应用高等数学

YINGYONG GAODENG SHUXUE

教、学、做一体化指导书

主 编 汪国强 彭 刚
副主编 钟学军 刘广平 付德刚

广东高等教育出版社

责任编辑：李　蔚
责任技编：罗穗香
封面设计：智　慧

ISBN 978-7-5361-3677-9

9 787536 136779 >

定价：18.00元

应用高等数学
教、学、做一体化指导书

主　编　汪国强　彭　刚

副主编　钟学军　刘广平　付德刚

编　委　汪国强　钟学军　彭　刚

　　　　刘广平　付德刚　陈敏娜

广东高等教育出版社

·广州·

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学教、学、做一体化指导书/汪国强，彭刚主编．—广州：广东高等教育出版社，2008.8
ISBN 978-7-5361-3677-9

Ⅰ．应…　Ⅱ．①汪…　②彭…　Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学校-教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 128413 号

广东高等教育出版社出版发行
地址：广州市天河区林和西横路
邮编：510500　电话：87551597
河源市天才印务有限公司印刷
787 毫米×1 092 毫米　16 开本　9.25 印张　176 千字
2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
印数：0 001～3 500 册
定价：18.00 元

前　言

本书是高职高专院校工科类与经济类数学教学辅导用书，适应于我国高等职业教育.

为了适应高等职业教育的教学改革和发展，满足高等教育高等数学课堂上“教、学、做”一体化的需要，编者们根据多年从事高职高专教学的经验，编写了本书.

本书有如下几个主要特点：

1. 本书以必需、够用为度，加深对高等数学基础知识的应用.

2. 本书每一节都分五个部分：主要内容、例题、例题解析、练习题、练习题答案，在课堂上与教材配套使用.

3. 本书主要是在教学课堂上“实战”使用，并具有一定的针对性和“仿真、模拟”的特点.

4. 本书只编写与课堂教学紧密联系的内容，没有编写高职高专选修的内容. 本书附有《应用高等数学》的习题参考答案，方便读者自学.

由于时间仓促及编写者水平有限，书中错误和不足之处在所难免，恳请广大读者及时批评指正，我们将不胜感激.

编　者
2008 年 6 月

目　录

第 1 章　极限与连续 …… (1)
1.1　极限 …… (1)
1.2　连续 …… (6)
第 2 章　导数与微分 …… (10)
2.1　导数的概念 …… (10)
2.2　函数的微分法 …… (14)
2.3　微分及其在近似计算中的应用 …… (21)
第 3 章　导数的应用 …… (28)
3.1　微分中值定理 …… (28)
3.2　洛必达法则 …… (33)
3.3　导数的应用 …… (38)
第 4 章　不定积分 …… (44)
4.1　原函数和不定积分的概念 …… (44)
4.2　不定积分的性质与基本积分公式 …… (48)
4.3　基本积分法实例 …… (51)
4.4　换元积分法 …… (56)
4.5　分部积分法 …… (68)
第 5 章　定积分 …… (80)
第 6 章　多元函数微积分 …… (93)
6.1　多元函数微分学 …… (93)
6.2　多元函数积分学 …… (107)
附录　《应用高等数学》习题参考答案 …… (115)

第 1 章　极限与连续

1.1　极　　限

一、主要内容

1. 函数$f(x)$在x_0处的极限.

设$f(x)$在x_0附近有定义（但可以在x_0处没有定义），当x无限接近x_0时，对应的函数值$f(x)$无限接近于某个常数A，则称当x趋于x_0时，$f(x)$以A为极限，记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

2. 函数$f(x)$在x_0处的左、右极限.

当x从x_0的左侧无限接近x_0时，对应的函数值$f(x)$无限接近于某个常数A，则称A为$f(x)$在x_0处的左极限，记为$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

当x从x_0的右侧无限接近x_0时，对应的函数值$f(x)$无限接近于某个常数A，则称A为$f(x)$在x_0处的右极限，记为$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

3. 当$x \to \infty$时$f(x)$的极限.

当x的绝对值无限增大时，$f(x)$无限接近于某个常数A，则称当$x \to \infty$时，$f(x)$以A为极限，记为$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

4. 当$x \to \pm\infty$时$f(x)$的极限.

当x大于零且x的值无限增大时，$f(x)$无限接近于某个常数A，则称当$x \to +\infty$时，$f(x)$以A为极限，记为$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

当x小于零且x的绝对值无限增大时，$f(x)$无限接近于某个常数A，则称当$x \to -\infty$时，$f(x)$以A为极限，记为$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

5. 无穷小与无穷大.

以零为极限的函数称为无穷小，无穷小的倒数是无穷大. 有界函数乘以无穷小还是无穷小.

6. 等价无穷小.

$\sin x \sim x$，$x \to 0$.

$\tan x \sim x$，$x \to 0$.

$\arcsin x \sim x$，$x \to 0$.

$\arctan x \sim x$，$x \to 0$.

$\ln(1+x) \sim x$，$x \to 0$.

$e^x - 1 \sim x$，$x \to 0$.

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$x \to 0$.

$(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x$，$x \to 0$（其中$\mu$是常数）.

7. 等价替换.

设$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$.

8. 两个重要极限.

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$；（2）$\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

二、例题

求下列极限：

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$；

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2-n} - n)$；

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$；

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2+n+1}{(n-1)^2}$；

6. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$；

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{2}{x}}$；

9. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n}$；

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{2}{x+1})^{x-1}$；

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{2x+1}{2x-3})^x$；

12. $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{3+x}{3})^{\frac{5}{x}}$；

13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$；

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$；

15. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-5x)}{\arcsin 2x}$；

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1}\sin(x+3)$.

三、例题解析

1. 解：$\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

注：求极限时遇到二次根号减，可分子、分母同乘二次根号加.

2. 解：$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2-n}-n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

3. 解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 0.$$

4. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}.$

注：求极限时遇到含有幂函数的商且 $x\to+\infty, -\infty, \infty$ 时，可分子、分母同除最高幂，目的是造$\dfrac{1}{x}$.

5. 解：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+n+1}{(n-1)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{(1-\frac{1}{n})^2} = 1.$

6. 解：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}+\frac{3^n}{3^{n+1}}}{\frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+1}}+1} = \dfrac{1}{3}.$

7. 解：$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{\pi}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\pi = \pi.$

注：求极限时遇到含有$\sin\Delta$的式子，当$\Delta\to 0$时可想重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. 当$\Delta$不趋于0时，$\sin\Delta$是有界函数，有界函数乘无穷小还是无穷小.

8. 解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{\frac{2}{x}}{\sin\frac{2}{x}}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

9. 解：$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\sin\frac{x}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\frac{x}{2^n} = x.$

10. 解：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x-1} &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-\frac{2}{x+1}(x-1)}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2(x-1)}{x+1}}\\ &= e^{-2}.\end{aligned}$$

注：求极限时遇到幂指函数即$f(x)^{g(x)}$且$\lim f(x)=1$，$\lim g(x)=\infty$（即1^∞型），可想重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

11. 解：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-3}-1\right)^x\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right]^{\frac{4x}{2x-3}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x-3}}\\ &= e^2.\end{aligned}$$

12. 解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{\frac{5}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right]^{\frac{5}{3}} = e^{\frac{5}{3}}.$

13. 解：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1} &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

[因为$(1+x\sin x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x\sin x$，$x\to0$；$e^{x^2}-1\sim x^2$，$x\to0$.]

注：等价替换只针对乘除法，不针对加减法.

14. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$.

（因为 $\sin 3x\sim 3x$，$x\to 0$；$\sin 5x\sim 5x$，$x\to 0$.）

15. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{\arcsin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5x}{2x}=-\dfrac{5}{2}$.

[因为 $\ln(1-5x)\sim -5x$，$x\to 0$；$\arcsin 2x\sim 2x$，$x\to 0$.]

16. 解：$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2+1}\sin(x+3)=0$.

[因为 $\sin(x+3)$ 是有界函数，而$\dfrac{x}{x^2+1}$是 $x\to 0$ 时的无穷小.]

四、练习题

求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}$；

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-4}-1}{x-5}$；

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{n^4+n+1}-n^2)(n+3)$；

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+3}{x^2+x+1}\sin(x+3)$；

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$；

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$；

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$；

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2-1}-x)$.

五、练习题答案

1. $-2\sqrt{2}$；

2. $\dfrac{1}{2}$；

3. $\dfrac{1}{2}$；

4. 0；

5. $\dfrac{3}{7}$；

6. e^{-3}；

7. e^{-2}；

8. $-\dfrac{1}{2}$.

1.2 连　　续

一、主要内容

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足以下三个条件：

① 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 附近有定义；

② 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

③ 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2. 连续函数.

如果 $f(x)$ 在 (a, b) 内点点连续，则称 $f(x)$ 是开区间 (a, b) 内的连续函数. 如果 $f(x)$ 是 (a, b) 内的连续函数，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$，则称 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数.

3. 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数的性质：

(1) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必能取到它的最大值和最小值.

(3) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使 $f(\xi)=0$，即零点定理.

4. 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

5. 初等函数在其定义域内是连续的.

二、例题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x<1, \\ 2-x & 1\leqslant x\leqslant 2, \end{cases}$ 问：在 $x=1$ 处 $f(x)$ 是否连续？

2. 设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & x<1, \\ 3 & x=1, \\ 2a-bx & x>1, \end{cases}$ 求 a，b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

3. 当 k 为何值时，$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & x\neq 0, \\ k & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续？

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0, \\ a+2 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a.

5. 设$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\leqslant 0, \\ x^2+a & 0<x<1, \\ bx & x\geqslant 1 \end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，求$a$，$b$.

6. 设$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x>0, \\ 0 & x=0, \\ x\arctan\dfrac{1}{x} & x<0, \end{cases}$问：在$x=0$处$f(x)$是否连续?

7. 设$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0, \\ 0 & x=0, \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & x<0, \end{cases}$问：在$x=0$处$f(x)$是否连续?

8. 设$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x}{x+2} & x\geqslant 0, \\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} & x<0,\ a>0, \end{cases}$问：当$a$为何值时，$f(x)$在$x=0$处连续?

9. 设$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x & x<0, \\ p & x=0, \\ x\sin\dfrac{1}{x}+q & x>0 \end{cases}$在$x=0$处连续，求$p$，$q$的值.

10. 设$f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$，$x\neq 0$，问：令$f(0)$为何值时，$f(x)$在$x=0$处连续?

11. 设$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$，问：令$f(0)$为何值时，$f(x)$在$x=0$处连续?

12. 求函数$f(x)$的间断点，其中$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{2^x} & x>0, \\ 2 & x\leqslant 0. \end{cases}$

13. 验证方程$x^5-3x+1=0$在开区间（1，2）内至少有一个零点，至少有一个根.

14. 验证方程$x^3-4x^2+1=0$在开区间（0，1）内至少有一个零点，至少有一个根.

15. 验证方程 $4x=2^x$ 在开区间（0，$\frac{1}{2}$）内至少有一个零点，至少有一个根.

三、例题解析

1. 解：因为 $f(1)=2-1=1$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2-x=1$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1=f(1)$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

2. 解：若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=3$.

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(ax^2+bx)=a+b$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2a-bx)=2a-b$，所以 $a+b=2a-b$，$a+b=3\Rightarrow b=1$，$a=2$.

3. 解：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=k$，又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$，所以 $k=2$.

4. 解：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=a+2$. 又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，所以 $a=-2$.

5. 解：因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，必然在 $x=0$，$x=1$ 处也连续. 所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$. 又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a$，所以 $a=2$. 因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1+a=3$. 所以 $b=3$.

6. 解：$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

这是因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

7. 解：$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

这是因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

8. 解：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$. 又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow a=1$.

9. 解：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=p$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=q$，所以 $q=1$. 又 $f(0)=p$，所以 $p=1$.

10. 解：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=3$，所以令 $f(0)=3$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

11. 解：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，所以令 $f(0)=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

12. 解：当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 是初等函数，而初等函数在其定义域内是连续的. 当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，$x=0$ 是间断点.

13. 解：设 $f(x)=x^5-3x+1$，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)f(2)<0$. 由零点定理知 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内有一个零点，即方程 $x^5-3x+1=0$ 在开区间 $(1,2)$ 内有一个根.

14. 解：设 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)f(1)<0$. 由零点定理知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有一个零点，即方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

15. 解：设 $f(x)=4x-2^x$，则 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，且 $f(0)\cdot f(\frac{1}{2})<0$. 由零点定理知 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内有一个零点，即方程 $4x=2^x$ 在开区间 $(0,\frac{1}{2})$ 内有一个根.

四、练习题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x<0,\\ x^2+1 & x\geqslant 0,\end{cases}$ 问：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续吗？

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & x\leqslant 1,\\ x & 2>x>1,\\ x^2-2 & x\geqslant 2,\end{cases}$ 问：$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续吗？

3. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+kx)^{\frac{1}{x}} & x>0,\\ 2 & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 k 的值.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\leqslant 0,\\ x^2+a & 0<x<1,\\ bx & x\geqslant 1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 a 和 b 的值.

五、练习题答案

1. 连续.
2. 不连续.
3. $k=\ln 2$.
4. $a=2$，$b=3$.

第2章　导数与微分

2.1　导数的概念

一、主要内容

1. 导数的定义.

(1) $y=f(x)$在x_0处导数的定义式：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(2) $f(x)$在x处的导数：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

(3) $f(x)$ 在x_0可导的充要条件：左、右导数存在且相等.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\Leftrightarrow f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0).$$

2. 导数的几何意义、物理意义、经济意义.

(1) 几何意义.

函数$y=f(x)$ 在点$p(x_0, f(x_0))$处的导数等于该点处切线的斜率，即

$$k=\tan\alpha=f'(x_0)\qquad(\alpha\neq\frac{\pi}{2}).$$

过曲线$y=f(x)$在点$p(x_0, y_0)$处的切线方程为：

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

(2) 物理意义.