高等代数

典型问题和方法选讲

姜秀燕 编著

哈尔滨地图出版社

高等代数典型问题和方法选讲

GAODENG DAISHU DIANXING WENTI HE FANGFA XUANJIANG

姜秀燕　编著

哈尔滨地图出版社

·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

高等代数典型问题和方法选讲/姜秀燕编著.—哈尔滨：哈尔滨地图出版社，2005.3
ISBN 7-80717-038-7

Ⅰ.高… Ⅱ.姜… Ⅲ.高等代数 Ⅳ.o15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 022697 号

哈尔滨地图出版社出版发行
（地址：哈尔滨市南岗区测绘路 2 号　邮编：150086）
哈尔滨翰翔印务有限公司印刷
开本：850 mm×1 168 mm　1/32　印张：6.875　字数：190 千字
2005 年 3 月第 1 版　2005 年 3 月第 1 次印刷
印数：1～100　定价：25.00 元

前　言

高等代数是数学系各专业的一门重要基础课，它的重要性不仅在于其内容是后续课必不可少的基础，而且在于其解决问题的思想和方法对继续学习和研究都具有相当意义。这门课程的特点是比较抽象，概念比较多，定理比较多，前后联系紧密，环环紧扣，相互渗透。学生在初学或备考研究生复习时，会遇到许多困难，特别是解题时缺少方法，以至一筹莫展。

笔者曾多次为本科生开设高等代数方法选讲课及进行考研辅导，本书就是在此基础上形成的。本书旨在对大学学习高等代数和线性代数的学生及备考研究生的理科学生提供方法上的帮助，本书也可作为高等代数和线性代数的教师参考书。

本书分为八章，每章包括基础知识和基本理论、基本方法、典型例题三个版块。首先概括给出必须掌握的基本概念、定理，然后总结出一些常用的基本方法，最后配以典型例题，其中一些例题是研究生入学试题，有一定的难度与深度，具有典型性与广泛性。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误与不当之处在所难免，恳请专家和广大读者批评指正。

编　者

2005 年 3 月

目　录

第一章 多项式

基础知识和基本理论

一、 整除理论

1. 基本概念

（1）整除

数域 F 上的多项式 g(x) 称为整除 f(x)，如果有数域 F 上的多项式 q(x)，使 f(x)=g(x)q(x) 成立。

（2）最大公因式

设 f(x)，g(x) 是数域 F 上的多项式环 F[x] 中两个多项式，如果它满足下面两个条件：1) d(x) 是 f(x)，g(x) 的公因式；2) f(x)，g(x) 的公因式全是 d(x) 的因式。

（3）互素

F[x] 中两个多项式 f(x)，g(x) 称为互素的，如果 f(x)，g(x) 的最大公因式 (f(x)，g(x)) = 1。

2. 基本性质

（1）如果 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，那么 $f(x)=cg(x)$，其中 c 为非零常数。

（2）如果 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，那么 $f(x)\mid h(x)$

（3）$f(x)\mid g_i(x), i=1,2,\cdots,r$，那么 $f(x)\left|\sum_{i=1}^{r}u_i(x)g_i(x)\right.$，其中 $u_i(x)$ 是数域 F 上任意多项式。

（4）对于 F[x] 中任意两个多项式 f(x)，g(x)，其中 $g(x)\neq 0$，F[x] 中一定有多项式 q(x)，r(x) 存在，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立，其中 r(x) 的次数小于 g(x) 的次数或者 r(x) 的次数等于零，并

且这样的 q(x), r(x)是唯一确定的。

(5) 对于任意两个多项式 f(x), g(x)，其中 g(x)≠0, 则 g(x) | f(x)的充分必要条件是 g(x)除 f(x)的余式为零。

(6) 对于 F[x]中任意两个多项式 f(x), g(x)，在 F[x]中存在一个最大公因式 d(x)，且

$$d(x)= u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

(7) F[x]中两个多项式 f(x), g(x)互素的充分必要条件是有 F[x]中的多项式 u(x), v(x)使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x) = 1$$

(8) 如果 (f(x), g(x)) = 1，且 f(x) | g(x)h(x)，那么 f(x) | h(x)

(9) 如果 $f_1(x)|g(x), f_2(x)|g(x)$，且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$

那么 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$。

二、 因式分解理论

1. 基本概念

(1) 不可约多项式

数域F上次数 ≥1 的多项式 p(x) 称为数域F上的不可约多项式，如果它不能数域 F 上的两个次数比 p(x) 低的多项式的乘积。

(2) 重因式

不可约多项式 p(x) 称为多项式 f(x)的 k 重因式，如果

$p^k(x)|f(x)$，但 $p^{k+1} \nmid f(x)$。

(3) 本原多项式

如果一个非零的整系数多项式

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的系数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$

互素，则称 $f(x)$ 是本原多项式。

2. 基本性质

（1）不可约多项式的性质

i) 设 p(x) 是不可约多项式，f(x) 为任意多项式，则 p(x)|f(x) 或 (f(x), p(x)) = 1。

ii) 如果 p(x) 是不可约多项式，那么对于任意的两个多项式 f(x), g(x)，由 p(x) | f(x)g(x)，一定可以推出 p(x)|f(x) 或 p(x)|g(x)。

（2）因式分解定理

数域 F 上每一个次数 ≥ 1 的多项式 f(x) 都可以唯一地分解成数域 F 上一些不可约多项式的乘积。

（3）重因式的性质

i) 如果不可约多项式 p(x) 是 (k ≥ 1)，那么它是微商 $f'(x)$ 的 k - 1 重因式。

ii) 如果不可约多项式 p(x) 是 f(x) 的 k 重因式(k ≥ 1)，那么 p(x) 是 $f(x), f'(x), \cdots, f^{k-1}(x)$ 的因式，但不是 $f^k(x)$ 的因式。

iii) 不可约多项式 p(x) 是 f(x) 的重因式的充分必要条件为 p(x) 是 $f(x), f'(x)$ 公因式。

iv) 多项式 f(x) 没有重因式的充分必要条件是 $(f(x), f'(x)) = 1$。

（4）复系数多项式因式分解定理

每个次数≥ 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积。

（5）实系数多项式因式分解定理

每个次数≥ 1 的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积。

（6）有理系数多项式的性质

i） 高斯引理 两个本原多项式的乘积还是本原多项式。

ii） 如果一非零的整系数多项式能分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积。

iii） 艾森斯坦因判别法

三、 根的理论

1. 基本概念

（1）多项式的根

如果多项式 f(x)在 x=a 时的函数值 f(a)=0，那么 a 就称为 f(x)的根或零点。

（2）重根

如果 x-a 是 f(x)的 k 重因式，那么 a 称为 f(x)的 k 重根。

2. 基本性质

（1）余数定理 用一次多项式 x-a 去除多项式 f(x)，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 f(a)。

（2）a 是 f(x)的根的充分必要条件是（x-a）| f(x)。

（3）F[x]中 n 次多项式（n≥0）在数域 F 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算。

（4）如果多项式 f(x)，g(x)的次数都不超过 n，而他们对 n+1 个不同的数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 有相同的值，即

$f(a_i) = g(a_i), i = 1,2,\cdots,n+1$，那么

$f(x) = g(x)$。

（5）设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 是一个整系数

多项式，而$\frac{r}{s}$是它的一个有理根，其中 r,s 互素，那么必有$s|a_n, r|a_0$。特别地，如果$a_n=1$，那么 f(x)的有理根都是整数根。

基本方法

1. 多项式相等的证明方法
   （1）利用定义证明同次项的系数相等
   （2）利用整除，证明互相整除，再比较首次项系数相等
   （3）利用次数定理，通常采用反证法
   （4）利用多项式函数相等，特别注意应用零多项式有无穷多个根的性质
2. 整除性的证明方法
   （1）利用定义及其性质
   （2）利用带余除法
   （3）利用多项式的典型分解式
   （4）利用因式定理
   （5）利用互素性质
   （6）应用 n 次单位根的性质
3. 最大公因式的求法
   （1）利用辗转相除法
   （2）应用典型分解式法
4. 最大公因式的证法
   （1）定义法
   （2）反证法
   （3）d(x)=(f(x),g(x)) ⇔ 存在 u(x),v(x)∈ F[x]，使 f(x) u(x)+ g(x) v(x)=d(x)，且 d(x)|g(x), d(x)|f(x)。
   （4）设 f(x) = g(x)q(x)+r(x)，则

$(f(x), g(x)) = (g(x), r(x))$

(5) 应用互素性质。

5. 重因式（或重根）的判别法

（1）f(x)与其导数互素（不互素）⇔ f(x)无重因式（有重因式）

（2）待定系数法

（3）p(x)为 f(x)的 k+1 重因式⇔p(x)为 f(x)的导数的 k 重因式，且 p(x)| f(x)。

（4）f(x) 有重根 ⇔ f(x)与 f(x)的导数的结式为零

6. 综合除法的应用

（1）求 x=c 的 f(x)的值，并判定 c 是否为 f(x)的根及其重数

（2）把 f(x)表成 x-c 的多项式

7. 不可约多项式的判别方法

（1）定义法

（2）反证法

（3）艾森斯坦因判别法

8. 求有理系数多项式的有理根的方法

典型例题

例 1 设 $h(x)\mid f(x)-g(x)$, 且 $h(x)\mid f(x)u(x)+g(x)v(x)$

证明，$h(x)\mid f(x)v(x)+g(x)u(x)$

证 因 $h(x)\mid f(x)-g(x)$, 由整除性质

$h(x)\mid f(x)-g(x)(v(x)-u(x))$,

又 $h(x)\mid f(x)u(x)+g(x)v(x)$

所以 $h(x)\big|f(x)u(x)+g(x)v(x)+(f(x)-g(x)).(v(x)-u(x))$

即 $h(x)\big|f(x)\vartheta(x)+g(x)u(x)$

例 2 $f(x)=1+x+x^2+...x^{n-1}$

证明，$f(x)$ 整除 $g(x)=(f(x)+x^n)^2-x^n$

证 因 $f(x)(x-1)=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)=x^n-1$

则 $g(x)=(f(x)+x^n)^2-x^2=f^2(x)+2x^nf(x)+x^{2n}-x^n$

$=f(x)(f(x)+2x^n)+x^n(x^n-1)=f(x)\left[f(x)+2x^n+x^n(x-1)\right]=f(x)(f(x)+x^n+x^{n+1})$

故 $f(x)\big|g(x)$

例 3 设 $f(x)=x^4-3x^3+6x^2+ax+b, g(x)=x^2-2x+3$，

当 a,b 为何值时，$g(x)\big|f(x)$

解 用带余除法求出以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式

$r(x)=(a+5)x+(b-3).$

当 $r(x)=0$，即 $a=-5,b=3$ 时，$g(x)\big|f(x)$。

例 4 证明，x^d-1 整除 x^n-1 当且仅当 $d\big|n$。

证 令 $n=dq+r,0\le r\prec d$，则

$x^n-1=(x^{dq+r}-x^r)+(x^r-1)=x^r(x^{dq}-1)+(x^r-1)$

于是　　$x^r-1=(x^n-1)-x^r(x^{dq}-1)$

$=(x^n-1)-(x^d-1)(x^{d(q-1)}+\ldots+x^d+1)x^r$

因　$x^d-1\mid x^n-1$，由上式知 $x^d-1\mid x^r-1$，而 $0\le r\prec d$

所以　$r=0$，从而 $n=dq$，故 $d\mid n$

反之，令 $n=dq$，

于是　$x^n-1=(x^d-1)(x^{d(q-1)}+x^{d(q-2)}+\ldots+x^d+1)$

因此　$x^d-1\mid x^n-1$

例 5　设 $f(x)=(x+1)^{2n}+2x(x+1)^{2n-1}+\ldots+2^nx^n(x+1)^n$

证明，$g(x)=(x-1)f(x)+(x+1)^{2n+1}$ 被 x^{n+1} 整除

证　由于 $x-1=1[(x+1)-2x]$，因此

$(x-1)f(x)=(x-1)(x+1)^n\left[(x+1)^n+2x.(x+1)^{n-1}+\ldots+2^nx^n\right]$

$=-(x+1)^{n-1}[(x+1)-2x][(x+1)]^n+2x(x+1)^{n-1}+\ldots+2^nx^n$

$=-(x+1)^n\left[(x+1)^{n+1}-(2x^{n+1})\right]$

于是

$$g(x)=(x-1)f(x)+(x+1)^{2n+1}$$

$$=-(x+1)^n\left[(x+1)^{n+1}-(2x)^{n+1}\right]+(x+1)^{2n+1}$$

$$f(x)=x^{n+2}+(x+1)^{2n+1},g(x)=x^2+x+1$$

$$=-(x+1)^{2n+1}+(2x)^{n+1}(x+1)^n+(x+1)^{2n+1}$$

$$=x^{n+1}2^{n+1}(x+1)^n \quad \text{故} \quad x^{n+1}\mid g(x)$$

例 6　设 m 为任意正整数，证明

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\mid(x^{m-1}-1)(x^m-1)(x^{m+1}-1)$$

证　在 $m-1$，m，$m+1$ 这三个连续的非负整数中，必有 2 与 3 的倍数。

（1）若为 2 的倍数与为 3 的倍数不是同一个数，设分别为 l_1 与 l_2（l_1 与 l_2 是 $m-1$，m，$m+1$ 中不同的两个数），另一个数为 l_3，则 $x^2-1\mid x^{l_1}-1, x^3-1\mid x^{l_2}-1$，又因 $x-1\mid x^{l_3}-1$，所以结论成立。

（2）若为 2 的倍数与 3 的倍数是同一个数，则此数为 6 的倍数 $6k$，k 为正整数。由例 4 知，$x^6-1\mid x^{6k}-1$，又据整除性质，有

$$(x-1)^2(x^6-1)\mid (x^{m-1}-1)(x^m-1)(x^{m+1}-1)$$

而 $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\mid(x-1)^2(x^6-1)$，

故由整除的传递性知

$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\big|(x^{m-1}-1)(x^m-1)(x^{m+1}-1)$

例 7　设　$f(x)=x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}, g(x)=x^2+x+1$，　n 为非负整数，证明 $g(x)\big|f(x)$。

证法一：　$f(x)=x^{n+2}+(x+1)(x^2+2x+1)^n$

$=x^{n+2}+(x+1)(g(x)+x)^n=x^{n+2}+(x+1)(g(x)q(x)+x^n)$

其中　$q(x)=g^{n-1}(x)+C_n^{\ 1}g^{n-2}(x)x+\ldots+C_n^{\ n-1}x^{n-1}$

于是有

$f(x)=x^n g(x)+(x+1)g(x)q(x)=\left[x^n+(x+1)q(x)\right]g(x)$

故　$g(x\big|f(x))$。

证法二：　对 n 用数学归纳法。

当 $n=0$ 时，有 $x^2+x+1\big|x^2+x+1$，结论成立。

假定 $n=k$ 时结论成立，即 $x^2+x+1\big|x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}$，而

$x^{k+3}+(x+1)^{2k+3}=x^{k+3}+(x+1)^2(x+1)^{2k+1}$

$=x^{k+3}+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}+x(x+1)^{2k+1}$

$=x\left[x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}\right]+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}$,

所以　$x^2+x+1\big|x^{k+3}+(x+1)^{2k+3}$,

即当 $n=k+1$ 时结论成立，故对任意非负数整数 n 结论成立。

例 8　证明，$x\mid f^k(x)$ 当且仅当 $x\mid f(x)$，k 是任意正整数。

证　设 $x\mid f(x)$，而 $f(x)\mid f^k(x)$，由整除传递性知 $x\mid f^k(x)$；

反之，假若 x 不能整除 $f(x)$，令 $f(x)=xq(x)+r$，r 为非零常数，则有

$$^k(x)=x(x^{k-1}q^k(x)+C_k{}^1x^{k-2}q^{k-1}(x)r+\ldots+C_k{}^{k-1}q(x)r)+r^k$$

，而 $r^k\neq 0$，由商式与余式的唯一性知，

以 x 除 $f^k(x)$ 的余式不为零，即　$x\mid f^k(x)$，此与已知矛盾。

例 9　设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是二次多项式，求 t，u 的值。

解　$g(x)$ 除 $f(x)$ 得余式 $r_1(x)=x^2+2x+u$

用 $r_1(x)$ 除 $g(x)$ 得余式 $r_2(x)=(-2t-u+4)x+(3-t)u$，

要使 $(f(x),g(x))$ 是二次多项式，应有 $r_2(x)=0$。

解方程组 $\begin{cases}2t+u-4=0\\(t-3)u=0\end{cases}$

得 $t=3,u=2,u=0$；或 $t=2,u=0$

例 10　设 $f(x),g(x)$ 为有理数域上多项式，且 $(f(x),g(x))=1$

求多项式 $s(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)$ 与

$t(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)$ 的最大公因式。

解

$$s(x)=(x-1)\left[(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)\right]=(x-1)s_1(x)\,;$$

$$t(x)=(x-1)\left[(x+1)f(x)+xg(x)\right]=(x-1)t_1(x)$$

其中 $s_1(x)=(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)$ （1）

$t_1(x)=(x+1)f(x)+xg(x)$ （2）

令 $d(x)=(s_1(x),t_1(x))$，且

$s_1(x)=d(x)s_2(x),t_1(x)=d(x)t_2(x),$

因此 $(s(x),t(x))=d(x)(x-1)$ 由 $s_1(x)-xt_1(x)$，得

$f(x)+g(x)=d(x)(s_2(x)-xt_2(x))$，即 $d(x)\mid f(x)=g(x)$

由（2），又得 $f(x)=d(x)t_2(x)-xf(x)+g(x)$，

所以 $d(x)\mid f(x)$

由 $d(x)\mid f(x)+g(x)$，$d(x)\mid f(x)$，又得 $d(x)\mid f(x)$

已知 $(f(x),g(x))=1$，因此 $d(x)=1$，故 $(s(x),t(x))=x-1$。