21世纪高等学校数学学习辅导教材

线性代数
复变函数
概率统计
习题全解

上册

陈小柱　张立卫　编著

（同济二版·三版·西安交大四版·浙大二版）

大连理工大学出版社

21世纪高等学校数学学习辅导教材

线性代数·复变函数·概率统计习题全解

上册

（同济二版、三版·西安交大四版·浙大二版）

陈小柱　张立卫　编著
冯士英　聂续昀　主审

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数·复变函数·概率统计习题全解(上册)/陈小柱，张立卫编著.—大连：大连理工大学出版社，2000.10(2002.1重印)
(21世纪高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-1677-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①陈… ②张… Ⅲ.高等数学-高等学校-辅导 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(99)第35616号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河　邮政编码　116024
电话：0411-4708842　传真：0411-4701466
E-mail：dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL：http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷

开本：850毫米×1168毫米　1/32　字数：151千字　印张：6.125
印数：76001—82000册
1999年8月第1版　2002年1月第10次印刷

责任编辑：刘　杰　责任校对：习　文
封面设计：孙宝福

定价：21.00元(本册7.00元)

卷首赠言

知识是引导人生到达

光明与真实境界的光烛。

——李大钊(1889—1927)

(在燕园李大钊教授铜像前,仿佛能听到他穿越时光的声音)

高年级大学生、研究生以及青年教师,经过努力可以胜过老师,而且应该鼓励他们尽早胜过老师。

——江泽涵(1902—1994)

(摘自《中国科学院院士自述》)

前言

当人类即将迈入21世纪之际，世界对各类人才的需求正在发生着深刻的变化。作为人才培养基地的高校，正在探索着培育人才的新模式，以适应客观世界的需求。

相比于十多年前的学生，当今及未来的学生需投入更多的时间、精力来学习外语及计算机。而这对大学数学课的教与学均提出了前所未有的挑战。

当大学数学的课时被迫削减之后，教师有了“教材内容无法完全展开讲授”之苦；而学生在有限的精力被分割后，学习大学数学常常会发生“食而不化”的现象。考研及后续专业课，对大学数学的学习又有较高的要求。

由于大学数学早已渗透到现代科学的各个学科，未来的新兴学科仍需借助数学工具进行表述。未来社会所需要的一大批通才、栋梁之才，非有扎实的数学功底不可。

正是为了化解这一矛盾，我们编写了这本具有工具书性质的《线性代数 · 复变函数 · 概率统计习题全解》，以期学生通过大学期间**不间断地反复自学**来弥补不足，

打牢数学底子。因此，理工科大学一年、二年、三年、四年，必要时，甚至以后的学习阶段，均宜备有此书，以便自学查阅。

全书分为上册、中册、下册，分别与下列教材相配套：同济二版、三版《线性代数》，西安交大四版《复变函数》及浙大二版《概率论与数理统计》，全部习题均有详细的解答。

书中在每章之首，均缀有一篇导学。初学者在看书时，常常"只见树木，不见森林"，而"导学"侧重于帮您透视脉络，从细节的认识升华到全盘的认识。本书是已多次再版的《高等数学习题全解》的姊妹篇，并与《考研数学真题全解及考点分析》系列辅导相呼应，形成系统的知识体系。

本书由冯士英教授、聂续昀副教授担任主审，蔡颖同志也提出了宝贵的意见。

限于编者水平，加之时间仓促，不妥之处难免存在，恳请广大读者提出批评和指正！

编　者

2000年9月

目　录

卷首赠言

前　言

上　册

线性代数习题全解及导学(同济二版、三版)

上 册

线性代数习题全解及导学

（与同济二版、三版《线性代数》相配套）

如果不想在世界上虚度一生，那么就要学习一辈子。

——高尔基

第一章　★n 阶行列式(第二版)

> 真理往往朴素，以致人们不相信它。
>
> ——列瓦尔特

导学

本章的 §2 构成 §1，§2 和 §3 的核心：行列式的定义 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$。§1 主要是会算 $t=?$。§3 中指出D也可定义为 $\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$。

§4，§5 和 §6 的关键为降阶公式：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D,当\ i=j\\0,当\ i\neq j\end{cases}$$

它既是算D的工具，又能推导出 §6 的克莱姆法则。对于 §4 中的性质宜相当熟练地掌握。

不要记反了记号：c_i+kc_j 和 r_i+kr_j 的含义。此记号在第三章 §6 以后不断用到。

考研中曾考过的范德蒙行列式在第五章 §2 被用到，它的证明思路要会用。

化为三角形计算行列式时，把元素 1 调到 a_{11} 位置，可避免分数计算；当某一行(或列)有许多 0 时，应该立即想到降阶展开公

式。

读者自己摸索出的经验越多,解题时就会越有办法。

习题全解

1. 按自然数从小到大的标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1)1 2 3 4; (2)4 1 3 2;

(3)3 4 2 1; (4)2 4 1 3;

(5)1 3 … $(2n-1)$ 2 4…$(2n)$;

(6)1 3 …$(2n-1)(2n)(2n-2)$…2

解

(1) 逆序数为 0

(2) 逆序数为 4:4 1, 4 3, 4 2, 3 2

(3) 逆序数为 5:3 2, 3 1, 4 2, 4 1, 2 1

(4) 逆序数为 3:2 1, 4 1, 4 3

(5) 逆序数为$\dfrac{n(n-1)}{2}$:

3 2 1 个

5 2,5 4 2 个

7 2,7 4,7 6 3 个

……………… …

$(2n-1)2,(2n-1)4,(2n-1)6,\cdots,(2n-1)(2n-2)$ $(n-1)$ 个

(6) 逆序数为 $n(n-1)$:

3 2 1 个

5 2,5 4 2 个

……………… …

$(2n-1)2,(2n-1)4,\cdots,(2n-1)(2n-2)$ $(n-1)$ 个

4　2	1 个
6　2,6　4	2 个
……………	…
$(2n)2,(2n)4,\cdots,(2n)(2n-2)$	$(n-1)$ 个

2. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解　由定义知，四阶行列式的一般项为

$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，其中 t 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数。由于 $p_1=1,p_2=3$ 已固定，$p_1p_2p_3p_4$ 只能形如 13□□，即 1324 或 1342。对应的 t 分别为

$$0+0+1+0=1 \text{ 或 } 0+0+0+2=2$$

$\therefore -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求。

3. 计算下列各行列式：

$$(1)\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix};\quad (2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(3)\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & ef \end{vmatrix};\quad (4)\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

解

$$(1)\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-7c_3]{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \times (-1)^{4+3} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+\frac{1}{2}c_3]{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4-c_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(3) $$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$$

$$= adfbce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4abcdef$$

(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$= (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 + dc_2}$

$\begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & cd \end{vmatrix}$

$= abcd + ab + cd + ad + 1$

4. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$；

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)$$

$$\cdot (c-d)(a+b+c+d);$$

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

证明

(1) 左边 $\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(b-a) \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^3 = \text{右边}$$

$$(2)\ \text{左边} \xlongequal[\text{分开}]{\text{按第一列}} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$+\,b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \xlongequal{\text{分别再分}} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}$$

$$+\,0+0+b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ z & y & ay+bz \end{vmatrix} \xlongequal{\text{分别再分}} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$+\,b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ z & y & z \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}(-1)^2$$

$$= \text{右边}$$

$$(3)\ \text{左边} = \begin{vmatrix} a^2 & a^2+(2a+1) & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & b^2+(2b+1) & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & c^2+(2c+1) & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & d^2+(2d+1) & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-c_1}]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal[\text{分成两项}]{\text{按第二列}} 2\begin{vmatrix} a^2 & a & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & b & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & c & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & d & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\text{第二项}\begin{smallmatrix} c_3-4c_2 \\ c_4-9c_2 \end{smallmatrix}]{\text{第一项}\begin{smallmatrix} c_3-4c_2 \\ c_4-6c_2 \end{smallmatrix}} 2\begin{vmatrix} a^2 & a & 4 & 9 \\ b^2 & b & 4 & 9 \\ c^2 & c & 4 & 9 \\ d^2 & d & 4 & 9 \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a & 6a \\ b^2 & 1 & 4b & 6b \\ c^2 & 1 & 4c & 6c \\ d^2 & 1 & 4d & 6d \end{vmatrix} = 0
$$

(4) 左边 $=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$