

教育部高校学生司审定

高等数学(一)

全国各类成人高校统一招生考试辅导教材

2005-2006 专升本

中国成人教育协会
成人高校招生专业委员会组织编写



白山出版社
Bai shan chu ban she

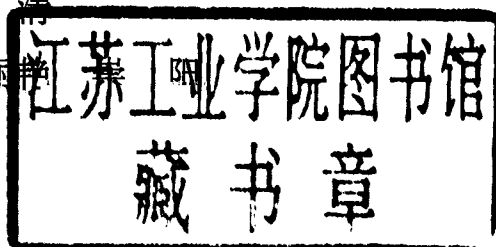
2005—2006 年度全国各类成人高校统一招生考试辅导教材(专升本)

高等数学(一)

中国成人教育协会成人高校招生专业委员会组织编写

主 编 苗作仁 李 清

副主编 晏祖根 崔丽静



白 山 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)/苗作仁,李清编写;中国成人教育协会成人高校招生专业委员会组织编写.-沈阳:白山出版社,2005.2

2005-2006 年度全国各类成人高校统一招生考试辅导教材.专升本
ISBN 7-80687-242-6

I.高… II.①苗… ②李… ③中… III.高数(一)-成人教育:高等教育-升学参考资料 IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 011915 号

出版发行 白山出版社
地 址 沈阳市沈河区二纬路 23 号
邮 编 110013
电 话 024-23065667
责任编辑 朱忠义
特聘编辑 王 鹏 王学忠
封面设计 邵 阳
责任校对 李红蕾
印 刷 北宁市印刷厂
开 本 787×1092 毫米 1/16
印 张 17 1/2
字 数 345 千字
版 次 2005 年 2 月第 1 版
出版时间 2005 年 2 月第 1 次印刷
印 数 10000 册
书 号 ISBN 7-80687-242-6/G·35
定 价 28.00 元

版权所有,翻印必究(举报电话:024-23065667 024-86230792)

如有印装质量问题,印刷厂负责调换。

2005—2006 年度
全国各类成人高校统一招生考试辅导教材(专升本)
编 委 会

编委会主任 李桂清

编委会成员 (按姓氏笔划为序)

卫道元	王 云	王君胜	王润木	卢 坚
叶仕业	庄灿明	刘 敏	刘廷胜	李 谦
李云增	李传武	李桂清	李鸿江	李增元
杨丽娟	苏 华	苏连海	吴 湖	张淑勤
陈伟胜	陈福荣	岳 伟	郑元鼎	郑伟辰
郑朝卿	赵世军	南光哲	侯典明	黄民夫
曹正龙	潘送速			

★编委均为各省、自治区、直辖市
招考办成人高校招生工作负责人

出版前言

中国成人教育协会成人高校招生专业委员会依据国家教育部最新颁布的《2005—2006年度全国各类成人高校统一招生复习考试大纲》,组织一批具有多年成人高考辅导经验和较高专业水平且在当地考生中颇有声望的教师编写了《全国各类成人高校统一招生考试辅导教材》,由教育部高校学生司审定。

这套教材充分考虑了成人考生的特点,力求突出重点,条理清晰,在题型设计上,更加贴近考试实际。为了方便教师辅导和考生自学,每种教材的各章前都列出大纲相关要求,每章后附有自检自测习题。全书最后还附有2004年全国各类成人高校统一招生考试试卷及参考答案和2005—2006年度全国各类成人高校统一招生考试样题及参考答案。为了帮助考生取得优异成绩,编写教师精心设计了五套模拟试卷及参考答案,随书赠送。

中国成人教育协会成人高校招生专业委员会
2005年1月25日

2005—2006年度全国各类成人高校统一招生考试

高等数学(一)考试形式及试卷结构

试卷总分:150分

考试时间:150分钟

考试方式:闭卷,笔试

试卷内容比例(%)	
极限和连续	13
一元函数微分学	25
一元函数积分学	25
多元函数微分学(含向量代数与空间解析几何)	20
无穷级数	7
常微分方程	10
试卷题型比例(%)	
选择题	27
填空题	27
解答题	46
试题难易比例(%)	
容易题	30
中等难度题	50
较难题	20

目 录

A部分 一元函数微积分学

第一章 极限、连续	1
1.1 极限	1
1.1 练习题答案与题解	9
1.2 函数的连续性	14
1.2 练习题答案与题解	18
自检自测题一	21
参考答案	22
第二章 一元函数微分学	24
2.1 函数的导数	24
2.1 练习题答案与题解	28
2.2 函数的求导法	30
2.2 练习题答案与题解	36
2.3 函数的微分	40
2.3 练习题答案与题解	42
2.4 中值定理及导数的应用	44
2.4 练习题答案与题解	50
2.5 导数的应用	54
2.5 练习题答案与题解	61
自检自测题二	68
参考答案	70
第三章 一元函数积分学	72
(一)不定积分	72
3.1 不定积分的概念与性质	72
3.1 练习题答案与题解	76
3.2 换元积分法	78
3.2 练习题答案与题解	86
3.3 分部积分法	89
3.3 练习题答案与题解	92
(二)定积分	94
3.4 定积分的概念与性质	95

3.4 练习题答案与题解	101
3.5 定积分的计算	104
3.5 练习题答案与题解	108
3.6 无穷区间上的广义积分	113
3.6 练习题答案与题解	115
3.7 定积分的应用	118
3.7 练习题答案与题解	124
自检自测题三	126
参考答案	129

B 部分 向量代数与空间解析几何

第四章 向量代数与空间解析几何	136
4.1 向量代数	136
4.1 练习题答案与题解	140
4.2 平面与直线	142
4.2 练习题答案与题解	147
4.3 简单的二次曲面	150
4.3 练习题答案与题解	153
自检自测题四	154
参考答案	155

C 部分 多元函数微分学与二重积分

第五章 多元函数微分学	160
5.1 多元函数的基本概念	160
5.1 练习题答案与题解	163
5.2 偏导数与全微分	165
5.2 练习题答案与题解	169
5.3 多元复合函数的微分法及隐函数的求导公式	171
5.3 练习题答案与题解	174
5.4 二元函数的无条件极值	176
5.4 练习题答案与题解	177
5.5 二元函数的条件极值	179
5.5 练习题答案与题解	180
自检自测题五	181
参考答案	183
第六章 二重积分	186
6.1 二重积分的概念与性质	186
6.2 二重积分的计算	187
6.2 练习题答案与题解	194

6.3 二重积分的简单应用	198
6.3 练习题答案与题解	201
自检自测题六	202
参考答案	204

D 部分 无穷级数与常微分方程

第七章 无穷级数	208
(一)数项级数	208
7.1 数项级数	208
7.1 练习题答案与题解	210
7.2 正项级数	211
7.2 练习题答案与题解	214
7.3 任意项级数	216
7.3 练习题答案与题解	218
(二)幂级数	220
7.4 幂级数	220
7.4 练习题答案与题解	222
7.5 初等函数的幂级数展开法	225
7.5 练习题答案与题解	229
自检自测题七	231
参考答案	233
第八章 常微分方程	237
(一)一阶微分方程	237
8.1 基本概念	237
8.1 练习题答案与题解	238
8.2 一阶微分方程	239
8.2 练习题答案与题解	242
(二)可降阶方程	244
8.3 可降阶的微分方程	244
8.3 练习题答案与题解	246
(三)二阶线性微分方程	247
8.4 二阶常系数线性微分方程	247
8.4 练习题答案与题解	250
自检自测题八	252
参考答案	254
附录 I 2004 年全国各类成人高校统一招生考试高等	
数学(一)试卷及参考答案	258
附录 II 2005—2006 年度全国各类成人高校统一招生考试高等	
数学(一)试卷样题及参考答案	264

A部分 一元函数微积分学

第一章 极限、连续

1.1 极 限

一、考纲要求

(1)理解极限的概念(对极限定义中“ $\varepsilon-N$ ”、“ $\varepsilon-\delta$ ”、“ $\varepsilon-M$ ”等形式的描述不作要求)。会求函数在一点处的左级限与右极限,了解函数在一点处极限存在的充分必要条件。

(2)了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则。

(3)理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系。会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价)。会运用等价无穷小量代换求极限。

(4)熟练掌握用两个重要极限求极限的方法。

二、考点精要

(一)数列的极限

1. 数列定义 依某种规律按自然数顺序排列的无穷多个数,如 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 称为数列,记作 $\{x_n\}$ 。其中的每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 称为一般项或通项。数列也可看作定义在正整数集 N_+ 上函数 $x_n=f(n)$ —列函数值,即 $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$ 。例如(1) $1, 3, 5, \dots, x_n=2n-1$, (2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$, (3) $0, 1, 0, 1, \dots, x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$, (4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, x_n=\frac{1}{n}, \dots$

2. 数列的有界性与单调性

(1)数列 $\{x_n\}$ 若存在正数 M ,对任意的 n ,都有 $|x_n| \leq M$ 成立,则称 $\{x_n\}$ 为有界数列,否则称数列无界。

(2)数列 $\{x_n\}$ 若对任意 $n \in N_+$,总有 $x_n \leq x_{n+1}$,则称 $\{x_n\}$ 单调增加数列,反之,若总有 $x_n \geq x_{n+1}$ 则称 $\{x_n\}$ 为单调减少数列,具有性质(1)和(2)的数列称为单调有界数列。

3. 数列的极限定义。(1)描述性定义:给定数列 $\{x_n\}$,当 n 无限增大时($n \rightarrow \infty$), x_n 无限趋近于某个常数 A ,即 $|x_n - A|$ 无限趋近于0,称 $\{x_n\}$ 以 A 为极限或称收敛于 A ,记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 或 $x_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$)。(2)“ $\varepsilon-N$ ”定义, $\{x_n\}$ 对任意给定无论多么小正数 $\varepsilon > 0$,总有正整数 N ,当 $n > N$ 时, $|x_n - A| < \varepsilon$ 恒成

立。则称常数 A 为 $\{x_n\}$ 的根限,记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.如果 $\{x_n\}$ 无极限,则称 $\{x_n\}$ 发散。

4. 收敛数列的性质

(1)收敛数列的极限惟一的(极限存在的唯一性)

(2)收敛数列必有界,即有界为 $\{x_n\}$ 收敛的必要条件而非充分条件。

5. 收敛准则

(1)单调有界数列必有极限。

(2)夹逼准则,设数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 、 $\{z_n\}$.如果 $y_n \leq x_n \leq z_n (n \in \mathbb{N}_+)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

6. 数列极限的四则运算,若数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$,有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ 则(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ab$, (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$.

7. 重要极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

(二) 函数极限

1. 自变量 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限定义

(1)设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有定义,如果当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 无限趋近于常数 A ,即 $|f(x) - A|$ 无限趋于零,则称当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限,记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.或对任意给定 $\varepsilon > 0$,存在 $M > 0$,当 $x > M$ 时,总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

(2)设 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 内有定义,如果当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x)$ 无限趋近于常数 A .即 $|f(x) - A|$ 无限趋于零,则称当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限,记作 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 $M > 0$,当 $x < -M$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

(3)设 $f(x)$ 在 $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ 内有定义,如果当 $|x|$ 无限增大时, $f(x)$ 无限趋于常数 A ,即 $|f(x) - A|$ 无限趋于零,则称当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限,记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$,也可叙述为对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 $M > 0$,当 $|x| > M$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

2. 自变量 $x \rightarrow x_0$ 时函数极限定义(双边极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义.如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 无限趋近于常数 A ,即 $|f(x) - A|$ 无限趋于零,称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.精确定义:对任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

3. 函数的左、右极限定义(单边极限)

(1)当 x 从 x_0 左侧($x < x_0$)趋于 x_0 表示为 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 无限趋于常数 A ,即 $|f(x) - A|$ 趋于零,称 A 边为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限,记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$,或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$,精确定义对任意给定 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立.

(2)当 x 从 x_0 右侧($x > x_0$)趋于 x_0 表示为 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 无限趋于 A ,即 $|f(x) - A|$ 无限趋于零,称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限,记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$ 精确定义对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立.左、右极限也可用符号 $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

$$f(x_0+0)=\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)=A \text{ 表示.}$$

4. 函数极限存在的充分必要条件

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)=A=\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. 即左、右极限都存在且相等.

5. 函数极限存在的夹逼准则: 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域 (或 $|x|>M$) 内有定义, 若 (1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. (2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x)=\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x)=A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=A$.

6. 函数极限的四则运算法则: 设函数 $f(x), g(x)$ 在自变量 x 的同一极限过程中, 有 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$.

$$\text{则 (1) } \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

$$7. \text{重要极根: (1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$\text{或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(三) 无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量定义 若函数 $f(x)$, 有 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)=0$, 则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时为无穷小量 (以 0 为极限的变量).

2. 无穷小量与极限的关系 $f(x)$ 以 A 为极限的充要条件是 $f(x)=A+a$, 其中 a 为同一变化过程的无穷小量, 即

$$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+a \quad (a \text{ 为无穷小量}).$$

3. 无穷小量的性质

(1) 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量,

(2) 有限个无穷小量的积仍是无穷小量,

(3) 无穷小量与有界变量的积仍为无穷小量.

4. 无穷小量的比较, 设 a, β 为同一极限过程中的无穷小量.

(1) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta}=0$, 则称 α 是较 β 高阶的无穷小量, 记作 $\alpha=o(\beta)$.

(2) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta}=\infty$, 则称 α 是较 β 低阶的无穷小量.

(3) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta}=c (c \neq 0)$ 则称 α 与 β 是同阶无穷小量.

(4) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta}=1$ 则称 α 与 β 为等价无穷小量记作 $\alpha \sim \beta$

5. 等价无穷小量的代换, 设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$.

6. 无穷大量定义: 函数 $f(x)$, 在 x 的某一变化过程中, $|f(x)|$ 无限增大, 称 $f(x)$ 为无穷大量, 记作 $\lim f(x)=\infty$, 这种写法, 只是刻画变化趋势, 不是极限.

7. 无穷小量与无穷大量关系:若 α 为无穷小量($\alpha \neq 0$),则 $\frac{1}{\alpha}$ 为无穷大量,即互为倒数关系。

三、解题指导

例1.1.1 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n+1}{n^3-3n+1}, (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+4n-5}{n+1}.$$

解:(1)利用分式的基本性质变形:分子、分母同除 n^3 ,

$$\text{即原式} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2+n+1}{n^3}}{\frac{n^3-3n+1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{0+0+0}{1-0+0} = 0$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \infty,$$

例1.1.2 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - n), (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2})$$

解:(1)($\infty - \infty$)型,原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} [(n+2)-(n-2)]}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n} (\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}})} = 2.$$

例1.1.3 求下列极限:(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}]$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\cdots+2n}{(n+1)(n-1)}$$

解:(1)注意到 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,于是原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} [(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$. (应学会这种分析变形)

$$(2) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1+2+\cdots+n)}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{n^2-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2-1} = 1$$

例1.1.4 求下列极限:(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+k}$, (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$

解:(1)原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{n})^n \cdot (1 + \frac{1}{n})^k] = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^k = e \cdot 1$

$$(2) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

(一)求函数的极限,主要方法有极限的四则运算法则,两个重要极限,无穷小量与有界变量积仍是无穷小量,等价无穷小量代换等,极限形式有 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞ 型,对 $\frac{0}{0}$ 型通过分解因式,有理化等代数变形消去零因式,求之.

$$\text{例1.1.5 求下列极限: (1) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}, \quad (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

$$\text{解: (1) 原式} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) = -3$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(二) \text{利用重要极限} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

例1.1.6 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}.$$

$$\text{解: (1) 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

(3)在乘积和商中用等价无穷小量代换,可使计算简捷,当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \dots$

$$\text{例1.1.7 求下列极限: (1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x}{\tan x^m}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

解:(1)当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin^n x \sim x^n$, $\tan(x^m) \sim x^m$,所以

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 0, n > m, \\ 1, n = m, \\ \infty, n < m, \end{cases}$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x \sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

对“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的计算方法与数列情况相同.

例1.1.8 求下列函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 + 2x + 2}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n - 1}{b_0 x^m - 1}$$

$$\text{解: (1) 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 2$$

$$(2) \text{原式} = \begin{cases} 0, n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, n = m, \\ \infty, n > m \end{cases}$$

对“ $\infty - \infty$ ”型极限一般可通过通分,有理化变为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型后再求之.

例1.1.9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right), \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - x)$$

解: (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x^2-1} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{2}.$

(2) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0.$

对“ 1^∞ ”型的计算,通常经过变换利用 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 或

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 计算.

例1.1.10 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+3}{x-1})^x$$

解: (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{-x})^{-x}]^{-1} \stackrel{\text{令 } t = -x}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{t})^t]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

(2) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{3}{x})^x}{(1 - \frac{1}{x})^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{3}{x})^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x} = \frac{e^3}{e^{-1}} = e^4$ 或原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{4}{x-1})^{\frac{x-1}{4} \cdot 4}]^{\frac{x-1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{4}{x-1})^{\frac{x-1}{4}}]^4.$

$$(1 + \frac{4}{x-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{4}{x-1})^{\frac{x-1}{4}}]^4 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{4}{x-1}) = e^4$$

例1.1.11 求一列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{3}{x-1}}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

解: (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} [(1 + (x-1))]^{\frac{3}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \{ [1 + (x-1)]^{\frac{1}{x-1}} \}^3 = e^3$ (2) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2\sin^2 x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 - 2\sin^2 x)^{\frac{1}{-2\sin^2 x} \cdot \frac{-2\sin^2 x}{x}}] = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 - 2\sin^2 x)^{\frac{1}{-2\sin^2 x}}]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x}{x}} = e^0 = 1$

对无穷小量与有界函数积的极限计算,利用其积仍是无穷小量.

例1.1.12 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cos \frac{1}{x-1}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \arctan x}{x^2+1}.$$

解: (1) 因 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0, |\cos(x-1)| \leq 1,$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cos \frac{1}{x-1} = 0$

(2) 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, $\arctan x < \frac{\pi}{2}$. 所以原式 = 0

(三) 求分段函数的极限, 主要是求分段点处的极限, 这要根据函数在一点处极限存在的充要条件——左、右极限存在且相等来确定, 求左极限、右极限的方法与其求极限的方法相同。

例 1.1.13 求下列函数在分段点处的极限:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \sin x, & x < 0 \\ x \sin \frac{1}{2} + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

解: (1) $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 2$, $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \sin \frac{1}{2} + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{2} + 2 = 0 + 2 = 2$, 即 $f(0-0) = f(0+0)$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

$$(2) f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{2x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{2}, f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \text{ 即 } f(0-0) \neq f(0+0)$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在。

(四) 求极限等式中的字母系数, 这类问题的解法, 主要涉极限概念深刻理解, 及不同类型极限的求法。

例 1.1.14 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = -5$, 求 a, b 的值。

解: 因当 $x \rightarrow 2$ 时, $x-2 \rightarrow 0$, 由此及已知, 可得必有 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b) = 0$. (否则, 将与已知矛盾). 即 $4+2a+b=0, b=-4-2a$, 有 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax-4-2a}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2} = 2+2+a=4+a$. 即 $4+a=-5$, $a=-9, b=14$, 或由已知, 必有 $x^2+ax+b=(x-2)(x+k)$, 即 $\lim_{x \rightarrow 2} (x+k) = -5, k=-7$, 由 $x^2+ax+b=(x-2)(x-7) = x^2-9x+14$. 比较两端系数, 得 $a=-9, b=14$

例 1.1.15 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2-2}{x-1} - ax+b) = 0$, 求 a, b 的值。

解: 此为“ $\infty - \infty$ ”型极限, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 + (a+b)x - b - 2}{x-1} = 0$. 因分母为 $x=1$ 的一次二项式, 分子必为常数即 $\begin{cases} 1-a=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

例 1.1.16 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}, & x > 0 \\ 3x^2+a, & x < 0 \end{cases}$ 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 求 a 的值。

解: 因 $f(0+0)=\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$, $f(0-0)=\lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2+a)=a$, 由 f

$(0+0)=f(0-0)$, 故 $a=\frac{1}{2}$.

(五) 无穷小量的比较, 这一问题实质上就是求两个无穷小量的商的极限.

例 1. 1. 17 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+ax^3}-1$ 与 $\sin^3 x$ 是等价无穷小量, 求常数 a .

解: 依题意有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax^3}-1}{\sin^3 x} = 1$. 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3}{\sin^3 x(\sqrt{1+ax^3}+1)} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin^3 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+ax^3}+1} = \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$

$=1$, 等 $a=2$.

四、练习题

(一) 选择题

1. 下更极限错误的是().

A. $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{2})^x = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{2})^x = -1$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^x = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^x = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 mx}{x^2}$ (m 为常数) 等于().

A. 0

B. 1

C. m^2

D. $\frac{1}{m}$

3. 若 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x+k}{x-3} = 4$, 则 $k=($).

A. -4

B. 4

C. 3

D. -3

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列式为无穷小量的是().

A. $\frac{x+\cos x}{x}$

B. $\frac{\sin x}{x}$

C. $\frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$

D. $\frac{1}{2^x-1}$

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{a}{x})^{bx+c}$ 等于().

A. e

B. e^b

C. e^{ab}

D. e^{ab+c}

6. 下列数列中发散的是().

A. $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$

B. $\{x_n\} = \{\frac{(-1)^n}{n}\}$

C. $\{x_n\} = \{\frac{1+(-1)^n}{n}\}$

(D) $\{x_n\} = \{1+(-1)^n\}$

(二) 填空题

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+3n} =$.

2. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{2} =$.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sin x}{x} =$.

4. 若 $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$.

5. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} = \frac{1}{3}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(3x)} =$.