高等院校电子、信息类专业学习辅导书

离散数学
概念 题解与自测

朱保平 金 忠 叶有培 编著

离散数学（北京理工版）

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

离散数学 概念
题解与自测

朱保平　金　忠　叶有培　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书对离散数学各章节知识的要点和难点，对解题的方法和技巧作了全面的分析。内容包括命题演算基础、命题演算的推理理论、谓词演算基础、谓词演算的推理理论、递归函数论、集合、二元关系、函数与集合的势、图、树、群与环、格与布尔代数共12章习题解答。

本书表达严谨，推理缜密，提供了大量习题及其分析与解答。本书可作为高等院校计算机科学与技术及相关信息类专业的教学参考书，也适用于报考计算机专业研究生的学生作为复习指导书，也可供教师、研究生和相关人员作参考书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 概念 题解与自测/朱保平，金忠，叶有培编著. —北京：北京理工大学出版社，2009. 1

ISBN 978 - 7 - 5640 - 1792 - 7

Ⅰ. 离…　Ⅱ. ①朱…②金…③叶…　Ⅲ. 离散数学 - 高等学校 - 教学参考资料　Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 169361 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http：// www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京国马印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／10
字　　数／210 千字
版　　次／2009 年 1 月第 1 版　　2009 年 1 月第 1 次印刷
印　　数／1 ~ 4000 册　　　　责任校对／申玉琴
定　　价／18. 00 元　　　　　责任印制／边心超

前　言

离散数学不仅是计算机科学与技术专业的必修课程，也是电子信息类专业和相关工程技术人员的必读课程，该课程是许多院校相关专业研究生入学考试的必考课程之一。本书作为《离散数学》课程的辅导教材，特别注重习题的选择。习题的选择注重突出基本理论、基本概念和基本方法的掌握，又有较灵活和深入的题型。同时注重解题方法和技巧的运用，旨在加深读者对知识的理解。

全书共有 12 章，每章包括：基本要求，内容分析和习题解答三部分，并附有两套自测试题及答案。本书包括命题演算基础、命题演算的推理理论、谓词演算基础、谓词演算的推理理论、递归函数论、集合、二元关系、函数与集合的势、图、树、群与环、格与布尔代数共 12 章习题解答。

本书由朱保平编写第 1 至第 10 章，金忠编写第 11、12 章。在编写过程中，叶有培教授提出了宝贵的修改意见。在此表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，加之时间紧迫，习题量大，书中难免有不足和错误之处，恳切希望广大读者批评指正。

作　者

目　　录

第一章　命题演算基础

1.1 基本要求

1. 掌握命题、原子命题、复合命题和联结词等概念，能够将命题符号化。

2. 掌握命题公式、重言式、可满足公式、永假公式、等价公式等概念。

3. 掌握联结词完备集的性质，对偶式和内否式的定义，能够判定一个联结词集合的完备性。

4. 掌握范式、极大（小）项、主范式的概念和性质，掌握各种范式的求解方法及两种主范式的转换方法。

1.2 内容分析

1.2.1　命题

定义 1：凡是可以判断真假的陈述句称为命题。

命题具有两个特征，首先命题应是一个陈述句，感叹句、疑问句、祈使句等均不是命题；其次这个陈述句所表达的内容可决定真或假，且真假不可兼，即它应有真假性。

定义 2：不可剖开或分解为更简单命题的命题称为原子命题。

定义 3：由成分命题利用联结词构成的命题称为复合命题。

1.2.2　联结词

1. 否定词 $(\neg)$

否定词“$\neg$”是一个一元联结词，利用该联结词可由成分命题 P 构成复合命题 $\neg P$，读为非 P。

非 P 的真假与 P 的真假关系定义如下：

$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假

2. 合取词 $(\wedge)$

合取词“$\wedge$”是一个二元联结词，利用该联结词可将成分命题 P 和 Q 构成复合命题 $P\wedge Q$，读为 P 合取 Q。其中 $P\wedge Q$ 称为合取式，P、Q 称为 $P\wedge Q$ 的合取项。

P 合取 Q 的真假和 P、Q 的真假关系定义如下：

$P\wedge Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 均真

3. 析取词 $(\vee)$

析取词“$\vee$”是一个二元联结词，利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P\vee Q$，读为 P 析取 Q。其中 $P\vee Q$ 称为析取式，P 和 Q 称为 $P\vee Q$ 的析取项。

P 析取 Q 的真假和 P、Q 的真假关系定义如下：

$P \vee Q$ 为假当且仅当 P 和 Q 均假

4. 蕴含词 $(\rightarrow)$

蕴含词“$\rightarrow$”是一个二元联结词，利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P \rightarrow Q$，读为 P 蕴含 Q。其中 $P \rightarrow Q$ 称为蕴含式，P 称为蕴含前件，Q 称为蕴含后件。

蕴含词也可用“$\supset$”表示。

P 蕴含 Q 的真假和 P、Q 的真假关系定义如下：

$P \rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 真 Q 假

5. 等价词 $(\leftrightarrow)$

等价词“$\leftrightarrow$”是一个二元联结词，利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P \leftrightarrow Q$，读为 P 等价于 Q。其中 $P \leftrightarrow Q$ 称为等价式。

P 等价于 Q 的真假和 P、Q 的真假关系定义如下：

$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 均真或均假

1.2.3 合式公式

定义 4：合式公式为如下定义的式子，简称为公式：

（1）任何命题变元均是公式；

（2）如果 P 为公式，则 $\neg P$ 为公式；

（3）如果 P，Q 为公式，则 $(P \vee Q)$，$(P \wedge Q)$，$(P \rightarrow Q)$，$(P \leftrightarrow Q)$ 为公式；

（4）当且仅当有限次使用（1）、（2）、（3）所组成的符号串才是公式，否则不为公式 。

定义 5：若公式 α 中有 n 个不同的命题变元，就说 α 为 n 元公式。

1.2.4 真假性

定义 6：设 n 元公式 α 中所有的不同的命题变元为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$。

如果对每个命题变元均给予一个确定的值，则称对公式 α 给了一个完全解释；

如果仅对部分变元给予确定的值，则称对公式 α 给了一个部分解释。

一般地讲，完全解释能确定一个公式的真值，而部分解释不一定能确定公式的真值，公式的真假与未给予确定值的变元有关。

由于每个命题变元有两个取值 T 和 F，因此 n 元公式 α 有 2^n 个完全解释。

定义 7：对于任何公式 α，凡使得 α 取真值的解释，不管是完全解释还是部分解释，均称为 α 的成真解释。

定义 8：对于任何公式 α，凡使得 α 取假值的解释，不管是完全解释还是部分解释，均称为 α 的成假解释。

定义 9：如果一个公式的所有完全解释均为成真解释，则称该公式为永真公式或称为重言式；如果一个公式的所有完全解释均为成假解释，则称该公式为永假公式或称为矛盾式。

定义 10：如果一个公式存在成真解释，则称该公式为可满足公式；如果一个公式存在成假解释，则称该公式为非永真公式。

1.2.5 等价公式

定义 11：给定两个公式α和β，设$P_1,P_2,\cdots,P_n$为α和β的所有命题变元，那么α和β有2^n个解释，如果对每个解释α和β永取相同的真假值，则称α和β是逻辑等价的。记为$\alpha=\beta$。

定理 1：几组重要的等价公式

1. 双重否定律

$\neg\neg P=P$

2. 结合律

$(P\vee Q)\vee R=P\vee(Q\vee R)$

$(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$

3. 分配律

$P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

$P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

4. 交换律

$P\vee Q=Q\vee P$

$P\wedge Q=Q\wedge P$

5. 等幂律

$P\wedge P=P$

$P\vee P=P$

$P\to P=T$

$P\leftrightarrow P=T$

6. 等值公式

$P\to Q=\neg P\vee Q$

$P\leftrightarrow Q=(P\to Q)\wedge(Q\to P)$

$=(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

$=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

$\neg(P\wedge Q)=\neg P\vee\neg Q$

$\neg(P\vee Q)=\neg P\wedge\neg Q$

7. 部分解释

$P\wedge T=P\quad P\wedge F=F$

$P\vee T=T\quad P\vee F=P$

$T\to P=P\quad F\to P=T$

$P\to T=T\quad P\to F=\neg P$

$P\leftrightarrow T=P\quad P\leftrightarrow F=\neg P$

8. 吸收律

$P\vee(P\wedge Q)=P$

$P\wedge(P\vee Q)=P$

1.2.6 联结词的完备集

定义 12：设 S 是联结词的集合，如果对任何命题演算公式均可以由 S 中的联结词表示出来的公式与之等价，则说 S 是联结词的完备集。

由联结词的定义知，联结词集合 $\{\neg,\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ 是完备的。

定理 2：联结词的集合 $\{\neg,\wedge,\vee\}$ 是完备的。

定理 3：联结词集合 $\{\uparrow\}$ 是完备的。（其中 $P\uparrow Q=\neg(P\wedge Q)$）

1.2.7 对偶式和内否式

定义 13：将任何一个不含蕴含词和等价词的命题演算公式 α 中的 $\vee$ 换为 $\wedge$、$\wedge$ 换为 $\vee$ 后所得的公式称为 α 的对偶式，记为 α^*。

定义 14：将任何命题演算公式 α 中的所有肯定形式换为否定形式、否定形式换为肯定形式后所得的公式称为 α 的内否式，记为 α^-。

定理 4：$\neg(A^*)=(\neg A)^*$

$\neg(A^-)=(\neg A)^-$

定理 5：$\neg A=(A^*)^-$

定理 6：A 和 A^- 既同永真又同可满足。

定理 7：$A\rightarrow B$ 和 $B^*\rightarrow A^*$ 既同永真又同可满足。$A\leftrightarrow B$ 和 $A^*\leftrightarrow B^*$ 既同永真又同可满足。

1.2.8 范式

1. 析取范式和合取范式

定义 15：命题变元或者命题变元的否定或由它们利用合取词组成的合式公式称为合取式。

定义 16：命题变元或者命题变元的否定或由它们利用析取词组成的合式公式称为析取式。

定理 8：任给一个成真解释有且仅有一个合取式与之对应；任给一个成假解释有且仅有一个析取式与之对应。反之亦然。

定义 17：形如 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n$ 的公式称为析取范式，其中 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为合取式。

定义 18：形如 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n$ 的公式称为合取范式，其中 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为析取式。

定理 9：任何命题演算公式均可以化为合取范式（即析取式的合取），也可以化为析取范式（即合取式的析取）。

2. 主析取范式和主合取范式

定义 19：对于 n 个命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，公式 $Q_1\wedge Q_2\wedge\cdots Q_n$ 称为极小项，其中 $Q_i=P_i$ 或 $\neg P_i(i=1,2,\cdots,n)$。

定义 20：仅有极小项构成的析取范式称为主析取范式。

定理 10：任何一个合式公式，均有唯一的一个主析取范式与该合式公式等价。

由前面介绍的范式和解释的关系及主析取范式的定义可知，公式的每一个完全成真解释对应一个极小项，公式的所有完全成真解释对应的极小项的析取就为主析取范式。求一公式的主析取范式可采用下面两种方法：

（1）根据公式的所有完全成真解释，求出与这些成真解释对应的合取式，所有合取式的

析取就为公式的主析取范式。

（2）将析取范式中的每一个合取式用 $A \vee \neg A$ 填满命题变元，然后用等价公式进行变换，消去相同部分，即得公式的主析取范式。

定义 21：对于 n 个命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，公式 $Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$ 称为极大项，其中 $Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i (i = 1, 2, \cdots, n)$。

定义 22：仅有极大项构成的合取范式称为主合取范式。

定理 11：任何一个合式公式，均有唯一的一个主合取范式与该合式公式等价。

由前面介绍的范式和解释的关系及主合取范式的定义可知，公式的每一个完全成假解释对应一个极大项，公式的所有完全成假解释对应的极大项的合取就为主合取范式。求一公式的主合取范式可采用下面两种方法：

（1）根据公式的所有完全成假解释，求出与这些成假解释对应的析取式，所有析取式的合取就为公式的主合取范式。

（2）将合取范式中的每一个析取式用 $A \wedge \neg A$ 填满命题变元，然后用等价公式进行变换，消去相同部分，即得公式的主合取范式。

1.3　习题解答

习题 1：判断下列语句是否为命题，若是，请翻译为符号公式；若不是，说明理由。

（1）请给我一支笔！

（2）火星上有生物。

（3）$X + Y = 8$。

（4）只有努力工作，方能把事情做好。

（5）如果嫦娥是虚构的，圣诞老人也是虚构的，那么许多孩子受骗了。

解答：

（1）不为命题，因为它不是陈述句。

（2）是命题，用命题变元 P 表示该命题。

（3）不为命题，虽为陈述句，但不能判断其真假性。

（4）是命题，设 P 表示努力工作，Q 表示把事情做好，则原句翻译为命题公式 $Q \to P$。

（5）是命题，设 P 表示嫦娥是虚构的，Q 表示圣诞老人也是虚构的，R 表示许多孩子受骗了，则原句翻译为 $(P \wedge Q) \to R$。

习题 2：试判定下列公式的永真性和可满足性。

（1）$(P \leftrightarrow Q) \to (\neg P \wedge \neg(Q \to \neg R))$

（2）$\neg(P \to Q) \wedge ((Q \leftrightarrow \neg R) \vee \neg P)$

（3）$(\neg\neg P \wedge Q) \to ((Q \to \neg R) \leftrightarrow P)$

（4）$(\neg\neg P \to Q) \to ((Q \wedge R) \leftrightarrow \neg P)$

解答：

（1）当 $P = T$ 时，

原式 $= (T \leftrightarrow Q) \to (\neg T \wedge \neg(Q \to \neg R))$

$= Q \to (F \wedge \neg(Q \to \neg R))$

$=Q \to F$

$=\neg Q$

当 $Q=T$ 时，上式$=F$；当 $Q=F$ 时，上式$=T$。因此公式存在成真解释 $(P,Q,R)=(T,F,x)$，存在成假解释 $(P,Q,R)=(T,T,x)$，故公式可满足，但非永真。

（2）当 $P=T$ 时

原式$=\neg(T \to Q) \wedge ((Q \leftrightarrow \neg R) \vee \neg T)$

$=\neg Q \wedge ((Q \leftrightarrow \neg R) \vee F)$

$=\neg Q \wedge (Q \leftrightarrow \neg R)$

当 $Q=T$ 时

上式$=\neg T \wedge (T \leftrightarrow \neg R)$

$=F \wedge \neg R$

$=F$

当 $Q=F$ 时

上式$=\neg F \wedge (F \leftrightarrow \neg R)$

$=T \wedge \neg\neg R$

$=\neg\neg R$

$=R$

当 $R=T$ 时，上式$=T$。因此公式存在成真解释 $(P,Q,R)=(T,F,T)$，存在成假解释 $(P,Q,R)=(T,T,x)$，故公式可满足，但非永真。

（3）当 $P=T$ 时

原式$=(\neg\neg T \wedge Q) \to ((Q \to \neg R) \leftrightarrow T)$

$=(T \wedge Q) \to (Q \to \neg R)$

$=Q \to (Q \to \neg R)$

当 $Q=T$ 时

上式$=T \to (T \to \neg R)$

$=\neg R$

当 $R=T$ 时，上式$=F$；当 $R=F$ 时，上式$=T$。因此，公式存在成真解释 $(P,Q,R)=(T,T,F)$，存在成假解释 $(P,Q,R)=(T,T,T)$，故公式可满足，但非永真。

（4）当 $P=T$ 时

原式$=(\neg\neg T \to Q) \to ((Q \wedge R) \leftrightarrow \neg T)$

$=(T \to Q) \to ((Q \wedge R) \leftrightarrow F)$

$=Q \to \neg(Q \wedge R)$

$=Q \to (\neg Q \vee \neg R)$

当 $Q=T$ 时

上式$=T \to (\neg T \vee \neg R)$

$=F \vee \neg R$

$=\neg R$

当 $R=T$ 时，上式$=F$；当 $R=F$ 时，上式$=T$。因此，公式存在成真解释 $(P,Q,R)=(T,T,F)$，存在成假解释 $(P,Q,R)=(T,T,T)$，故公式可满足，但非永真。

习题 3：试求下列公式的成真解释和成假解释。

（1）$\neg((P \to Q) \to R) \leftrightarrow (Q \vee R)$

（2）$\neg(P \to Q) \wedge ((Q \leftrightarrow R) \vee P)$

（3）$(\neg\neg P \wedge Q) \to ((Q \to R) \leftrightarrow \neg P)$

（4）$(\neg\neg P \to \neg Q) \wedge (Q \vee (\neg R \wedge P))$

解答：

（1）当 $Q = T$ 时

原式 $= \neg((P \to T) \to R) \leftrightarrow (T \vee R)$

$= \neg(T \to R) \leftrightarrow T$

$= \neg R$

当 $R = T$ 时，上式 $= F$；当 $R = F$ 时，上式 $= T$。

当 $Q = F$ 时

原式 $= \neg((P \to F) \to R) \leftrightarrow (F \vee R)$

$= \neg(\neg P \to R) \leftrightarrow R$

当 $R = T$ 时

上式 $= \neg(\neg P \to T) \leftrightarrow T$

$= \neg T \leftrightarrow T$

$= F$

当 $R = F$ 时

上式 $= \neg(\neg P \to F) \leftrightarrow F$

$= \neg P \leftrightarrow F$

$= P$

当 $P = T$ 时，上式 $= T$；当 $P = F$ 时，上式 $= F$。

因此，公式的成真解释为 $(P,Q,R) = (T,F,F),(x,T,F)$；成假解释为 $(P,Q,R) = (F,F,F),(x,T,T),(x,F,T)$。

（2）当 $P = T$ 时

原式 $= \neg(T \to Q) \wedge ((Q \leftrightarrow R) \vee T)$

$= \neg(T \to Q) \wedge T$

$= \neg Q \wedge T$

$= \neg Q$

当 $Q = T$ 时，上式 $= F$；当 $Q = F$ 时，上式 $= T$。

当 $P = F$ 时

原式 $= \neg(F \to Q) \wedge ((Q \leftrightarrow R) \vee F)$

$= \neg T \wedge (Q \leftrightarrow R)$

$= F \wedge (Q \leftrightarrow R)$

$= F$

因此，公式的成真解释为 $(P,Q,R) = (T,F,x)$；成假解释为 $(P,Q,R) = (T,T,x),(F,x,x)$。

（3）当 $P = T$ 时

原式 $= (\neg\neg T \wedge Q) \to ((Q \to R) \leftrightarrow \neg T)$

$=Q \to ((Q \to R) \leftrightarrow F)$

$=Q \to \neg(Q \to R)$

当 $Q=T$ 时

上式 $=T \to \neg(T \to R)$

$=\neg(T \to R)$

$=\neg R$

当 $R=T$ 时，上式 $=F$；当 $R=F$ 时，上式 $=T$。

当 $Q=F$ 时

上式 $=F \to \neg(F \to R)$

$=T$

当 $P=F$ 时

原式 $=(\neg\neg F \wedge Q) \to ((Q \to R) \leftrightarrow \neg F)$

$=(F \wedge Q) \to ((Q \to R) \leftrightarrow T)$

$=F \to (Q \to R)$

$=T$

因此，公式的成真解释为 $(P,Q,R)=(T,T,F),(T,F,x),(F,x,x)$；成假解释为 $(P,Q,R)=(T,T,T)$。

（4）当 $P=T$ 时

原式 $=(\neg\neg T \to \neg Q) \wedge (Q \vee (\neg R \wedge T))$

$=(T \to \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R)$

$=\neg Q \wedge (Q \vee \neg R)$

当 $Q=T$ 时

上式 $=\neg T \wedge (T \vee \neg R)$

$=F \wedge T$

$=F$

当 $Q=F$ 时

上式 $=\neg F \wedge (F \vee \neg R)$

$=T \wedge \neg R$

$=\neg R$

当 $R=T$ 时，上式 $=F$；当 $R=F$ 时，上式 $=T$。

当 $P=F$ 时

原式 $=(\neg\neg F \to \neg Q) \wedge (Q \vee (\neg R \wedge F))$

$=(F \to \neg Q) \wedge (Q \vee F)$

$=T \wedge (Q \vee F)$

$=Q$

当 $Q=T$ 时，上式 $=T$；当 $Q=F$ 时，上式 $=F$。

因此，公式的成真解释为 $(P,Q,R)=(T,F,F),(F,T,x)$；成假解释为 $(P,Q,R)=(T,T,x),(T,F,T),(F,F,x)$。

习题 4：试写出下列公式的对偶式和内否式。

（1）$(\neg P \wedge Q) \to ((Q \vee \neg R) \wedge P)$

（2）$(P \to \neg Q) \wedge ((Q \vee R) \wedge \neg P)$

（3）$\neg(P \to Q) \wedge ((Q \leftrightarrow \neg R) \vee \neg P)$

（4）$(\neg P \to Q) \vee ((Q \to \neg R) \vee \neg P)$

解答：

（1）内否式为 $(P \wedge \neg Q) \to ((\neg Q \vee R) \wedge \neg P)$；

消去"$\to$"得式子 $\neg(\neg P \wedge Q) \vee ((Q \vee \neg R) \wedge P)$，

对偶式为 $\neg(\neg P \vee Q) \wedge ((Q \wedge \neg R) \vee P)$。

（2）内否式为 $(\neg P \to Q) \wedge ((\neg Q \vee \neg R) \wedge P)$；

消去"$\to$"得式子 $(\neg P \vee \neg Q) \wedge ((Q \vee R) \wedge \neg P)$，

对偶式为 $(\neg P \wedge \neg Q) \vee ((Q \wedge R) \vee \neg P)$。

（3）内否式为 $\neg(\neg P \to \neg Q) \wedge ((\neg Q \leftrightarrow R) \vee P)$；

消去"$\to$"和"$\leftrightarrow$"得式子 $\neg(\neg P \vee Q) \wedge (((\neg Q \vee \neg R) \wedge (Q \vee R)) \vee \neg P)$，

对偶式为 $\neg(\neg P \wedge Q) \vee (((\neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge R)) \wedge \neg P)$。

（4）内否式为 $(P \to \neg Q) \vee ((\neg Q \to R) \vee P)$；

消去"$\to$"得式子 $(P \vee Q) \vee ((\neg Q \vee \neg R) \vee \neg P)$，

对偶式为 $(P \wedge Q) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \wedge \neg P)$。

习题 5：试证明联结词集合$\{\neg, \to\}$是完备的。

证明：

因为，$P \vee Q = \neg P \to Q$

$P \wedge Q = \neg(P \to \neg Q)$

所以，联结词集合$\{\neg, \to\}$可以表示集合$\{\neg, \wedge, \vee\}$。

又因为，联结词集合$\{\neg, \wedge, \vee\}$是完备的，即$\{\neg, \wedge, \vee\}$可以表示任何一个命题演算公式，所以$\{\neg, \to\}$可以表示任何一个命题演算公式，故联结词集合$\{\neg, \to\}$是完备的。

习题 6：试证明联结词集合$\{\wedge\},\{\to\}$不是完备的。

证明：

设集合$\{\wedge\}$是完备的，则由联结词集合的完备性定义知$\neg P = f(P,Q,R,\cdots) = P \wedge Q \wedge R \wedge \cdots$。当$P,Q,R,\cdots$全取为真时，上式左边$=F$，右边$=T$，矛盾。

因此$\{\wedge\}$不是完备的。

设集合$\{\to\}$是完备的，则由联结词集合的完备性定义知$\neg P = f(P,Q,R,\cdots)$，其中f表示"$\to$"。当$P,Q,R,\cdots$全取为真时，上式左边$=F$，右边$=T$，矛盾。

因此$\{\to\}$不是完备的。

习题 7：试求下列公式的析取范式和合取范式。

（1）$(\neg P \vee Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

（2）$(P \to (Q \to \neg R)) \to (R \to (Q \to P))$

（3）$\neg(P \to Q) \wedge ((Q \to \neg R) \vee \neg P)$

（4）$(P \leftrightarrow Q) \to (\neg P \wedge \neg(Q \to \neg R))$

解答：

（1）原式$= \neg(\neg P \vee Q) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg\neg Q))$

$=(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$=(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$（析取范式）

$=((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee Q)$

$=(P \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)$

$=(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$（合取范式）

（2）原式$=\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee \neg R)) \vee (\neg R \vee (\neg Q \vee P))$

$=(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$=(P \vee P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (Q \vee P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$=P \vee \neg Q \vee \neg R$（合取范式和析取范式）

（3）原式$=\neg(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee \neg R) \vee \neg P)$

$=P \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$（合取范式）

$=(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$=((P \wedge \neg Q) \wedge \neg P) \vee ((P \wedge \neg Q) \wedge \neg Q) \vee ((P \wedge \neg Q) \wedge \neg R)$

$=(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$（析取范式）

（4）原式$=\neg(P \leftrightarrow Q) \vee (\neg P \wedge \neg(\neg Q \vee \neg R))$

$=(\neg P \leftrightarrow Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$=(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$（析取范式）

$=((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$=((\neg P \wedge Q) \vee P) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q)) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$=((\neg P \vee P) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$=((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$=((P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R))$

$=(P \vee Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q \vee Q) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P) \wedge$
$(\neg P \vee \neg Q \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$=(P \vee Q) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$（合取范式）

习题 8：试求下列公式的主析取范式和主合取范式。

（1）$(\neg P \to R) \to (\neg P \leftrightarrow (\neg Q \wedge R))$

（2）$(\neg\neg P \wedge Q) \to ((Q \to R) \leftrightarrow \neg P)$

（3）$(P \to \neg Q) \vee R$

（4）$P \to (P \wedge (Q \to P))$

解答：

（1）原式$=\neg(\neg\neg P \vee R) \vee ((\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge R)))$

$=(\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge (Q \vee \neg R))$

$=(\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg R)$

$=((\neg P \wedge \neg R) \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee ((P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R))$
$\vee ((P \wedge \neg R) \wedge (Q \vee \neg Q))$

$=(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$
$\vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$=(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

$\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$=\sum(0,1,2,4,6,7)$

$=\prod(3,5)$

$=(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

（2）原式$=\neg(\neg\neg P\wedge Q)\vee((\neg Q\vee R)\leftrightarrow\neg P)$

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee((\neg Q\vee R)\wedge\neg P)\vee(\neg(\neg Q\vee R)\wedge P)$

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$

$=(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge(R\vee\neg R))\vee(\neg Q\wedge(P\vee\neg P)\wedge(R\vee\neg R))\vee$

$((\neg P\wedge\neg Q)\wedge(R\vee\neg R))\vee((\neg P\wedge R)\wedge(Q\vee\neg Q))\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$

$=(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee$

$(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee$

$(P\wedge Q\wedge\neg R)$

$=(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$

$=\sum(0,1,2,3,4,5,6)$

$=\prod(7)$

$=\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$

（3）原式$=\neg P\vee\neg Q\vee R$

$=\prod(6)$

$=\sum(0,1,2,3,4,5,7)$

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\vee R)\vee(\neg P\vee Q\vee\neg R)\vee(\neg P\vee Q\vee R)$

$\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

（4）原式$=\neg P\vee(P\wedge(\neg Q\vee P))$

$=(\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee P)$

$=T\vee T$

$=T$

$=\prod(\Phi)$

$=\sum(0,1,2,3)$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$

习题 9：用把公式化为主范式的方法判断下列各题中两式是否等价。

（1）$(P\to Q)\to(P\wedge Q),(\neg P\wedge Q)\wedge(Q\to P)$

（2）$(P\to R)\wedge(Q\to R),(P\vee Q)\to R$

解答：

（1）$(P\to Q)\to(P\wedge Q)$

$=\neg(\neg P\vee Q)\vee(P\wedge Q)$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$