21世纪高等院校教材

数学分析(上册)

周运明　尚德生　主编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

数学分析

（上册）

周运明　尚德生　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据近年普通高等院校的教学情况，结合教学实践的经验，并对传统的数学分析教材体系做出较大变化的基础上编写而成的. 本书分上、下两册，上册内容是函数、极限与连续、一元函数的微分学、一元函数的积分学、多元函数的微分学、隐函数定理及应用，共 6 章；下册内容是重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、极限与实数理论、积分学理论与广义积分、级数理论、含参变量积分，共 7 章.

本书可作为高等院校数学专业的教材，也可作为相关教师或研究生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 上册/周运明，尚德生主编. 一北京：科学出版社，2008
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-022541-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①周…②尚… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 106844 号

责任编辑：王 静 房 阳 / 责任校对：郑金红
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 9 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 9 月第一次印刷 印张：15 1/2
印数：1—3 000 字数：296 000

定价：48.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

前 言

近年来，随着高等教育招生规模的不断扩大以及社会对人才需求的不断变化，为适应培养宽口径、厚基础、高素质、知识型与能力型并举的数学人才的发展需要，数学专业的各类选修课剧增，传统数学分析课程无论在学时上还是在教学内容的编排上都受到严峻挑战.结合普通高等院校理科专业课程体系的特点和数学分析的教学体系的改革，总结山东理工大学理学院三十多年来从事数学分析教学的经验与体会，精心编写了这套教材.

本书分上、下两册，上册内容主要有函数、极限与连续、一元函数的微分学、一元函数的积分学、多元函数的微分学、隐函数定理及应用，共 6 章；下册内容主要有重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、极限与实数理论、积分学理论与广义积分、级数理论、含参变量积分，共 7 章.

本书需 3 个学期合计约 260 学时讲授，3 个学期的周学时依次按 6，6，4 安排.

在本书的编写过程中，我们注意了以下几个方面：

(1) 本书与目前国内通用的数学分析教材最大的不同之处是在涵盖数学分析基本内容的基础上，注重概念的深入理解与基础训练的强化；同时在传统内容的编排上作了较大的调整，将知识难点的重心后移，这样可使大一新生尽快适应数学分析的学习，提高学生的学习兴趣.

(2) 为了使难点分散和便于理解，本书把微积分的极限与实数理论分两阶段完成.第一阶段在一元函数微积分部分，把极限理论的有关定理不加证明而直接据此展开一系列讨论，给出它们的应用，以期解释这些定理并使读者易于理解掌握.第二阶段在下册的实数理论部分，集中论证极限理论有关定理的等价性及其典型方法，以供报考研究生和以后从事数学教学与研究工作的读者进一步学习.

(3) 由于章节顺序的变化及篇幅等原因，本书在内容的处理上与国内通用教材有所不同，如考虑到计算机的应用与普及，本书明显淡化了函数作图、求导计算、求不定积分计算、近似计算以及定积分在几何及物理方面的应用等.另外，书中突出并加大了重难点内容的例题，尤其是大量引用了近年考研试题，力求通过一些典型例子使读者初步掌握分析问题与解决问题的方法.各章节习题的难度有所降低，给教师和学生留有一定的空间，有利于培养学生创新性学习的能力.

本书上册编写组由周运明、尚德生、李亿民、王豫鲁、王政组成；下册编写组由王政、宋元平、尚德生、王豫鲁、李亿民组成.全书由尚德生和王政修改、统稿.

本书在编写过程中参考了华东师范大学数学系等重点院校的《数学分析》教材

和习题集,得到了山东理工大学教务处的支持和理学院院长孟昭为教授的具体指导、帮助,在此深表感谢.同时真诚感谢试用本讲义并提出宝贵意见的周翠莲博士、潘丽丽老师、王玉田老师以及 06 级与 07 级数学专业全体同学.我们要特别感谢科学出版社的领导与编辑对本书的及时出版所给予的大力支持.

编写本书过程中,虽然我们尽了很大努力,但由于知识与能力所限,深感难度很大,疏漏之处在所难免,诚恳希望广大读者给予批评指正.

编 者

2008 年 7 月于山东理工大学

目　录

第 1 章　函　　数

1.1　实数　邻域　常见不等式

1.1.1　实数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 已经知道，有理数和无理数统称为**实数**，实数的全体称为**实数集**或**实数域**，记为 $\mathbf{R}$，即

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

实数集 $\mathbf{R}$ 中的任意一个实数与数轴上的点是一一对应的，因此对于实数和数轴上的点今后不加区别.

实数集具有以下性质：

(1) 实数集对加、减、乘、除(除数不为零)四则运算是**封闭**的，即任意两个实数的加、减、乘、除(除数不为零)仍然为实数.

(2) 实数集是有序集，即任意两个实数 a 和 b 必满足下列 3 个关系之一：

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

(3) 实数的大小关系具有传递性，即若 $a>b, b>c$，则有 $a>c$.

(4) 实数集具有**稠密性**，即任何两个不相等的实数之间必有有理数，也必有无理数. 从而进一步推得任何两个不相等的实数之间，必有无穷多个有理数，也必有无穷多个无理数.

(5) 实数具有**阿基米德性**，即对任何两个正实数 a 和 b，若 $b>a>0$，则存在正整数 n，使得 $na>b$.

例 1.1　设 $a, b\in \mathbf{R}$. 证明：若对任意正数 ε，有 $a>b-\varepsilon$，则 $a\geqslant b$.

证明　反证法. 假设 $a<b$. 取正数 $\varepsilon_0=b-a>0$，由已知条件，得

$$a > b - \varepsilon_0 = b - (b-a) = a.$$

这显然是矛盾的.

1.1.2　邻域

设 $a\in \mathbf{R}, \delta>0$，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 的集合称为**点 a 的 δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$ 或简记为 $U(a)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta).$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^{\circ}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

也可简记为 $U^{\circ}(a)$.

类似地,还常用到下面几种邻域:

点 a 的 δ 右邻域:$U_{+}(a,\delta)=[a,a+\delta)$;**点 a 的 δ 左邻域**:$U_{-}(a,\delta)=(a-\delta,a]$.

点 a 的空心 δ 右邻域:$U_{+}^{\circ}(a,\delta)=(a,a+\delta)$;**点 a 的空心 δ 左邻域**:$U_{-}^{\circ}(a,\delta)=(a-\delta,a)$.

∞**邻域**:$U(\infty)=\{x \mid |x|>M\}$;$+\infty$**邻域**:$U(+\infty)=\{x \mid x>M\}$;$-\infty$**邻域**:$U(-\infty)=\{x \mid x<-M\}$,上述 M 为充分大的正数.

1.1.3　常见不等式

在数学分析中,常常要用到许多不等式,为此给出一些常见的不等式.

(1) **绝对值不等式**. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,则有

$$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

(2) **三角不等式**. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,则有

$$|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|.$$

(3) **平均值不等式**. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^{+}$,则有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

(4) **伯努利不等式**. 若 $x>-1$,$n\geqslant2$ 为正整数,则有

$$(1+x)^n\geqslant1+nx,$$

其中等号成立当且仅当 $x=0$.

(5) 对任意 $a,b\in\mathbf{R}$,有

$$2ab\leqslant2|ab|\leqslant a^2+b^2.$$

(6) 若 $x\in(0,1)$,则有

$$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4},$$

其中等号成立当且仅当 $x=\frac{1}{2}$.

(7) 设 n 为正整数,则有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

下面只证明伯努利不等式,其余由读者自行证明.

例 1.2　证明伯努利不等式.

证明　利用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，显然成立. 假设 $n=k$ 时成立，即

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx,$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \geqslant (1+x)(1+kx)\\ &= 1+(1+k)x+kx^2 \geqslant 1+(1+k)x,\end{aligned}$$

即不等式对 $n\geqslant 2$ 的正整数均成立，且等号成立当且仅当 $x=0$.

1.2 函　数

1.2.1 函数的概念

先看下面的例子.

例 1.3 给定圆的半径 r，就可以确定圆的面积 S，因此圆的面积 S 是半径 r 的函数，它们之间的关系可用式子 $S=\pi r^2$ 来表示.

表示两个变量之间的某种依赖关系，除了用公式外，还可用**表格**或**图表**，在此不再举例.

定义 1.1 设 $D\subset\mathbf{R}$，如果存在某一对应法则 f，对于 D 中每一个实数 x，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的**函数**，记为 $y=f(x)$，其中称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为函数 f 的**定义域**. D 中每一个实数 x 所对应的数 y 称为 f 在点 x 的**函数值**，函数值的全体称为函数 f 的**值域**，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{f(x)\,|\,x\in D\}.$$

实际上，函数 $y=f(x)$ 是定义域 D 到值域 $f(D)$ 的映射，可记为

$$f: x\in D\mapsto y\in f(D).$$

在函数的定义中，自变量与因变量采用什么符号不是关键，重要的是函数的定义域和变量之间的对应法则 f. 例如，$y=x+2$ 与 $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 不是同一个函数，因为它们的定义域不同；$y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 与 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ 也不是同一个函数，因为它们的对应法则不同；而 $y=x^2$ 与 $u=v^2$ 则是相同的函数.

例 1.4 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x-1}$ 的定义域.

解 由题意，要使函数有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}x>0,\\ 1+\ln x\geqslant 0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

所以函数定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}},x\neq 1\right\}$ 或 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)\cup(1,+\infty)$.

函数除了用公式法、表格法或图表表示外，还可用图像法表示. 函数 $y=f(x)$ 的图像为平面上的集合

$$G(f)=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

例 1.5　画出下列函数的图像：

(1) **绝对值函数** $y=|x|$；(2) **符号函数** $y=\operatorname{sgn}x$；(3) **取整函数** $y=[x]$.

解　(1) **绝对值函数**为

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

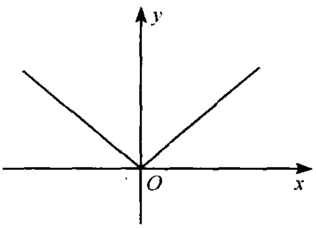

图 1.1

其图像如图 1.1 所示.

(2) **符号函数**为

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其图像如图 1.2 所示(因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，总有 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$. 所以 $\operatorname{sgn}x$ 起了 x 的符号的作用，故称其为**符号函数**).

(3) 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，**取整函数**定义为

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

其图像如图 1.3 所示(图像形状类似阶梯). 显然，$[x]$ 具有性质

$$x-1<[x]\leqslant x<[x]+1\leqslant x+1.$$

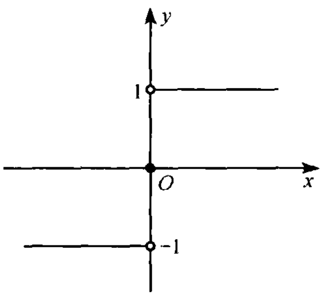

图 1.2

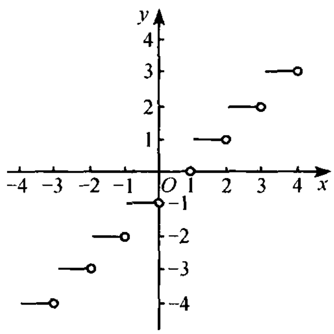

图 1.3

例 1.5 的 3 个函数在其定义域的不同部分是用不同的表达式表示的，这类函数称为**分段函数**. 再如，定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的**狄利克雷函数**

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

也是分段函数.

1.2.2 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.2 设 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若存在正数 M，使得对任意的 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ **在 D 上有界**或称 $f(x)$ **是 D 上的有界函数**. 每一个具有上述性质的正数 M 都是函数的界.

例如，正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 均为 $\mathbf{R}$ 上的有界函数，因为对每一个 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $|\cos x|\leqslant 1$，1 是它们的一个界.

若不存在具有上述性质的正数 M，则称 $f(x)$ **在 D 上无界**或称 $f(x)$ **是 D 上的无界函数**. 换句话说，对任意给定的正数 M，无论它多么大，总存在某个 $x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$，则 $f(x)$ 在 D 上无界.

例 1.6 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为 $(0,1]$ 上的无界函数.

证明 对任何正数 M，总存在相应的点 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1]$，使得

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}=M+1>M,$$

则 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为 $(0,1]$ 上的无界函数.

2. 函数的单调性

定义 1.3 设 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若对于任何 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，总有

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**递增函数**，特别当成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 时，称 $f(x)$ 为 D 上的**严格递增函数**；

(2) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**递减函数**，特别当成立严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 时，称 $f(x)$ 为 D 上的**严格递减函数**.

递增函数和递减函数统称为**单调函数**，严格递增函数和严格递减函数统称为**严格单调函数**.

若在某个区间上，函数 $f(x)$ 为单调函数，则称该区间为函数的**单调区间**. 例如，函数 $y=|x|$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0]$，单调递增区间为 $[0,+\infty)$，而在整个定义域 $\mathbf{R}$ 上不是单调的.

例 1.7 证明 $y=[x]$ 在 $\mathbf{R}$ 上是递增函数，但不是严格递增函数.

证明　因为对任何 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$ 时，显然有$[x_1]\leqslant[x_2]$. 但此函数在 $\mathbf{R}$ 上不是严格递增的，因为若取 $x_1=0,x_2=\frac{1}{2}$，则有

$$[x_1]=[x_2]=0,$$

即定义中所要求的严格不等式不成立.

3. 函数的奇偶性

定义 1.4　设 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，若对每一个 $x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x)\quad(\text{或 } f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$为 D 上的**奇(偶)函数**.

显然，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 和正切函数 $y=\tan x$ 都是奇函数，余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数，符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 是奇函数.

4. 函数的周期性

定义 1.5　设 $f(x)$为定义在 D 上的函数，若存在 $T>0$，使得对一切 $x\in D$ 有 $x+T\in D$，且总成立

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$为**周期函数**，并称 T 为 $f(x)$的一个**周期**.

由定义容易得出，若 T 为 $f(x)$的一个周期，则 nT(n 为正整数)也是 $f(x)$的周期. 若在 $f(x)$的周期中存在最小的正值，则称它为**最小正周期**. 通常说周期函数的周期都是指**最小正周期**.

例如，$\sin x$ 的周期为 2π，$\tan x$ 的周期为 π，函数 $f(x)=x-[x]$($x\in\mathbf{R}$)的周期为 1.

注 1.1　有周期函数不一定存在最小正周期. 例如，狄利克雷函数 $D(x)$，易证任何一个正有理数都是 $D(x)$的周期，但在所有的正有理数中不存在最小的正有理数，因此 $D(x)$不存在最小正周期.

1.2.3　函数的运算

在实际问题中，许多函数是由几个简单函数经过有限次运算得到的较复杂的函数.

1. 函数的四则运算

若 $f(x)$，$g(x)$是定义在 D 上的函数，则

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$$

仍为 D 上的函数，即函数对加、减、乘、除(分母不为零)四则运算是封闭的.

2. 复合函数

定义 1.6 设有两个函数 $y=f(u)(u\in E)$ 和 $u=g(x)(x\in D)$. 若 $g(x)$ 的值域 $g(D)$ 含于 $y=f(u)$ 的定义域 E 内，那么对每一个 $x\in D$，通过中间变量 u，有唯一的实数 y 与之对应，这样在 D 上确定了一个新的函数，称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 经过复合运算所得到的**复合函数**. 记作

$$y=f(g(x)),\quad x\in D \text{ 或 } y=(f\circ g)(x),\quad x\in D.$$

在复合函数 $y=f(g(x))$ 中，f 称为**外层函数**，g 称为**内层函数**，u 称为**中间变量**.

例如，$y=\ln(x^2+1)$ 是由函数 $y=\ln u, u=x^2+1$ 复合而成的；$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2, u=\sin x$ 复合而成.

注 1.2 函数的复合运算一般不满足交换律，即 $f\circ g\neq g\circ f$. 当 $f\circ g$ 是复合函数时，$g\circ f$ 可能无意义，即使有意义，也不一定有 $f\circ g=g\circ f$.

例如，$f(x)=3+x^2, x\in(-\infty,+\infty), g(x)=\arcsin x, x\in[-1,1]$，则复合函数 $f(g(x))=3+(\arcsin x)^2, x\in[-1,1]$ 存在；但 $\arcsin(3+x^2)$ 无意义，故 $g(f(x))$ 不存在.

还可以讨论多个函数的复合. 例如，$f(x)=\sqrt[3]{x}, g(x)=\sin x, h(x)=x^2$ 复合而成的函数 $f(g(h(x)))=\sqrt[3]{\sin x^2}$.

例 1.8 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1,\\ |x|-2, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

解 由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式以及复合函数的定义，有

$$f(g(x))=\begin{cases}0, & 1\leqslant |x|<2,\\ 1, & |x|<1 \text{ 或 } |x|\geqslant 2;\end{cases}\qquad g(f(x))=\begin{cases}2, & x<0,\\ -1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

1.2.4 反函数

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 若对于每一个 $y\in f(D)$，通过关系 $y=f(x)$，在 D 中有唯一的 x 与之对应，这种对应关系所确定的 x 是 y 的一个函数，称这个函数是原来函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D).$$

注 1.3 事实上，函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表达的是变量 x,y 之间的同一对应关系，其不同之处在于前者 x 是自变量，y 是因变量，而后者 y 是自变量，x 是因变量. 反函数的定义域和值域，分别是原来函数的值域和定义域. 反函数

的关系是相互的，即 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，同时 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，即

$$f^{-1}(f(x))\equiv x,\quad x\in D;$$
$$f(f^{-1}(y))\equiv y,\quad y\in f(D).$$

习惯上，用 x 作为自变量，y 为因变量，则 $y=f(x)$ 的反函数可改写为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$. 这里 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$ 和 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$ 是同一个函数，只是所用变量的记号不同而已.

下面给出反函数存在的一个判别准则.

定义 1.8 设函数 $y=f(x)$ 定义在集合 D 上，若对于 D 中任何 $x_1\neq x_2$ 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 是 D 到 $f(D)$ 上的一一对应函数.

定理 1.1 设函数 $y=f(x)$ 定义在 D 上，则 $f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(y)$ 的充要条件是 $f(x)$ 是 D 到 $f(D)$ 上的一一对应函数.

证明 必要性. 设 $f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(y)$，即对任意 $y_1,y_2\in f(D)$，由反函数定义知存在唯一的 $x_1,x_2\in D$，使 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$.

若 $x_1\neq x_2$，而 $f(x_1)=f(x_2)$，即 $y_1=y_2$，从而 $f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2)$，即 $x_1=x_2$，矛盾. 于是 f 是 D 到 $f(D)$ 之间的一一对应函数.

充分性. 设 f 是 D 到 $f(D)$ 之间的一一对应函数，即对任意 $y\in f(D)$，由 $f(D)$ 为 $f(x)$ 的值域及定义 1.8 知存在唯一的 $x\in D$，使 $y=f(x)$，根据反函数定义，$f(x)$ 存在反函数.

例如，函数 $y=\sin x$ 是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 到 $[-1,1]$ 之间的一一对应函数，故存在反函数 $x=\arcsin y$，$y\in[-1,1]$.

定理 1.2 设 $y=f(x)$，$x\in D$ 为严格递增（减）函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格递增（减）函数.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是严格递减的，有反函数 $y=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$；函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是严格递增的，有反函数 $y=\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$. 但是 $y=x^2$ 在整个定义域 $\mathbf{R}$ 上不是单调的，故在定义域 $\mathbf{R}$ 上不存在反函数.

1.2.5 初等函数

中学阶段学习过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，这些函数统称为**基本初等函数**. 在附录 Ⅰ 中已将基本初等函数及其特性列成表，便于查找、学习与比较.

定义 1.9 由常数和基本初等函数，经过有限次四则运算和有限次复合运算而得到的，并能够用一个表达式表示的函数，称为**初等函数**. 不是初等函数的函数，称为**非初等函数**.

例如，$y=\sin(\ln(x^2+1))$，$y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{1-x^2}$都是初等函数. 狄利克雷函数、符号函数是非初等函数.

一般说来，分段函数不是初等函数，这是因为在其定义域上不能用一个表达式表示. 但是绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数，因为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 是由幂函数复合而成且可用一个表达式表示.

工程上常用的双曲函数是由指数函数经四则运算得到，因此也是初等函数，其定义如下(双曲函数图像见图 1.4 与图 1.5)：

双曲正弦函数 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

双曲余弦函数 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切函数 $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

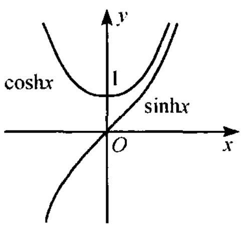

图 1.4

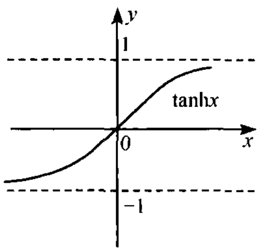

图 1.5

双曲函数的性质与三角函数有类似之处，试比较

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$；　　$\cos^2 x+\sin^2 x=1$；

$\cosh^2 x+\sinh^2 x=\cosh 2x$；　　$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$；

$\sinh 2x=2\sinh x\cdot\cosh x$；　　$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$.

第 1 章总练习题

1. 用区间表示下列不等式的解集：

(1) $|1-x|-x\geqslant 0$；　　(2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 6$；　　(3) $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 证明：

(1) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$；

(2) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$.

3. 下列函数是由哪些基本函数复合而成的：

(1) $y=\sin^2(x^2+1)$；　　(2) $y=\ln(\sin(e^x))$；

(3) $y=\frac{1}{(x^2+1)^2}$;　　　　(4) $y=e^{\sqrt[3]{x^2+1}}$;

(5) $y=\arcsin(\tan x)$;　　　　(6) $y=\ln(\arcsin(x^2-1))$.

4. 设 $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$.

(1) 求 $f(1),f(f(1)),f(f(f(1)))$;

(2) 求 $f(\sqrt{2})$;

(3) 求证:$|f^2(x)-2|<|x^2-2|,\forall x>0,x\neq\sqrt{2}$.

5. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$;　　　　(2) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;

(3) $f(x)=\frac{\sqrt[6]{1-x^2}}{x}$;　　　　(4) $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}$;

(5) $f(x)=\ln x^2$;　　　　(6) $f(x)=\arcsin(2-x)$.

6. 求下列函数的值域:

(1) $y=|x-1|,\quad x\in[-1,5]$;　　　　(2) $y=x+\frac{1}{x},\quad x\in(0,+\infty)$;

(3) $y=\sqrt{x^2+1}$;　　　　(4) $y=ax+\frac{b}{x},\quad ab>0$.

7. 求证:$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数且严格单调递增.

8. 证明:

(1) 两个奇函数之和为奇函数,其积为偶函数;

(2) 两个偶函数之和(积)为偶函数;

(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数.

9. 证明:任一在实轴上定义的函数都可分解成一个奇函数与一个偶函数之和.

10. 设 $f(x),g(x)$是在(a,b)上定义的递增函数,求证:

$$u(x)=\max\{f(x),g(x)\} \text{ 与 } v(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

都是(a,b)上的递增函数.

11. 证明:如果 $f(u)$和 $g(x)$在其定义域内都是单调的,则复合函数 $f(g(x))$也是单调的.

12. 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right),0<x<+\infty$;

(2) $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),-\infty<x<+\infty$.

13. 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次}}(x)$.

14. 设 f 为定义在$(-\infty,+\infty)$上以 T 为周期的函数,a 为实数. 证明:若 f 在$[a,a+T]$上有界,则 f 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

15. 讨论狄利克雷函数的有界性、单调性与周期性.