beta$，

故 $E(\cos2\alpha,\sin2\alpha)$，$D(-\cos2\beta,\sin2\beta)$，$G(\cos2\alpha,0)$，$F(-\cos2\beta,0)$.

于是直线 DG 的方程为

$$y=\frac{\sin2\beta}{-(\cos2\alpha+\cos2\beta)}\cdot(x-\cos2\alpha),$$

直线 EF 的方程为

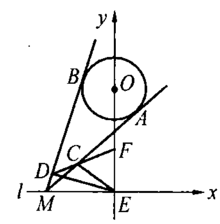
$$y=\frac{\sin2\alpha}{-(\cos2\alpha+\cos2\beta)}\cdot(x+\cos2\beta).$$

联立这两个方程，解得 M 点的横坐标

$$\begin{aligned}x_M&=\frac{\sin2\alpha\cdot\cos2\beta-\cos2\alpha\cdot\sin2\beta}{\sin2\alpha+\sin2\beta}\\&=\frac{\sin2(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}\\&=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=x_A.\end{aligned}$$

故 $AM\perp BC$.

22.（1994 年 IMO 预选题）如图，一条直线 l 与圆心为 O 的圆不相交，E 是 l 上一点，$OE\perp l$，M 是 l 上任意异于 E 的点，从 M 作圆 O 的两条切线分别切圆于 A 和 B，C 是 MA 上的点，使得 $EC\perp MA$，D 是 MB 上的点，使得 $ED\perp MB$，直线 CD 交 OE 于 F. 求证：点 F 的位置不依赖于 M 的位置.



分析　若以 l 为 x 轴，OE 为 y 轴建立坐标系，则只要证明 F 点的纵坐标与点 M 的坐标无关即可.

证明　建立如图所示的平面直角坐标系，设圆 O 的半径为 r，$OE=a$，$\angle OME=\alpha$，$\angle OMA=\theta$，显然有 $\dfrac{\sin\theta}{\sin\alpha}=\dfrac{r}{a}$.

$$\begin{aligned}y_C&=MC\cdot\sin(\alpha-\theta)\\&=ME\cdot\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)\\&=a\cot\alpha\cdot\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_C&=-y_C\cdot\tan(\alpha-\theta)\\&=-a\cot\alpha\sin^2(\alpha-\theta).\end{aligned}$$

同理，$y_D=a\cot\alpha\cdot\sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha+\theta)$，$x_D=-a\cot\alpha\sin^2(\alpha+\theta)$.

所以，
$$\begin{aligned}k_{CD}&=\frac{\sin2(\alpha+\theta)-\sin2(\alpha-\theta)}{2[\sin^2(\alpha-\theta)-\sin^2(\alpha+\theta)]}\\&=-\cot2\alpha.\end{aligned}$$

则直线 CD 的方程为 $y-a\cot\alpha\cdot\sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha+\theta)=-\cot2\alpha[x+a\cot\alpha\sin^2(\alpha+\theta)]$.

令 $x=0$，得

$$\begin{aligned}y_F=a\cot\alpha\cdot\sin(\alpha+\theta)[&\cos(\alpha+\theta)\\&-\cot2\alpha\sin(\alpha+\theta)]\end{aligned}$$

$$= \frac{a\cot\alpha \cdot \sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)}{\sin 2\alpha}$$
$$= a \cdot \frac{-\cos 2\alpha + \cos 2\theta}{4\sin^2\theta}$$
$$= \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\alpha}\right)$$
$$= \frac{a^2 - r^2}{2a}.$$

由于$\frac{a^2-r^2}{2a}$是定值,这就表明F的位置不依赖于点M的位置.

23. (1988年全国高中数学联赛)在坐标平面上,是否存在一个含有无穷多直线l_1,l_2,…,l_n,…的直线族,它满足条件:

(1) 点$(1,1) \in l_n$,$(n=1,2,3,\cdots)$;

(2) $k_{n+1}=a_n-b_n$,其中k_{n+1}是l_{n+1}的斜率,a_n和b_n分别是l_n在x轴和y轴上的截距,$(n=1,2,3,\cdots)$;

(3) $k_nk_{n+1} \geqslant 0$,$(n=1,2,3,\cdots)$.

并证明你的结论.

证明 设$a_n=b_n \neq 0$,即$k_{n-1}=-1$,或$a_n=b_n=0$,即$k_n=1$,就有$k_{n+1}=0$,

此时a_{n+1}不存在,故$k_n \neq \pm 1$.

现设$k_n \neq 0,1$,则$y=k_n(x-1)+1$,得

$b_n=1-k_n, a_n=1-\frac{1}{k_n}$,

$\therefore k_{n+1}=k_n-\frac{1}{k_n}$. 此时$k_nk_{n+1}={k_n}^2-1$.

$\therefore k_n>1$或$k_n<-1$. 从而$k_1>1$或$k_1<-1$.

(1) 当$k_1>1$时,由于$0<\frac{1}{k_1}<1$,故$k_1>k_2=k_1-\frac{1}{k_1}>0$,若$k_2>1$,则又有$k_1>k_2>k_3>0$,依此类推,知当$k_m>1$时,有$k_1>k_2>k_3>\cdots>k_m>k_{m+1}>0$,且$0<\frac{1}{k_1}<\frac{1}{k_2}<\cdots<\frac{1}{k_m}<1$,$k_{m+1}=k_m-\frac{1}{k_m}<k_m-\frac{1}{k_1}=k_{m-1}-\frac{1}{k_{m-1}}-\frac{1}{k_1}<k_{m-1}-\frac{2}{k_1}<\cdots<k_1-\frac{m}{k_1}$.

由于$k_1-\frac{m}{k_1}$随m的增大而线性减小,故必存在一个m值,$m=m_0$,使$k_1-\frac{m_0}{k_1}\leqslant 1$,从而必存在一个$m$值$m=m_1\leqslant m_0$,使$k_{m_1-1}\geqslant 1$,而$1>k_{m_1}=k_{m_1-1}-\frac{1}{k_{m_1-1}}>0$,此时$k_{m_1}\cdot k_{m_1+1}<0$.

即此时不存在这样的直线族.

(2) 当$k_1<-1$时,同样有$-1<\frac{1}{k_1}<0$,得$k_1<k_2=k_1-\frac{1}{k_1}<0$.

若$k_2<-1$,又有$k_1<k_2<k_3<0$,依此类推,知当$k_m<-1$时,有$k_1<k_2<k_3<\cdots<k_m<k_{m+1}<0$,且$0>\frac{1}{k_1}>\frac{1}{k_2}>\cdots>\frac{1}{k_m}>-1$,$k_{m+1}=k_m-\frac{1}{k_m}>k_m-\frac{1}{k_1}=k_{m-1}-\frac{1}{k_{m-1}}-\frac{1}{k_1}>k_{m-1}-\frac{2}{k_1}>\cdots>k_1-\frac{m}{k_1}$.

由于$k_1-\frac{m}{k_1}$随m的增大而线性增大,故必存在一个m值,$m=m_0$,使$k_1-\frac{m_0}{k_1}\geqslant -1$,从而必存在一个$m$值,$m=m_1(m_1\leqslant m_0)$,使$k_{m_1-1}\leqslant -1$,而$-1<k_{m_1}=k_{m_1-1}-\frac{1}{k_{m_1-1}}<0$,此时$k_{m_1}\cdot k_{m_1+1}<0$.

即此时不存在这样的直线族.

综上可知这样的直线族不存在.

说明 本题也可以这样解:由$k_n\cdot k_{n+1}>0$知,k_n的符号相同,当$k_n>0$时,数列$\{k_n\}$单调递减而有下界0,当$k_n<0$时,数列$\{k_n\}$单调递增而有上界0,所以当$n\to\infty$时,k_n有极限,不妨设为k,于是$\lim\limits_{n\to\infty}k_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(k_n-\frac{1}{k_n}\right)$,即$k=k-\frac{1}{k}$,则$-\frac{1}{k}=0$,不可能.

故满足条件的直线族不存在.

24. 设有直线l及l同旁的两点P、Q,求平面上一点R,使$RS\perp l$于点S,且$|RP|+|RQ|+|RS|$取最小值.

解 以l为x轴,使P在y轴上,Q在第一象限,建立坐标系.

设$P(0,a)$,$Q(c,d)$,$R(x,y)$,$y\geqslant 0$,$\delta(x,y)=$