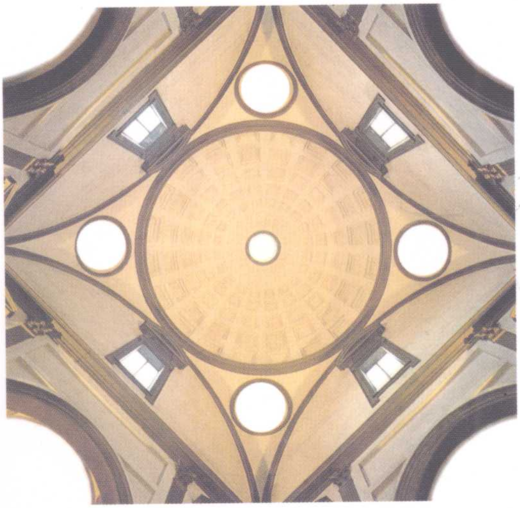
高校教材

Advanced Mathematics

物理、电子、计算机类专业适用



高等数学

下

主编◎陈世兴　张建成

华东师范大学出版社

高等数学 下

物理、电子、计算机类专业适用

主　　编　陈世兴　张建成
编写人员（按姓氏笔画排列）
王灿照　苏连塔　张纪平
张建成　陈世兴　程广文

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/陈世兴,张建成主编. —上海:华东师范大学出版社,2008.3

物理、电子、计算机类专业适用

ISBN 978-7-5617-5915-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈…②张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 029197 号

高等数学(下)

(物理、电子、计算机类专业适用)

主　　编　陈世兴　张建成
项目编辑　朱建宝
文字编辑　蒋可玉
封面设计　卢晓红
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
销售业务电话　高教分社 021-62235021　021-62237614(传真)
基教分社 021-62237610　021-62602316(传真)
教辅分社 021-62221434　021-62860410(传真)
综合分社 021-62238336　021-62237612(传真)
北京分社 021-62235097　021-62237614(传真)
010-82275258　010-82275049(传真)
编辑业务电话　021-62572474
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　上海华成印刷装帧有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　23
字　　数　473 千字
版　　次　2008 年 4 月第 1 版
印　　次　2008 年 4 月第 1 次
印　　数　5100
书　　号　ISBN 978-7-5617-5915-8/N·113
定　　价　36.00 元

出 版 人　朱杰人

前言

本教材依据教育部颁发的《高等数学课程教学基本要求》，组织长期在高校教学第一线的教师编写.该教材的目标定位为:适合地方性高校的教学实际，面向物理类、电子信息类和计算机类本科专业.

编写中，我们着眼于物理类、电子信息类和计算机类本科专业对高等数学的需求对内容进行取舍，概念的引入、例题和习题的选用都尽量联系专业知识.我们力求做到:循序渐进，由浅入深;叙述简洁，概念明了;突出重点，分散难点.重要概念和重要理论讲述前，重视知识背景的阐述，旨在使学生增强用数学解决实际问题的意识和准确理解、把握知识.为了使初学的学生易于掌握，我们设置较多的例题;为了帮助学生准确理解概念、掌握方法，我们每章安排有小结.

考虑到学与练紧密结合的重要性，每节安排的习题紧扣重点，并由易到难;考虑到学生考研的需要，每一章我们还安排了复习题.复习题分成两类，一类是综合性的基本题，可用于学生复习;另一类是有一定难度的题目，是为准备考研学生设置的.为了教学的方便和学生自学的需要，书后附有习题的参考答案，并给出了有一定难度的证明题的提示.

本教材共有12章，分上、下两册.上册内容有一元微积分、常微分方程、无穷级数;下册有空间解析几何、线性代数、多元微积分.建议教学时数在220学时左右.

参加本书编写的有:张纪平(第1、2、3章)，苏连塔(第4、5章)，张建成(第6、7章)，王灿照(第8、9章)，程广文(第10、11、12章).最后全书由张建成、陈世兴汇总定稿.

由于我们水平有限，书中难免有不足或错误，恳请广大读者批评指正.

编　者

2008年3月

目录

第 8 章　空间解析几何

学习多元函数微积分学的知识，必须以空间解析几何的基本知识为基础.

空间解析几何是平面解析几何的直接推广，它也是以直角坐标系为桥梁，把空间图形与三元方程对应起来，用代数的方法来研究几何问题.

本章要研究的空间图形，主要是空间的平面、直线和常见的曲面、曲线.

应用向量的概念和运算的知识，可以极大地简化空间解析几何的推理和运算，所以向量代数是学习空间解析几何的重要工具，而且它本身在物理及数学其他分支中也有广泛的应用. 因此，本章首先介绍向量代数的知识.

8.1　向 量 代 数

8.1.1　空间直角坐标系

在平面直角坐标系的基础上，过原点 O 再引一条数轴——z 轴(竖轴)与 x 轴、y 轴垂直，并使三条坐标轴的正向满足右手法则，即当右手的四指从 x 轴正向作 90° 的旋转，转向 y 轴正向时，大拇指的指向是 z 轴的正向. 三条坐标轴的长度单位，可以相同也可以不同. 这样，就得到**空间直角坐标系**.

空间直角坐标系中，任两条坐标轴决定一个平面，称为**坐标平面**，例如称 x 轴、y 轴所确定的坐标面为 xOy 平面. 三个坐标平面把空间分成八个部分，每一部分叫**卦限**. 含有三个坐标轴正向的卦限，称为第Ⅰ卦限，在 xOy 平面上部，可依次得Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个卦限. 在 xOy 平面下部与第Ⅰ卦限相对的为第Ⅴ卦限，再依次得Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ几个卦限(图 8-1).

给定空间任一点 P，过 P 分别作 yOz、zOx、xOy 三个坐标平面的平行平面，交 x、y、z 轴于点 A、B、C，设 A、B、C 三点在三条坐标轴上的坐标依次为 x、y、z，则 (x, y, z) 称为点 P 在这个坐标系中的**坐标**(图 8-2).

显然空间任一确定的点，都有确定的三个实数的有序数组与之对应，而且不同的点有不同的数组与之对应；反之，任给有序数组 (x, y, z)，可在 x、y、z 轴上，分别取坐标为 x、y、z 的三个点 A、B、C，过 A、B、C 分别作 yOz、zOx、xOy 坐标平面的平行平面，它们的交点 P 就是以数组 (x, y, z) 为坐标的点. 于是就在空间

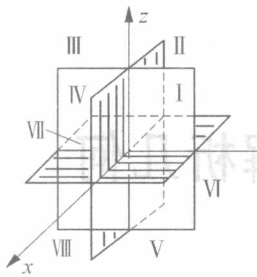


图 8－1

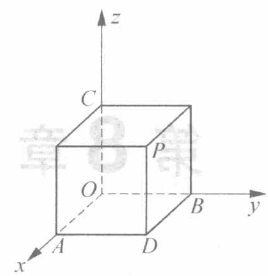


图 8－2

点集与三个实数的有序数组集合之间建立了一一对应关系，表示为

$$P \longleftrightarrow (x,\ y,\ z).$$

如果点 P 的坐标为$(x,\ y,\ z)$，则 P 点到原点 O 的距离$|OP|$可用勾股定理求出（见图 8－2）：

$$|OP| = \sqrt{|OD|^2 + |DP|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

想一想：若已知空间两点 A、B 的坐标，怎样计算 A、B 间的距离$|AB|$？

8.1.2　三维向量的概念

许多物理量，如力、位移、速度和加速度，都有量值和方向两个因素，这样的量称为**向量**（或矢量）. 向量可以用有次序的一对点 P、Q 来描述，我们把它称为从 P 到 Q 的向量，且通常记为 $\boldsymbol{PQ}$（或 $\overrightarrow{PQ}$），P 叫做它的始点，Q 叫做它的终点. 此外，有时也用一个黑体字母来表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 等.

与始点无关，可以平移的向量叫**自由向量**. 凡具有相同长度和相同方向的自由向量，都认为是相等的. 物理学中有些向量是与始点有关的，如力矩，这样的向量叫**约束向量**. 本章下面提到的向量如不加特别说明，都指的是自由向量.

考虑到向量可以平移的约定，可以把空间所有向量的始点认为都在原点. 这样每一点 P 都决定了一个向量 $\boldsymbol{OP}$，称为点 P 的位置矢量，简称为**位矢**. 显然不同的点对应着不同的位矢，而每一个位矢，也都有它的终点与之对应. 这样，就在空间点集和始点在原点的自由向量的集合之间建立了一一对应关系：

$$P \longleftrightarrow \boldsymbol{OP},$$

从而也就在向量集与三个实数的有序数组的集合之间建立了一一对应关系：

$$\boldsymbol{OP} \longleftrightarrow (x,\ y,\ z).$$

为了方便，如点 P 的坐标为$(x,\ y,\ z)$，可记为

$$\boldsymbol{OP} = (x,\ y,\ z),$$

并称(x, y, z)为向量 $\boldsymbol{OP}$ 在该坐标系中的坐标. 下面通常将用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$…来表示向量.

显然,两个相等的向量,一定具有完全相同的坐标.

因为在空间中,任一向量都可由三个独立的有序实数来唯一地决定,所以称这样的向量为三维向量.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度(或叫模)记为$|\boldsymbol{\alpha}|$,如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在直角坐标系的坐标为(x, y, z),则$|\boldsymbol{\alpha}|$就是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点到原点的距离,即

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{8-1}$$

长度为零的向量称为**零向量**,用 $\boldsymbol{O}$ 来表示,它的方向可看作任意的. 要注意零向量与数零的区别,显然

$$\boldsymbol{O} = (0, 0, 0).$$

长度为 1 的向量称为**单位向量**,例如$(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$都是单位向量,又如在直角坐标中,$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$也是单位向量.

与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的大小相等、方向相反的向量,叫做 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量,记为$-\boldsymbol{\alpha}$,如果 $\boldsymbol{\alpha} = (x, y, z)$,则显然

$$-\boldsymbol{\alpha} = (-x, -y, -z).$$

8.1.3 向量的线性运算

向量的线性运算包括向量的加法和数与向量的乘法.

8.1.3.1 向量的加法

定义 8.1 若$\boldsymbol{\alpha}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,它们的和$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 是这样的向量:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

向量加法的几何意义是:若 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{OB}$,过 A、B 分别引 $\boldsymbol{OB}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 的平行线,两直线交于点 C,则 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{OC}$. 因为四边形 $OACB$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为邻边的平行四边形,OC 是它的对角线,求两向量和的这个几何方法叫做**平行四边形法则**.

为了证明这个法则,分别过 A、B、C 作 z 轴的平行线,交 xOy 平面于点 A'、B'、C'(图 8-3). 利用三角形全等关系,容易得出 C'的横坐标,也即 C 的横坐标为 $x_1 + x_2$,同理可得 C 的纵坐标为 $y_1 + y_2$. 如果把 A、B、C 投影到 yOz 平面,可得 C 的立坐标为 $z_1 + z_2$. 可见 $\boldsymbol{OC}'$恰好是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的和.

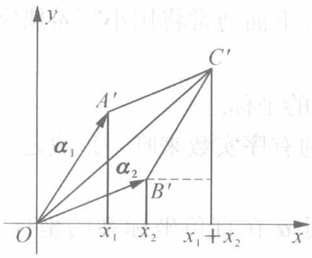


图 8-3

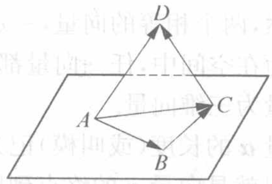


图 8-4

由于向量可以平移，又有向量加法的三角形法则：$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AC}$（图 8-4），即若第一向量终点与第二向量始点重合，则这两向量的和为从第一向量始点引向第二向量终点的向量.

三角形法则容易应用到若干个向量的和(如图 8-4)，

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{CD}=\boldsymbol{AD}.$$

从向量加法的三角形法则，可以得到向量模长的三角形不等式：

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}| \tag{8-2}$$

当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 同向时等号成立.

向量加法满足下列性质：

1° 交换律. 即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

2° 结合律. 即 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

3° 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

4° 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$.

证明请读者完成.

向量的减法定义为：若 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$，就称 $\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差，记为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.

显然 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 减去 $\boldsymbol{\beta}$，就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 加上 $\boldsymbol{\beta}$ 的负向量 $-\boldsymbol{\beta}$.

两向量的差也可用三角形法则求出：$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB}$，即两向量有公共始点，它们的差为减向量终点引向被减向量终点的向量(图 8-5).

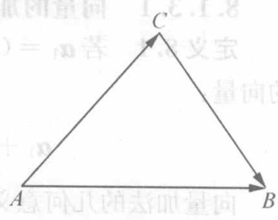


图 8-5

如果 $\boldsymbol{OM}_1=(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{OM}_2=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\boldsymbol{M_1M_2}=\boldsymbol{OM}_2-\boldsymbol{OM}_1=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$

因为点 M_1 与 M_2 的距离就是向量 $\boldsymbol{M_1M_2}$ 的长度 $|\boldsymbol{M_1M_2}|$，所以空间任意两点的距离公式为

$$|\boldsymbol{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{8-3}$$

8.1.3.2 数与向量的乘法

定义 8.2 实数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x, y, z)$ 的乘积规定为

$$k\boldsymbol{\alpha}=(kx, ky, kz),$$

例如
$$-2(1, 0, -3)=(-2, 0, 6).$$

数与向量的乘积的几何意义是:实数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积是这样的向量 $k\boldsymbol{\alpha}$,它的长度为 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 的 $|k|$ 倍,即 $|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|$;当 k 为正数时,它的方向与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相同;当 k 为负数时,它的方向与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相反. 如果 $k=0$,它就成为零矢量;如果 $k=-1$,即得 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$. 图 8-6所表示的是 k 为大于 1 的正数的情况.

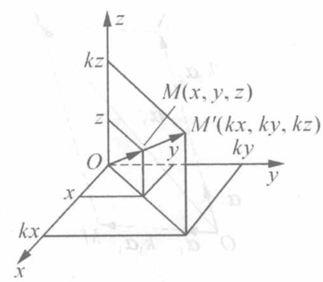


图 8-6

数与向量的乘法满足下列性质:

1° $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

2° $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

3° $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$;

4° $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

其中 k、l 为任意实数,$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 为任意向量.

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是任一长度不等于 1、也不等于零的向量,与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同方向的单位向量为 $\boldsymbol{\alpha}^0$,则

$$\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}^0,$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$. 所以求与给定的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向的单位向量,只要用 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 的倒数去乘 $\boldsymbol{\alpha}$ 即可. 这个过程叫做把向量单位化.

例如,若 $\boldsymbol{\alpha}=(-1, 4, 3)$,与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{\alpha}^0=\frac{1}{\sqrt{(-1^2)+4^2+3^2}}(-1, 4, 3)$$
$$=\left(\frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}\right).$$

8.1.3.3 向量的分解

如果 $\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 有公共起点,则显然 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 所决定的平面上,也即 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面. 反之,在一个平面上给定任意三个有共同起点 O 且两两不共线的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$,由向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的终点 C 引两条平行于 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的直线,分别交 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 所在的直线于 M, N,则总存在实数 k_1、k_2,使

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{OM}+\boldsymbol{ON}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

这称为 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 对 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的分解(图 8－7). 又称 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

假定 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非共面向量,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 是任一向量,把它们都移到公共起点 O,由向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 的终点 D 作三个平面,分别平行于 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 决定的平面,$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 决定的平面与 $\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_1$ 决定的平面,交 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 所在直线于 L、N、M,则总存在实数 k_1、k_2、k_3,使 $\boldsymbol{OL}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{ON}=k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{OM}=k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,于是

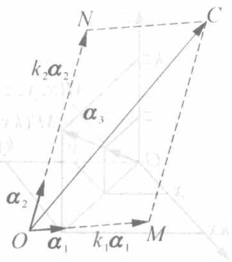


图 8－7

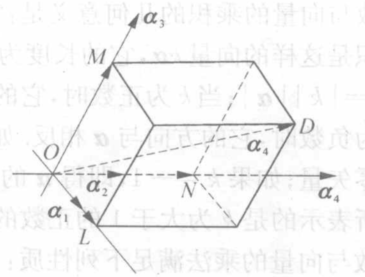


图 8－8

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{OL}+\boldsymbol{ON}+\boldsymbol{OM}=k\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

这称为 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 对 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的分解(图 8－8). 又称 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

在直角坐标系中,令

$$(1,\ 0,\ 0)=\boldsymbol{i},\ (0,\ 1,\ 0)=\boldsymbol{j},\ (0,\ 0,\ 1)=\boldsymbol{k},$$

则 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是两两垂直的单位向量,这三个单位矢量叫做**基本单位矢量**. 常用 $[O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]$ 来表示这个直角坐标系.

给定非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$,把它们平移到共同始点 O,并设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{OB}$,由点 A 向 $\boldsymbol{OB}$ 所决定的数轴 l 作垂线,垂足为 H. 称 $\boldsymbol{OH}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的**正射影向量**,简称**射影**. 点 H 在数轴 l 上的坐标,称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的分量(或称为投影),记为 $Prj_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}$,或 $Prj_l\boldsymbol{\alpha}$. 显然

$$Prj_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{\alpha}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}}),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}})=\theta$ 规定为:把它们平移到有共同始点 O 时,两向量所在半射线的夹角,并约定是一个不大于 180° 的无向角(即与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的排列顺序无关),见图 8－9. 于是

图 8－9

当 $(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}})$ 为锐角时,

$$Prj_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha} > 0,$$

当$(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}})$为直角时，

$$Prj_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha} = 0,$$

当$(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}})$为钝角时，

$$Prj_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha} < 0.$$

在直角坐标系$[O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]$中(图 8 - 10)，给定 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{OP} = (x,\ y,\ z)$，设它在 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 三个方向上的射影为 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$，又设点 P 在 xOy 平面上的正投影为 M，则

$$\boldsymbol{OA} = x\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{OB} = y\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{OC} = z\boldsymbol{k}.$$

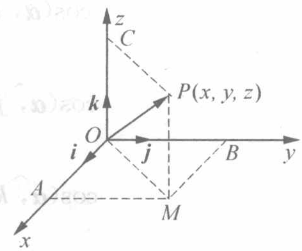


图 8 - 10

且

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AM} + \boldsymbol{MP} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OC} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

这个式子称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标分解式. 其中 x、y、z 就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 i、j、k 三个方向上的分量.

设
$$\boldsymbol{\alpha} = (x_1,\ y_1,\ z_1) = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\beta} = (x_2,\ y_2,\ z_2) = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k},$$

由于向量线性运算所满足的性质，有

$$\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta} = (x_1 \pm x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 \pm y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 \pm z_2)\boldsymbol{k}, \tag{8-4}$$

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} = \lambda x_1\boldsymbol{i} + \lambda y_1\boldsymbol{j} + \lambda z_1\boldsymbol{k} \quad (\lambda \in \mathbf{R}). \tag{8-5}$$

8.1.3.4 向量的方向角和方向余弦

定义 8.3 $(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{i}})$、$(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{j}})$、$(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{k}})$**称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向角，它们的余弦值称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向余弦.**

设 $\boldsymbol{\alpha} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，则有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{i}}) = \frac{x}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{j}}) = \frac{y}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{k}}) = \frac{z}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

从而有

$$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{i}}) + \cos^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{j}}) + \cos^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{k}}) = 1.$$

即任一向量的三个方向余弦的平方和恒等于 1.

例如向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1, -2, 3)$ 的方向余弦为

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{i}}) = \frac{1}{\sqrt{1+(-2)^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{j}}) = \frac{-2}{\sqrt{14}},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{k}}) = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

8.1.3.5 向量线性运算的一些应用

(1) 求已知线段的定比分点的坐标. 设空间两点 M_1、M_2 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) 与 (x_2, y_2, z_2)，在线段 M_1M_2 中间求一点 $M(x, y, z)$，使 $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$，$\lambda$ 为正实数.

根据给定的条件有

$$\boldsymbol{M_1M} = \lambda \boldsymbol{MM_2},$$

从图 8－11 可以得出

$$\boldsymbol{M_1M} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{OM_1},$$
$$\boldsymbol{MM_2} = \boldsymbol{OM_2} - \boldsymbol{OM}.$$

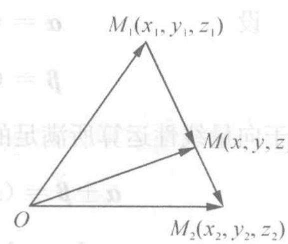


图 8－11

于是有

$$\boldsymbol{OM} - \boldsymbol{OM_1} = \lambda \boldsymbol{MM_2} = \lambda \boldsymbol{OM_2} - \lambda \boldsymbol{OM},$$

$$\boldsymbol{OM} = \frac{\boldsymbol{OM_1} + \lambda \boldsymbol{OM_2}}{1+\lambda},$$

即
$$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2).$$

根据相等的向量有完全相同的坐标，可求得点 M 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (8-6)$$