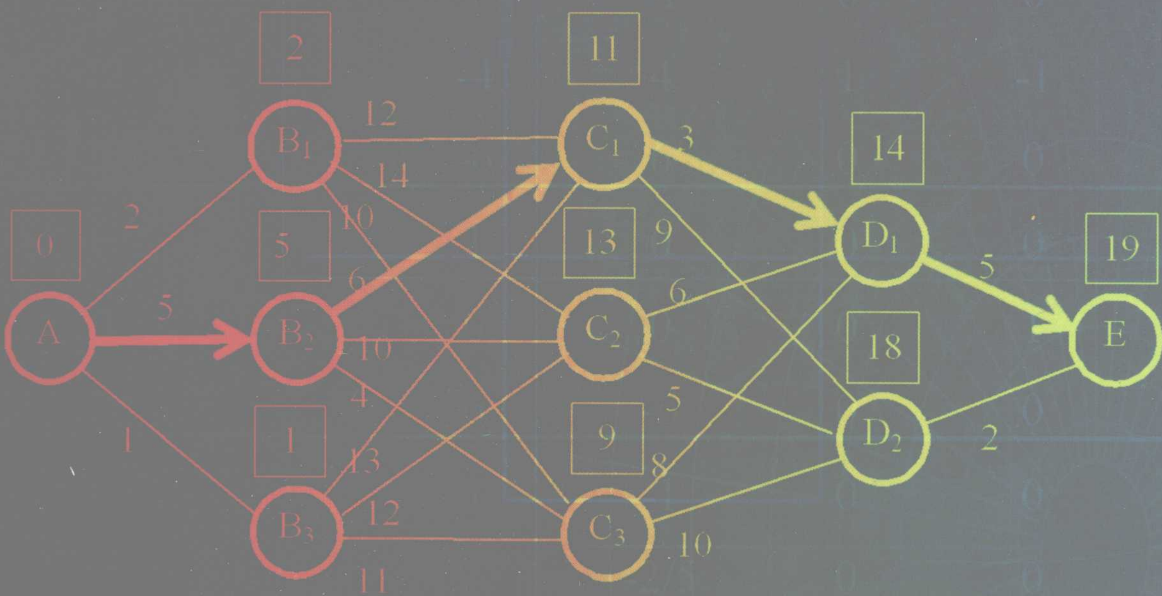
新世纪工商管理系列教材

# 运筹学基础教程

OPERATIONS RESEARCH

姚　远　宋振明　主编



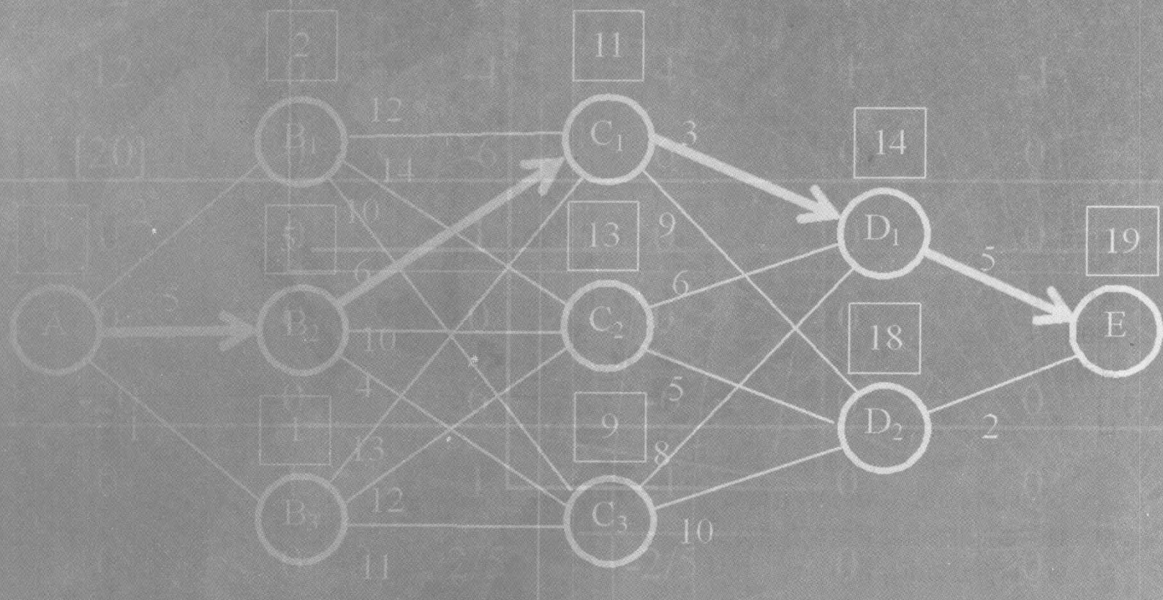

河南大学出版社

新世纪工商管理系列教材

# 运筹学基础教程

## OPERATIONS RESEARCH

主编 姚 远 宋振明




河南大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

运筹学基础教程/姚远,宋振明主编. —开封:河南大学出版社,2008.12
ISBN 978-7-81091-907-4

Ⅰ.运… Ⅱ.①姚…②宋… Ⅲ.运筹学—教材 Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 180581 号

**责任编辑** 赵海霞
**责任校对** 王亚辉
**封面设计** 王四朋

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **出　版** | 河南大学出版社 | | | |
| | 地址:河南省开封市明伦街 85 号 | | 邮编:475001 | |
| | 电话:0378－2825001(营销部) | | 网址:www. hupress. com | |
| **排　版** | 郑州市今日文教印制有限公司 | | | |
| **印　刷** | 河南郑印印务有限公司 | | | |
| **版　次** | 2009 年 1 月第 1 版 | **印　次** | 2009 年 1 月第 1 次印刷 | |
| **开　本** | 787mm×1092mm　1/16 | **印　张** | 18.75 | |
| **字　数** | 445 千字 | **印　数** | 1－2000 册 | |
| **定　价** | 29.00 元 | | | |

(本书如有印装质量问题,请与河南大学出版社营销部联系调换)

# 前　言

运筹学是第二次世界大战后发展起来的一门新兴学科，是一门研究如何有效地组织和管理人机系统的科学。由于它同管理科学的紧密联系，研究解决实际问题时的系统优化思想以及从提出问题、分析建模、求解到方案实施的一整套严密科学方法，使它在培养提高管理人才的素质上起到重要作用。运筹学现已成为经济管理类专业普遍开设的一门重要专业基础课。

如今运筹学的研究大致在三个领域发展：运筹学应用，运筹科学，运筹数学。运筹学强调多学科的交叉联系和解决实际问题的研究。作者长期从事运筹学教学（包括大学本科生、研究生）和科研工作，使用过多种版本的运筹学教材，在编写本书时，一方面注意到吸收其他教材的优点，另一方面也考虑到学科发展和从事科研工作的需要。

为便于读者学习和适应教师教学的需要，作者在编写该书时特别注意以下几点：(1)强调基本概念和基本理论；(2)先说明问题背景，再进行抽象，以便于理解数学模型；(3)注意理论联系实际，使广大读者能够学以致用；(4)叙述层次分明，深入浅出，便于学习。

本书由姚远、宋振明主编，各章的执笔如下：第二章、第三章、第五章：姚远（河南大学工商管理学院）；第一章：宋振明（西南交通大学理学院）；其他章节由祝晓路（河南大学工商管理学院）、姚莉（河南大学计算机与信息工程学院）、张宏霞（沈阳化工学院）、魏四明（河南大学软件学院）、樊小勇（河南大学教务处）共同编写。全书由姚远、宋振明统编、修改、定稿。

鉴于编者水平有限，书中难免有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正。

本书受到河南大学教材建设基金的资助。

编　者

2008 年 8 月

# 目 录

# 第一章　绪　　论

## §1.1　运筹学的起源

运筹学的朴素思想可以追溯到很久以前，但形成一门科学，一般认为开始于第二次世界大战，诞生于英国.

二战时，英国陆军遭到很大挫折，又受到德国空军和海军的封锁，形势十分危急，如何转变战争局势，成为当时亟待解决的严重问题. 在 20 世纪 30 年代末期虽然已研制成功了雷达和新式作战武器，但由于没有实际使用经验，在当时资源十分缺乏的情况下，难于正确评估和迅速提高这些武器的使用效率. 为了动员各方面的力量，首先是发挥科学家的聪明才智，英国国防部在 1940 年成立了一个专门小组 Operational Research Group（简称 O. R. 小组）进行作战研究，该小组有四位物理学家、两位数学家、三位生物学家、一位测量员和一位军官，由著名的物理学家布莱柯特（P. M. S. Blackett）领导. 这个小组研究了一些与作战和武器运用相关的问题，并取得了显著效果. 反潜艇战是当时着重研究的一个问题. 潜艇可怕的主要原因是它潜入水中，使对方不易察觉，因而反潜艇应首先注意搜索，著名数学家库普曼（B. O. Koopmans）起了很大作用，这一研究后来发展成为搜索论. 搜索到潜艇的目的是打沉它，原来用飞机投普通炸弹，破坏力不大，后改用深水炸弹，在水下爆炸，问题在于在水下多深处爆炸好？著名物理学家肖克莱（Shockley）经科学的定量分析，发现在 25 英尺深处爆炸能使袭击成功的几率增加三倍. 这样一来就做出了以下决策：在潜艇刚开始下沉的时候投弹攻击，起爆点为水下 25 英尺. 由于采用了这种方法使德国潜艇被摧毁的次数增加到四倍. 飞机侦察潜艇的活动，潜艇就设法避开侦察. 一方采用某种策略，对方就设法找出反措施，即制定对策. 战争中的双方和其他很多敌对行动都属于这种对策，二次世界大战中提出了很多类似问题. 商船编队和舰队护航也是当时研究的问题之一. 经过分析，确定了每批商船的适宜数目，提出了在受到敌机攻击时大船急转向和小船缓转向的逃避方针，使船只的中弹数由 47%减少到 29%.

由于英国运筹学小组工作的成功，其他国家也成立了类似的小组，美国 1942 年成立了 Operations Research Group. 他们在战时使用的方法虽然比较粗浅，但是收效很大.

二战后，O. R. 小组的很多人都回到了原先工作的岗位，这时，时间和精力允许他们将战时提出的很多方法进一步科学化、条理化，以用于经济和社会发展的非军事目的. 1948 年英国成立“运筹学俱乐部”，在煤炭、电力等部门推广应用运筹学取得的一些进展. 1948 年美国麻省理工学院把运筹学作为一门课程介绍，1952 年美国 Case 工业大学设立了运

筹学的硕士和博士学位.第一本运筹学杂志《运筹学季刊》(O. R. Quarterly)1950 年在英国创刊,第一个运筹学会美国运筹学会于 1952 年成立,并于同年出版运筹学杂志(Journal of ORSA). 1947 年丹泽格(G. B. Danzig)在研究美国空军资源优化配置时提出了线性规划及其通用解法——单纯形法.这些都标志着运筹学这门学科基本形成.

60 年代后运筹学开始普及和迅速发展,随着计算机的发展,运筹学处理的系统有小变大,应用范围不断扩大,在理论上也获得了很大的发展,形成了运筹学完整的学科体系.

在我国古代文献中就有不少朴素的运筹学思想,如田忌赛马和丁渭修宫.真正把运筹学引入我国的是著名学者钱学森、许国志教授,他们于 50 年代中期将运筹学引入我国,接着吸引了以华罗庚为首的一大批数学家,大大促进了这一学科在我国的发展. 1957 年我国从"夫运筹帷幄之中,决胜千里之外"(《史记·高祖本纪》)这句古话摘取"运筹"二字,将 Operations Research 正式译为运筹学,具有做好运用、决策、规划的含义.我国第一个运筹学小组于 1956 年在中国科学院成立,1958 年建立了运筹学研究室,1960 年在山东济南召开了全国应用运筹学的经验交流和推广会议,1962 年和 1978 年先后在北京和成都召开了全国运筹学专业学术会议,1980 年 4 月成立中国运筹学学会,在农林、交通运输、建筑、机械、冶金、石油化工、水利、邮电、纺织等部门,运筹学的方法已开始得到应用推广.

## §1.2 运筹学的主要内容

什么是运筹学至今没有公认的确切定义,原因是从事运筹学研究的人来自不同的学科,大家的看法不完全一致.英国运筹学会认为是"运用科学方法来解决工业、商业、政府、国防等部门里有关人力、机器、物资、金钱等大型系统的指挥或管理中所出现的复杂问题的一门学科";钱学森认为是"由一支综合性的队伍,采用科学的方法,为一些涉及到有机系统(人一机)的控制问题提供解答,为该系统的总目标服务的学科";还有人认为"运筹学是一门应用科学,它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者选择最优决策提供定量依据".

运筹学包含的内容很多,一般认为它有以下分支:线性规划、整数规划、动态规划、图与网络分析、排队论、存贮论、对策论、决策论、决策分析、多目标规划、启发式方法等,根据实际问题的不同性质,可选用不同分支给出的方法加以解决.

1. **线性规划**(Linear Programming)

线性规划是指经营管理中如何有效地利用现有人力、物力完成更多的任务,或在预订的任务目标下,如何耗用最少的人力、物力去实现目标.这类统筹规划的问题用数学语言表达,先根据问题要达到的目标选取适当的变量,问题的目标通过用变量的函数形式表示(称为目标函数),对问题的限制条件用有关变量的等式或不等式表达(称为约束条件).当变量连续取值,且目标函数和约束条件均为线性时,称这类模型为线性规划模型.有关对线性规划问题建模、求解和应用的研究构成了运筹学中的线性规划分支.线性规划建模相对简单,有通用算法和计算机软件,是运筹学中应用最为广泛的一个分支.用线性规划求

解的典型问题有运输问题、生产计划问题、下料问题、混合配料问题等. 有些规划问题的目标函数是非线性的，但往往可以采用分段线性化等手法，转化为线性规划问题.

2. **动态规划**(Dynamic Programming)

动态规划是研究多阶段决策过程最优化的运筹学分支. 有些经营管理活动由一系列相互关联的阶段组成，在每个阶段依次进行决策，而且上一阶段的输出状态就是下一阶段的输入状态，各阶段决策之间互相关联，因而构成一个多阶段的决策过程. 动态规划研究多阶段决策过程的总体优化，即从系统总体出发，要求各阶段决策所构成的决策序列使目标函数值达到最优.

3. **图与网络分析**(Graph Theory and Network Analysis)

生产管理中经常碰到工序间的合理衔接搭配问题，设计中经常碰到研究各种管道、线路的通过能力以及仓库、附属设施的布局等问题，运筹学中把一些研究的对象用节点表示，对象之间的联系用连线(边)表示，用点、边的集合构成图. 图论是研究由节点和边所组成图形的数学理论和方法. 图是网络分析的基础，根据研究的具体网络对象(如铁路网、电力网、通信网等)，赋予图中各边某个具体的参数，如时间、流量、费用、距离等，规定图中各节点代表具体网络中任何一种流动的起点、中转点或终点，然后利用图论方法来研究各类网络结构和流量的优化问题. 网络分析还包括利用网络图形来描述一项工程中各项作业的进度和结构关系，以便对工程进度进行优化控制.

4. **存贮论**(Inventory Theory)

存贮论是一种研究最优存贮策略的理论和方法. 如为了保证企业生产的正常进行，需要有一定数量原材料和零部件的储备，以调节供需之间的不平衡. 实际问题中，需求量可以是常数，也可以是服从某一分布的随机变量. 每次订货需一定费用，提出订货后，货物可以一次到达，也可以分批到达. 从提出订货到货物的到达可能是即时的，也可能需要一个周期(订货提前期). 某些情况下允许缺货，某些情况下不允许缺货. 存贮策略研究在不同需求、供货及到达方式等情况下，确定在什么时间点及一次提出多大批量的订货，使用于订购、贮存和可能发生短缺的费用的总和为最少.

5. **排队论**(Queuing Theory)

生产和生活中存在大量有形和无形的排队现象. 排队系统由服务机构(服务员)及被服务的对象(顾客)组成. 一般顾客的到达及服务员用于对每名顾客的服务时间是随机的，服务员可以是一个或多个，多个情况下又分平行或串联排列. 排队按一定规则进行，如分为等待制、损失制、混合制等. 排队论研究顾客不同输入、各类服务时间的分布、不同服务员数及不同排队规则情况下，排队系统的工作性能和状态，为设计新的排队系统及改进现有系统的性能提供数量依据.

6. **对策论**(Game Theory)

对策论用于研究具有对抗局势的模型. 在这类模型中，参与对抗的各方称为局中人，每个局中人均有一组策略可供选择，当各局中人分别采取不同策略时，对应一个收益或需要支付的函数. 在社会、经济、管理等与人类活动有关的系统中，各局中人都按各自的利益和知识进行对策，每个人都力求扩大自己的利益，但又无法精确预测其他局中人的行为，无法取得必要的信息，他们之间还可能玩弄花招，制造假象. 对策论为局中人在这种高度

不确定和充满竞争的环境中，提供一套完整的、定量化和程序化的选择策略的理论和方法. 对策论已应用于商品、消费者、生产者之间的供求平衡分析、利益集团间的协商和谈判以及军事上各种作战规模的研究等.

7. **决策论**(Decision Theory)

决策是指为最优地达到目标，依据一定准则，对若干备选行动的方案进行的抉择. 随着科学技术的发展，生产规模和人类社会的扩大，要求用科学的决策替代经验决策. 即实行科学的决策程序，采用科学的决策技术和具有科学的思维方法. 决策过程一般是指形成决策问题，包括提出方案，确定目标及效果的度量；确定各方案对应的结局及出现的概率；确定决策者对不同结局的效用值；综合评价，决定方案的取舍. 决策论是对整个决策过程中涉及方案目标选取、度量、概率值确定、效用值计算，一直到最优方案和策略选取的有关科学理论.

## §1.3 运筹学的主要特点

用运筹学解决问题时应注意其下述特点：

1. 强调科学性和定量分析. 用运筹学解决实际问题时应注意进行科学的定量和定性分析，强调以定量分析为基础的可靠性和科学性，尽量导出好的结果，即达到通常所说的最优性. 在实际问题中有时“最优”过于理想化，难以达到，这时也可用“次优”或“满意”取代.

2. 把所要解决的问题看成一个系统，不是孤立地去认识它；要考虑到有关主要因素和条件，从相互联系中尽量全面的去考虑问题，强调总效果，而不是某个方面的局部“最优”.

3. 运用多学科知识解决问题. 用运筹学方法解决实际问题时，除了要熟悉与研究对象有关的科学知识之外，还要运用适宜的数学方法和计算机技术，有时可能还需要与经济学、社会学、其他技术科学的知识相交叉，才能建立起适宜的模型，使问题得以很好解决.

4. 遵循一定的科学步骤，解决实际问题.

(1)明确问题. 通过调查和分析，将所要解决的问题弄清楚，包括问题所在、要求目标、限制条件、假设前提、可能的各种决策方案等，在此基础上把问题明确地表达出来.

(2)建立模型. 模型是客观事物的一种映像，它既要反映实际，又要进行抽象而“高”于实际. 建模是一种创造性活动，是非常重要的一步工作. 本书中提供了一些基本模型，但是很多实际系统往往复杂得多，难于套用现成的模型，建模时必须进行认真的分析. 建模工作包括拟定变量和参数，建立目标函数和正确的约束条件.

(3)模型求解. 根据模型的性质和结构选用适当的方法求解，如没有合适的现成方法，也可用随机模拟或构造启发式算法等手段寻求问题的“近似解”，解的精度由决策者确定.

(4)解的检验. 检查求解过程有无错误，结果是否与现实一致. 如出现问题，还要分析问题所在，必要时修正该模型或解法.

(5)解的实施. 对实际问题来说，求出的解往往就是某种决策方案. 要考虑具体实施过程中可能遇到的问题以及实施中需要的修改.

上述过程有时需要反复修改.

# 第二章　线性规划及单纯形法

运筹学的一大分支是数学规划，而线性规划又是数学规划的重要组成部分. 线性规划(Linear Programming 简写 LP)也是运筹学最基本的内容. 相对于其他运筹学分支，线性规划理论完善，方法简单，应用广泛，是任何运筹学分支首先要阐明的基本知识.

早在 20 世纪 30 年代，苏联学者康托洛维奇等人在研究生产组织和运输问题中，就曾提出过求解某些线性规划问题的方法；1947 年，美国数学家丹泽格(Dantzig)提出了求解线性规划问题的一般解法——单纯形法(Simplex Method)，它可以用来求解各种线性规划问题，从而为线性规划这门学科奠定了基础. 单纯形法的出现，使求解大规模决策问题成为可能，它给许多部门带来了巨大的经济利益，因而受到世界各国有关部门的普遍重视和欢迎.

## §2.1　线性规划及其数学模型

下面先通过例子说明什么是线性规划问题，如何用数学语言来描述它，再进一步说明线性规划数学模型的结构.

### 一、问题的提出

**例 1**　美佳公司计划制造Ⅰ、Ⅱ两种家电产品. 已知各制造一件分别占用的设备 $A$，$B$ 的台时、调试时间、调试工序及每天可用于这两种家电的能力、各出售一件时的获利情况，如表 2－1 所示. 问该公司制造两种家电各多少件，使获利最大.

解：我们的问题是，在现有设备、调试能力的限制下，如何确定产量使利润最大？假设 $x_1$ 和 $x_2$ 分别表示美佳公司制造家电Ⅰ和Ⅱ的数量，利润用 $Z$ 表示，则每天的利润表示为 $Z=2x_1+x_2$. 使其最大化，即 $\max Z=2x_1+x_2$，这是公司获取利润的目标值，称为目标函数. 由于受到设备 $A$，$B$ 和调试工序能力的限制，因此描述限制条件的数学表达式称为约束条件，由此该问题的数学模型可表示为：

$$\max Z=2x_1+x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_2\leqslant 15\\6x_1+2x_2\leqslant 24\\x_1+x_2\leqslant 5\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

这种数学表达方式,称为该问题的一种数学模型.

表 2—1

| 项目 | Ⅰ | Ⅱ | 每天可用能力(小时) |
|---|---|---|---|
| 设备 $A$(小时) | 0 | 5 | 15 |
| 设备 $B$(小时) | 6 | 2 | 24 |
| 调试工序(小时) | 1 | 1 | 5 |
| 利润(元) | 2 | 1 | |

**例 2** 某公司生产甲、乙两种产品,每件产品的利润、所需材料、工时及每天的限额如表 2—2. 问题:如何安排生产,使该公司每天生产所得利润最大?

解:用变量 $x_1$ 和 $x_2$ 分别表示产品甲、乙的数量,利润用 $Z$ 表示,该问题的数学模型可表示为:

$$\max Z=4x_1+3x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 24\\3x_1+2x_2\leqslant 26\\x_1\geqslant 0\\x_2\geqslant 0\end{cases}$$

表 2—2

| 项目 | 产品甲 | 产品乙 | 每天限额 |
|---|---|---|---|
| 材料(公斤) | 2 | 3 | 24 |
| 工时(小时) | 3 | 2 | 26 |
| 利润(元) | 4 | 3 | |

类似的例子可以举出很多.

由上述例子可以看出,尽管谈的是截然不同的问题,但都属于同一类优化问题. 从数学模型上来讲,它们具有以下共同特征:

1. 用未知自变量表示某种重要的可变因素,变量的一组数据代表一种解决方案,通常要求这些变量取非负,我们统称这类自变量为决策变量,即问题中需要确定的未知量,表示规划中用数量表示的方案、措施,由决策者决定控制.

2. 存在一定的限制条件(如材料、人力、设备、时间、费用等的限制),它们可以用自变量的线性等式或不等式表示,这些条件称为约束条件.

3. 都有一个要达到的目标,它也是自变量的线性函数,称为目标函数,根据决策者的

优化目标,要求这个函数极大化或者极小化.

## 二、线性规划的数学模型

下面从数学的角度来归纳线性规划模型的特点：

1. 每一个问题都有一组变量——称之为决策变量,一般记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 对决策变量的每一组值:$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T$ 代表了一种决策方案. 通常要求决策变量取值非负,即 $x_j\geqslant0(j=1,2,\cdots,n)$.

2. 每个问题都有决策变量须满足的一组约束条件——线性的等式或不等式.

3. 每个问题都有一个关于决策变量的线性函数——称为目标函数,要求这个目标函数在满足约束条件下实现最大化或最小化.

如果规划问题中决策变量的取值是连续的,目标函数是决策变量的线性函数,约束条件是决策变量的线性不等式或等式,则该类规划问题称为线性规划.

线性规划的数学模型一般表示为：

$\max(\min)Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$(目标函数,或最大化,或最小化)

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & \leqslant(=,\geqslant) & b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & \leqslant(=,\geqslant) & b_2\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & \leqslant(=,\geqslant) & b_m\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant0\end{cases}$$

s. t. 是 subject to 的英文缩写,它表示“以…为条件”、“假定”、“满足”之意.

其中:决策变量为 $x_j(j=1,\cdots,n)$;目标函数中 $x_j$ 的价值系数为 $c_j(j=1,\cdots,n)$;$x_j$ 的取值受 $m$ 项资源 $b_i(i=1,\cdots,m)$限制;$a_{ij}$ 表示技术系数(工艺系数),它表示当 $x_j$ 取值为 1 时所消耗 $b_i$ 的量;$A=(a_{ij})$为系数矩阵.

上述数学模型也可借助于求和符号$\sum$进行压缩,如：

$$\max(\min)Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(=,\geqslant)b_i,(i=1,\cdots,m)\\ x_j\geqslant0,(j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

用向量形式表示时,上述模型可写为：

$$\max(\min)Z=CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}P_jx_j & \leqslant(=,\geqslant) & b\\ X\geqslant0\end{cases}$$

式中 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,$P_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$,$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$

用矩阵表示为

$$\max(\min)Z=CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}AX \quad \leqslant(=,\geqslant) \quad b\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为约束方程组的系数矩阵.

当用线性规划的方法解决实际问题时，首先要把该问题正确地表述成线性规划的数学模型. 为使建立的数学模型科学实用，必须对实际问题进行认真细致的分析，在此基础上恰当地选取自变量，并根据目标要求建立目标函数，确定要极小化或极大化，再分析限制条件，列出约束条件等式或不等式. 最后，还要进一步检查建立的数学模型是否和实际问题的目标与条件一致，避免遗漏和重复.

## 三、线性规划问题的标准形式

线性规划问题的目标函数可以求极大也可以求极小；约束条件可以为“$\leqslant$”型，也可以为“$\geqslant$”型，还可以为等式. 这种多样性给讨论问题带来不便，为了便于讨论，常规定某种标准形式. 设线性规划含有 $n$ 个变量，$m$ 个约束条件，则线性规划的标准形式为：

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,(i=1,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0,(j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

表示为矩阵形式：

$$\max Z=CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}AX=b\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

这种标准形式的特点是：

1. 目标函数求极大；
2. 约束条件右端常数项 $b_i$ 为非负；
3. 约束条件为等式；
4. 决策变量 $x_j$ 为非负.

实际线性规划问题的数学模型可能与上述标准形式不同，但都可以通过以下方法将其化为标准型.

若目标函数为求最小化 $\min Z=CX$，则令 $Z'=-Z$ 即 $Z'=-CX$，此时 $\max Z'$ 等价于

$\min Z$，就最优解来说，$X^*$ 相同.

若约束条件是≤型，则在该约束条件不等式的左边加上一个新变量，称为松弛变量，将不等式改为等式，如 $2x_1+3x_2\leqslant 8\rightarrow 2x_1+3x_2+x_3=8$.

若约束条件是≥型，则在该约束条件不等式的左边减去一个新变量，称为剩余变量，将不等式改为等式，如 $2x_1+3x_2\geqslant 8\rightarrow 2x_1+3x_2-x_3=8$.

若某个约束方程的右端项 $b_i<0$，则在约束方程两端乘以 $-1$，不等号改变方向.

若决策变量 $x_k$ 无非负要求，则可另设两个新变量 $x'_k\geqslant 0, x''_k\geqslant 0$，作 $x_k=x'_k-x''_k$，且在原数学模型中，$x_k$ 均用 $(x'_k-x''_k)$ 来代替，而在非负约束中增加 $x'_k\geqslant 0, x''_k\geqslant 0$.

对 $x_k\leqslant 0$ 的情况，令 $x_k=-x'_k$，显然 $x'_k\geqslant 0$.

**例** 3　将下述线性规划化为标准型

$$\min Z=x_1+2x_2+3x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3\leqslant 9\\ -3x_1+x_2+2x_3\geqslant 4\\ 4x_1-2x_2-3x_3=-6\\ x_1\leqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\text{ 无约束}\end{cases}$$

解：令：

$$Z'=-Z, x'_1=-x_1, x_3=x'_3-x''_3$$

$$x'_3\geqslant 0, x''_3\geqslant 0$$

则标准形式为：

$$\max Z'=x'_1-2x_2-3x'_3+3x''_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x'_1+x_2+x'_3-x''_3+x_4=9\\ 3x'_1+x_2+2x'_3-2x''_3-x_5=4\\ 4x'_1+2x_2+3x'_3-3x''_3=6\\ x'_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5\geqslant 0\end{cases}$$

## §2.2　线性规划的图解法

对模型中只含有两个变量的线性规划问题，可以通过在平面上作图的方法求解. 一个线性规划问题有解，是指能找出一组 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$，满足约束条件，称这组 $x_j$ 为问题的可行解. 通常线性规划问题总是含有很多个可行解，称全部可行解的集合为可行域，可行域中使目标函数值达到最优的可行解称为最优解. 对不存在可行解的线性规划问题，称该问题无解.

图解法求解的目的，一是判别线性规划问题的求解结局，二是在存在最优解的条件下把问题的最优解找出来.

## 一、图解法的步骤

图解法的步骤可概括为:在平面上建立直角坐标系;图示约束条件,找出可行域;图示目标函数和寻找最优解.

通过求解例 1 来说明用图解法求解线性规划问题.

1. 以变量 $x_1$ 为横坐标轴,以 $x_2$ 为纵坐标轴画出直角平面坐标系,并适当选取单位坐标长度.由变量的非负约束 $x_1,x_2\geqslant 0$ 知,满足该约束条件的解(对应坐标系中的一个点)均在第Ⅰ象限.

2. 图示约束条件,找出可行域.约束条件 $5x_2\leqslant 15$ 可分解为 $5x_2=15$ 和 $5x_2<15$,前者是平行于坐标轴 $x_1$ 的直线 $x_2=3$,后者位于这条直线下方的半平面,由此 $5x_2\leqslant 15$ 是位于含直线 $x_2=3$ 的点及其下方的半平面,见图 2—1.类似地,约束条件 $6x_1+2x_2\leqslant 24$ 在坐标系中是含 $6x_1+2x_2=24$ 这条直线上的点及其下方的半平面,约束条件 $x_1+x_2\leqslant 5$ 是含直线 $x_1+x_2=5$ 上的点及其左下方的半平面.同时满足所有约束条件的点如图2—2所示,图中凸多边形 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$ 所包含的区域(阴影表示)是例 1 线性规划问题的可行域.

3. 图示目标函数.由于 $Z$ 是一个要求的目标函数值,随着 $Z$ 的变化,$Z=2x_1+x_2$ 是斜率为 $-2$ 的一族平行的直线,见图 2—3,图中向量 $P$ 代表目标函数值 $Z$ 的增大方向.

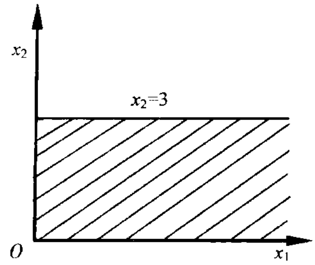



图 2—1

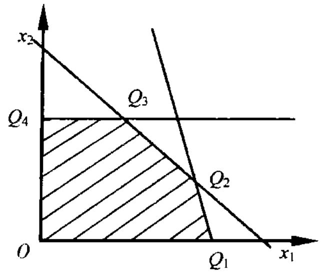



图 2—2

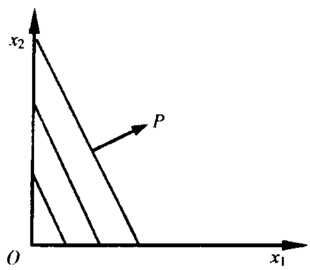



图 2—3

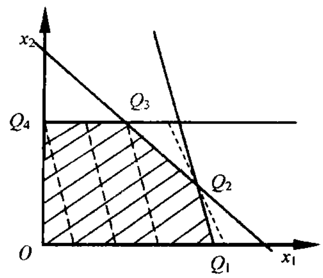



图 2—4

4. 最优解的确定.因最优解是可行域中使目标函数值达到最优的点,将图 2—2 和图 2—3 合并得到图 2—4.可以看出,当代表目标函数的那条直线由原点开始向右上方移动时,$Z$ 的值逐渐增大,一直移动到目标函数的直线与约束条件包围成的凸多边形相切为

止，切点就是代表最优解的点．因为再继续向右上方移动，$Z$ 值仍然可以增大，但在目标函数的直线上找不出一个点位于约束条件包围成的凸多边形内部或边界上．

例 1 中目标函数直线与凸多边形的切点是 $Q_2$，该点坐标可由求解直线方程 $6x_1+2x_2=24$ 和 $x_1+x_2=5$ 得到，为 $(x_1,x_2)=(3.5,1.5)$．将其代入目标函数中得 $Z=8.5$，即美佳公司应每天制造家电Ⅰ3.5 件，制造家电Ⅱ1.5 件获利最大．

因此，总结线性规划问题求解步骤：

1. 画出平面直角坐标系，$x_1$ 为横坐标轴，$x_2$ 为纵坐标轴；
2. 根据约束条件，在坐标系中找出可行域；
3. 图示出目标函数线；
4. 移动目标函数线与约束条件包围成的凸多边形相切，切点就是最优解．

## 二、线性规划问题解的几种可能情况

1. 唯一最优解．见例 1.

2. 无穷多最优解．

将例 1 中的目标函数改变为 $\max Z=3x_1+x_2$，则目标函数的直线族恰好与约束条件的边界 $6x_1+2x_2=24$ 平行．当目标函数向优化方向移动时，与可行域不是在一个点上，而是在 $Q_1Q_2$ 线段上相切，见图 2－5．这时点 $Q_1$、$Q_2$ 及 $Q_1$，$Q_2$ 之间的所有点都使目标函数 $Z$ 达到最大值，即有无穷多最优解，或多重最优解．

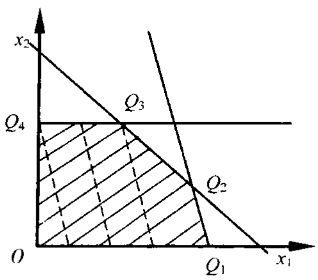



图 2－5

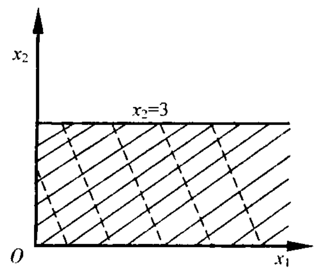



图 2－6

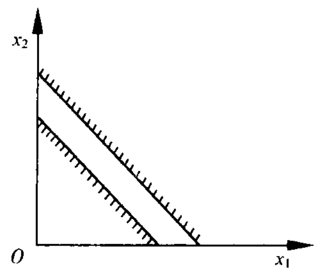



图 2－7

3. 无界解．如果例 1 中只包含约束条件 $5x_2\leqslant 15$，这时可行域可伸展到无穷，即变量 $x_1$ 的取值可无限增大，不受限制，由此目标函数值也可增大至无穷，见图 2－6．这种情况下问题的最优解无界．产生无界解的原因可能是由于在建立实际问题的数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件．

4. 无解，或无可行解．例如下述线性规划模型

$$\max Z=2x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 2 \\ 2x_1+2x_2\geqslant 6 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

用图解法求解时看出不存在满足所有约束条件的公共区域（可行域）．见图 2－7，说