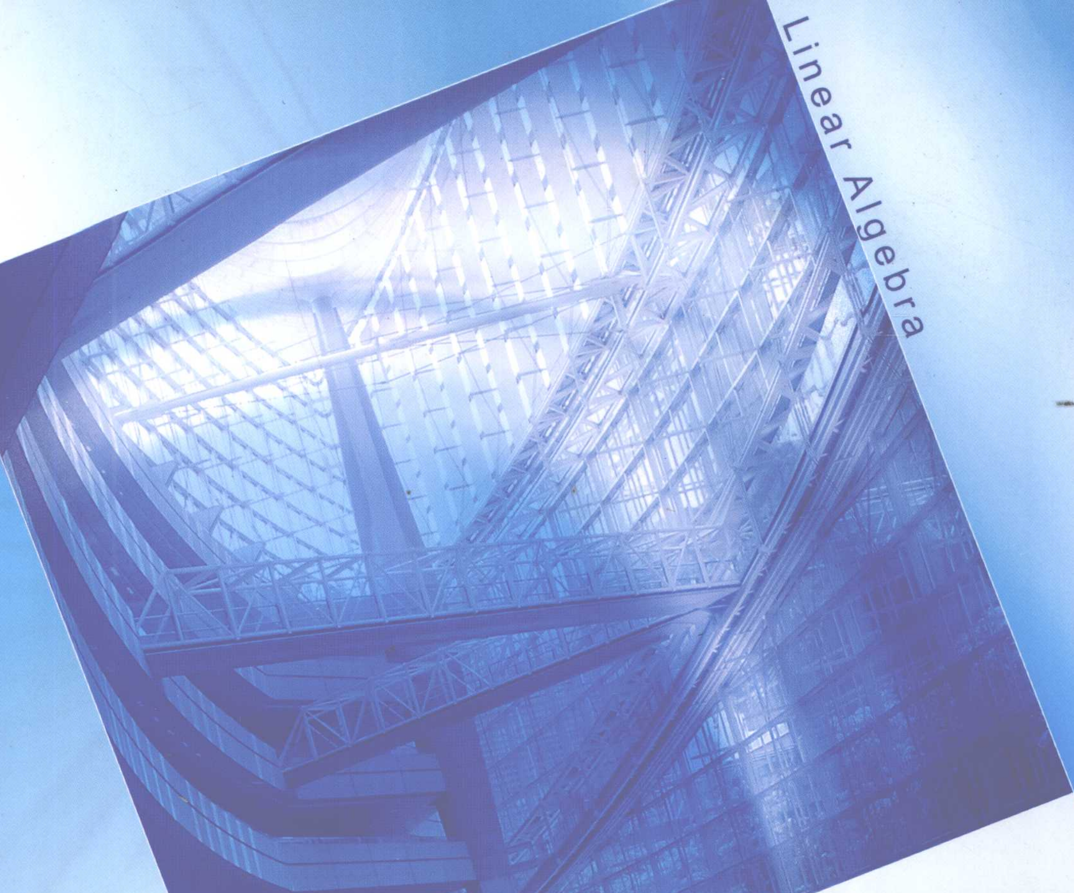
Linear Algebra



教育科学“十五”国家规划课题研究成果

# 线性代数及其应用

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

# 线性代数及其应用

同济大学应用数学系　编



高等教育出版社

## 内容简介

本书是教育科学“十五”国家规划课题研究成果，依据理工类线性代数课程的基本要求编写的全国通用教材。本书注重重要概念的实际背景，强调数学的思想和方法，强化线性代数知识的应用，全书理论上贯穿“线性相关性”这一线性代数的灵魂，突出“矩阵方法”，强调矩阵的初等变换的作用，力争做到由浅入深，由易及难，由具体到抽象，使难点分散，便于教学。每节配有习题和思考题，书末附有习题和思考题答案。

本书深广度恰当，结构严谨，文笔流畅，例题丰富，便于教学，可供培养应用型人才的高等学校理工类本科学生选用。


图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/同济大学应用数学系编．—北京：高等教育出版社，2004.7(2008 重印)

ISBN 978-7-04-014412-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.同…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材

Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 054752 号

策划编辑　王　强　责任编辑　胡乃冏　封面设计　王凌波　责任绘图　吴文信

版式设计　胡志萍　责任校对　金　辉　责任印制　朱学忠

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 北京明月印务有限责任公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2004 年 7 月第 1 版 |
| 印　　张 | 11.25 | 印　　次 | 2008 年 4 月第 10 次印刷 |
| 字　　数 | 200 000 | 定　　价 | 12.40 元 |





物料号　14412-00

# 总　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称"教研中心"）在承担全国教育科学"十五"国家规划课题——"21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践"研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以"教育科学'十五'国家规划课题研究成果"。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容

和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部"高等学校教学质量和教学改革工程"的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

# 前　言

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展的需要，满足我国高校从精英教育向大众教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的要求，编者编写了这本适合应用型本科的线性代数教材。本书是在同济大学数学教研室编《线性代数》(第四版)的基础上，参照工科类本科线性代数教学基本要求编写而成。本书可作为高等职业教育、成人高等教育工程类线性代数课程的教材，也可供工程技术人员自学阅读。

线性代数是高等院校一门重要的基础数学课程，具有较强的逻辑性、抽象性。针对本书面向的应用型本科学生，确定编写本书的宗旨：以工科类本科线性代数课程的教学基本要求为本，在重要概念引进时尽可能做到简明、自然和浅显。本书在内容的处理上，既注意保持线性代数本身的完整性和结构的合理性，又考虑到应用型本科学生学习线性代数课程的实际情况。本书中除特别说明外，所有矩阵均指实矩阵。二次型也是实二次型。由于线性变换的概念理科色彩较浓，未编入本教材。为增强本书的可读性，方便教师教学，本书在编写时采取了下列一些措施：

(1)通过大量例题来阐明线性代数的思想；(2)通过一些实际例子的介绍，增强学生学习线性代数的兴趣；(3)淡化定理的推导，强调方法的训练。

本书的编写工作由陈素琴主持。胡志庠编写第一章，陈素琴编写第二章，靳全勤编写第三章，范麟馨编写第四、第五章。最后由范麟馨统一定稿。

教育部高教司、高等教育出版社以及同济大学应用数学系对本书的编写和出版给予了热忱的关心和支持，谨在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者和各位同行批评指正。

编　者

2004年3月24日

# 郑 重 声 明

# 目　录

# 第一章　矩阵和行列式

## §1　矩　　阵

### 一、矩阵的概念

在工程技术和经济工作中有大量与矩形数表有关的问题.

**例 1.1**　力达公司生产甲、乙、丙三种产品，它们的生产成本由原材料费用、人工费用和其他费用三项构成. 表 1.1 给出了每种产品的每项费用的预算(单位:百元).

**表 1.1**

| 生产成本 \ 产品 | 甲 | 乙 | 丙 |
|---|---|---|---|
| 1. 原材料 | 10 | 30 | 20 |
| 2. 人工 | 3 | 4 | 5 |
| 3. 其他费用 | 1 | 2 | 2 |

如果我们将上表中主要关心的对象——数据按原来次序排列成矩形数表，并加上括号以表示这些数据是一个整体，就得到矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}10 & 30 & 20\\ 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

如果该公司 2004 年各季度产品的计划生产数如表 1.2 所示：

**表 1.2　力达公司 2004 年各季度产品计划生产数(单位:台)**

| 产品 \ 季度 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 400 | 450 | 450 | 400 |
| 乙 | 200 | 260 | 240 | 220 |
| 丙 | 580 | 620 | 600 | 600 |

同样,由这些数据可得到矩阵:

$$B=\begin{pmatrix}400 & 450 & 450 & 400\\ 200 & 260 & 240 & 220\\ 580 & 620 & 600 & 600\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

一般地,有

**定义 1.1** 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 $m$ 行 $n$ 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

称为 $\boldsymbol{m\times n}$ **矩阵**.这 $m\times n$ 个数称为矩阵(1.3)的**元素**.位于第 $i$ 行、第 $j$ 列的元素 $a_{ij}$ 称为矩阵(1.3)的**$(i,j)$元**.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**,本书中的矩阵除特别说明者外,都指实矩阵.

通常用黑体大写字母来表示矩阵,有时为了强调矩阵的行数和列数,$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})$,这里 $a_{ij}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $(i,j)$ 元.

## 二、一些特殊的矩阵

行数与列数都等于 $n$ 的矩阵称为 **$n$ 阶方阵**,$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 也可记作 $\boldsymbol{A}_n$.一阶方阵就看作一个数.

当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n$ 阶方阵时,从左上角到右下角的直线称为**对角线**.对角线左下侧所有元素都为零的方阵称为**上三角阵**;对角线右上侧所有元素都为零的方阵称为**下三角阵**,例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad 与 \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

分别是上三角阵和下三角阵.

对角线以外的元素全为零的方阵

$$\boldsymbol{\Lambda}_n=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

称为**对角矩阵**,简称**对角阵**,因它完全由对角线元素所决定,故也可记作

$$\boldsymbol{\Lambda}_n=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

特别,对角线元素都为 1 的对角阵

$$E_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

称为**单位阵**.

只有一列的矩阵

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**,也称**作列向量**,因为它与三维几何空间中的列向量

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

在形式上是一致的.

只有一行的矩阵

$$A=(a_1\ a_2\cdots\ a_n) \tag{1.4}$$

称为**行矩阵**,也称为**行向量**. 为避免元素与元素之间的混淆,行矩阵(1.4)一般写成

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

行矩阵和列矩阵一般也用小写黑体字母如 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 等表示.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$,特别,如果列矩阵为零矩阵时,也可记作 $\boldsymbol{0}$.

### 三、同型矩阵与矩阵的相等

如果两个矩阵的行数相同、列数也相同,就称它们是**同型矩阵**.

如果两矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵,且它们对应的元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}.$$

## §2　矩阵的运算及应用举例

本节介绍矩阵的加法、减法、数乘、乘法和转置等基本运算. 正是有了这些运算,矩阵之间就有了一些最基本的关系.

### 一、矩阵的加法、减法和数与矩阵的乘法

**定义 1.2**　设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$.

(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相加的和,记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

(2) 数 $\lambda$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘的积,记作 $\lambda\boldsymbol{A}$,规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差,记作 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,规定为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

上述定义表明:只有当两个矩阵是同型矩阵时,才能进行加、减运算;矩阵的加、减、数与矩阵的相乘运算归结为对应元素的加、减、数与数相乘的运算;且运算结果仍是与原矩阵同型的矩阵.

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵,$\lambda$、$\mu$ 为数. 由定义 1.2,容易验证矩阵的加法、数乘矩阵满足以下运算规律:

(ⅰ) 交换律:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(ⅱ) 结合律:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(ⅲ) 分配律:$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$,$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(ⅳ) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$.

另外,把 $(-1)\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,记为 $-\boldsymbol{A}$. 显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O};$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A},$$

可见，零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 在矩阵的加法中与数 0 在数的加法中起着类似的作用.

**例 1.2** 设矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足等式 $5(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})=2(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

**解** 由 $5(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})=2(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$ 得

$$5\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{C}=4\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C},$$

$$7\boldsymbol{C}=4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{A},$$

于是

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{7}(4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{A});$$

又

$$4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 20 & 12 & 4 \\ -12 & 4 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 20 & 5 & -10 \\ -5 & 25 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -7 & -21 & 7 \end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{7}(4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 二、矩阵的乘法

### 1. 定义和性质

先看一个例子.

**例 1.3** （例 1.1 之续）. 设力达公司三种产品的生产成本如表 1.1 所示，该公司 2004 年各季度产品计划生产数如表 1.2 所示. 求此公司 2004 年各季度的生产成本各项费用，即原材料费用，人工费用和其他费用分别是多少？

**解** 根据表 1.1 和表 1.2，力达公司 2004 年

第一季度原材料费用＝甲产品每件原材料费用×此季度甲产品生产数＋
乙产品每件原材料费用×此季度乙产品生产数＋
丙产品每件原材料费用×此季度丙产品生产数
$=10\times400+30\times200+20\times580=21\,600$（百元）.

类似地，

第一季度人工费用$=3\times400+4\times200+5\times580=4\,900$（百元），

第一季度其他费用$=1\times400+2\times200+2\times580=1\,960$（百元）.

对其他各季度作相似的计算，可得到表 1.3.

表 1.3　力达公司 2004 年各季度生产成本预算表(单位:百元)

| 生产成本 \ 季度 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1. 原材料 | 21 600 | 24 700 | 23 700 | 22 600 |
| 2. 人工 | 4 900 | 5 490 | 5 310 | 5 080 |
| 3. 其他费用 | 1 960 | 2 210 | 2 130 | 2 040 |

与例 1.1 相同,把上表中数据写成 $3\times 4$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$,

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 21\,600 & 24\,700 & 23\,700 & 22\,600 \\ 4\,900 & 5\,490 & 5\,310 & 5\,080 \\ 1\,960 & 2\,210 & 2\,130 & 2\,040 \end{pmatrix}.$$

于是,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 $i$ 行、第 $j$ 列元素 $c_{ij}$ $(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$ 表示的是力达公司 2004 年第 $j$ 季度、第 $i$ 项费用支出,它恰好是例 1.1 中(1.1)式矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

的第 $i$ 行的每个元素与(1.2)式矩阵 $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 400 & 450 & 450 & 400 \\ 200 & 260 & 240 & 220 \\ 580 & 620 & 600 & 600 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

的第 $j$ 列的对应元素乘积之和. 我们把矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,即有 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 一般地,有以下定义.

**定义 1.3**　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times p$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 $p\times n$ 矩阵,那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,且它的 $(i,j)$ 元 $c_{ij}$ 为

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

上述定义表明:只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘,且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的行数即是 $\boldsymbol{A}$ 的行数,$\boldsymbol{C}$ 的列数即是 $\boldsymbol{B}$ 的列数;$\boldsymbol{C}$ 的 $(i,j)$ 元 $c_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j$ 列对应元素的乘积之和.

**例 1.4**　(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=(4,5,6)$,求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

**解** (1)

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times1+2\times0+3\times(-1)&1\times(-1)+2\times1+3\times1&1\times2+2\times1+3\times(-1)\\4\times1+5\times0+6\times(-1)&4\times(-1)+5\times1+6\times1&4\times2+5\times1+6\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&4&1\\-2&7&5\end{pmatrix}.$$

(2) $$AB=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{3\times1}(4,5,6)_{1\times3}=\begin{pmatrix}4&5&6\\8&10&12\\12&15&18\end{pmatrix}_{3\times3};$$

$$BA=(4,5,6)_{1\times3}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{3\times1}=4+10+18=32.$$

由此例(1)可知：矩阵 $A$ 与 $B$ 可相乘，但 $B$ 与 $A$ 不能相乘，这是因为 $B$ 的列数为 3 而 $A$ 的行数为 2；由(2)可知：即使乘积矩阵 $AB$ 与 $BA$ 均有意义，但它们不一定是同型矩阵. 因此，应注意矩阵乘法是不满足交换律的，即并非对所有的矩阵 $A$ 与 $B$ 都有 $AB=BA$.

当矩阵 $A$ 和 $B$ 都为 $n$ 阶方阵时，乘积 $AB$ 与 $BA$ 都有意义，且都为 $n$ 阶方阵，那么是否必定有 $AB=BA$ 呢？

**例 1.5** 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，求 $AB$ 和 $BA$.

**解** $$AB=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O;$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

此例表明：即使 $AB$ 与 $BA$ 为同阶方阵，两者还是可能不相等，结合上一例题，总之，在一般情形下 $AB\neq BA$. 因此要注意矩阵相乘时有**左乘**与**右乘**之分. 矩阵 $AB$ 是 $B$ 右乘 $A$ 的乘积；而矩阵 $BA$ 是 $B$ 左乘 $A$ 的乘积，值得指出的是，例 1.5 还表明了一个与数的乘法很不同的地方：例 1.5 中矩阵 $A\neq O$，$B\neq O$，但它们的乘积 $AB=O$，即两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵. 由此也可推知：若 $AB=AC$，且 $A\neq O$，并不能推出矩阵 $B=C$，即一般不能在等式两边消去非零矩阵 $A$.（这样的运算规律也称为消去律，于是矩阵乘法不满足消去律.）

虽然矩阵乘法不满足交换律和消去律，但它仍有许多与数的乘法类似的性质. 矩阵乘法满足以下规律（假设运算均是可行的）：

(ⅰ) 结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$, (1.5)

$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$,($\lambda$ 为数);

(ⅱ) 分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$,

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;

(ⅲ) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则有

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}_n=\boldsymbol{A},$$

特别当 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵时,则有

$$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A},(\text{这里 } \boldsymbol{E} \text{ 为 } n \text{ 阶单位阵}).$$

由此可见,单位阵在矩阵乘法中与数 1 在数的乘法中起着类似的作用.

我们证明(ⅰ)中(1.5)式,其余请读者自行验证.

**证** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{kl})_{s\times t}$,$\boldsymbol{C}=(c_{lj})_{t\times n}$,显然 $\boldsymbol{AB}$ 为 $m\times t$ 矩阵,从而 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵;$\boldsymbol{BC}$ 为 $s\times n$ 矩阵,从而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 也为 $m\times n$ 矩阵. 为了证明它们相等,再证明它们的 $(i,j)$ 元对应相等,$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 事实上,

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}\text{ 的}(i,j)\text{元}\\&=(\boldsymbol{AB})\text{的第 } i \text{ 行与 } \boldsymbol{C} \text{ 的第 } j \text{ 列的乘积}\\&=\sum_{k=1}^{t}(\boldsymbol{AB})_{ik}c_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{t}\Big(\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lk}\Big)c_{kj}=\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lk}c_{kj},\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\text{ 的}(i,j)\text{元}\\&=\boldsymbol{A}\text{ 的第 } i \text{ 行与}(\boldsymbol{BC})\text{的第 } j \text{ 列的乘积}\\&=\sum_{l=1}^{s}a_{il}(\boldsymbol{BC})_{lj}\\&=\sum_{l=1}^{s}\Big[a_{il}\Big(\sum_{k=1}^{t}b_{lk}c_{kj}\Big)\Big]=\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}a_{il}b_{lk}c_{kj},\end{aligned}$$

由于双重"$\sum$"运算可以交换,所以

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}\text{ 的}(i,j)\text{元}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\text{的}(i,j)\text{元},$$

进而

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}).$$

矩阵的乘法除了如例 1.3 所描述的在工程和经济工作上的应用外,在线性代数中也有许多重要应用. 这里先介绍作为线性代数课程主要内容之一的线性方程组以及线性变换的概念和它们的矩阵形式.

大家都已熟悉二元线性方程组

$$\begin{cases}ax+by=p,\\cx+dy=q,\end{cases}$$