教育部高校学生司审定

高等数学(一)

全国各类成人高校统一招生考试辅导教材

2005–2006 专升本

中国成人教育协会
成人高校招生专业委员会组织编写

白山出版社
Bai shan chu ban she

2005—2006年度全国各类成人高校统一招生考试辅导教材(专升本)

高等数学(一)

中国成人教育协会成人高校招生专业委员会组织编写

主　编　苗作仁　李　清

副主编　晏祖根　崔丽[illegible]　秦　明

白　山　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)/苗作仁,李清编写;中国成人教育协会成人高校招生专业委员会组织编写.-沈阳:白山出版社,2005.2

2005-2006年度全国各类成人高校统一招生考试辅导教材.专升本

ISBN 7-80687-242-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①苗… ②李… ③中… Ⅲ.高数(一)-成人教育:高等教育-升学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第011915号

出版发行	白山出版社
地　　址	沈阳市沈河区二纬路23号
邮　　编	110013
电　　话	024-23065667
责任编辑	朱忠义
特聘编辑	王　鹏　王学忠
封面设计	邵　阳
责任校对	李红蕾
印　　刷	北宁市印刷厂
开　　本	787×1092毫米　1/16
印　　张	17 1/2
字　　数	345千字
版　　次	2005年2月第1版
出版时间	2005年2月第1次印刷
印　　数	10000册
书　　号	ISBN 7-80687-242-6/G·35
定　　价	28.00元

2005—2006 年度

全国各类成人高校统一招生考试辅导教材(专升本)

编　委　会

出 版 前 言

中国成人教育协会成人高校招生专业委员会依据国家教育部最新颁布的《2005—2006年度全国各类成人高校统一招生复习考试大纲》，组织一批具有多年成人高考辅导经验和较高专业水平且在当地考生中颇有声望的教师编写了《全国各类成人高校统一招生考试辅导教材》，由**教育部高校学生司审定**。

这套教材充分考虑了成人考生的特点，力求突出重点，条理清晰，在题型设计上，更加贴近考试实际。为了方便教师辅导和考生自学，每种教材的各章前都列出大纲相关要求，每章后附有自检自测习题。全书最后还附有2004年全国各类成人高校统一招生考试试卷及参考答案和2005—2006年度全国各类成人高校统一招生考试样题及参考答案。为了帮助考生取得优异成绩，编写教师**精心设计了五套模拟试卷及参考答案，随书赠送。**

中国成人教育协会成人高校招生专业委员会

2005年1月25日

2005—2006年度全国各类成人高校统一招生考试

高等数学(一)考试形式及试卷结构

试卷总分:150分

考试时间:150分钟

考试方式:闭卷,笔试

试卷内容比例(%)	
极限和连续	13
一元函数微分学	25
一元函数积分学	25
多元函数微分学(含向量代数与空间解析几何)	20
无穷级数	7
常微分方程	10
试卷题型比例(%)	
选择题	27
填空题	27
解答题	46
试题难易比例(%)	
容易题	30
中等难度题	50
较难题	20

目　录

A部分　一元函数微积分学

B部分 向量代数与空间解析几何

C部分 多元函数微分学与二重积分

D部分 无穷级数与常微分方程

A部分　一元函数微积分学

第一章　极限、连续

1.1　极　限

一、考纲要求

(1)理解极限的概念(对极限定义中"$\varepsilon-N$"、"$\varepsilon-\delta$"、"$\varepsilon-M$"等形式的描述不作要求)。会求函数在一点处的左级限与右极限,了解函数在一点处极限存在的充分必要条件。

(2)了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则。

(3)理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系。会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价)。会运用等价无穷小量代换求极限。

(4)熟练掌握用两个重要极限求极限的方法。

二、考点精要

(一)数列的极限

1. 数列定义　依某种规律按自然数顺序排列的无穷多个数,如$x_1,x_2\cdots x_n\cdots$称为数列,记作$\{x_n\}$.其中的每一个数称为数列的项,第n项x_n称为一般项或通项.数列也可看作定义在正整数集N_+上函数$x_n=f(n)$一列函数值,即$f(1),f(2),f(3),\cdots f(n)\cdots$.例如(1)$1,3,5,\cdots x_n=2n-1$,(2)$\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$,(3)$0,1,0,1\cdots x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$,(4)$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\cdots x_n=\frac{1}{n}\cdots$

2. 数列的有界性与单调性

(1)数列$\{x_n\}$若存在正数M,对任意的n,都有$|x_n|\leqslant M$成立,则称$\{x_n\}$为有界数列,否则称数列无界。

(2)数列$\{x_n\}$若对任意$n\in N_+$,总有$x_n\leqslant x_{n+1}$,则称$\{x_n\}$单调增加数列,反之,若总有$x_n\geqslant x_{n+1}$则称$\{x_n\}$为单调减少数列,具有性质(1)和(2)的数列称为单调有界数列。

3. 数列的极限定义.(1)描述性定义:给定数列$\{x_n\}$,当n无限增大时($n\to\infty$),x_n无限趋近于某个常数A,即$|x_n-A|$无限趋近于0,称$\{x_n\}$以A为极限或称收敛于A,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A\ (n\to\infty)$.(2)"$\varepsilon-N$"定义,$\{x_n\}$对任意给定无论多么小正数$\varepsilon>0$,总有正整数$N$,当$n>N$时,$|x_n-A|<\varepsilon$恒成

立。则称常数A为$\{x_n\}$的根限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.如果$\{x_n\}$无极限，则称$\{x_n\}$发散。

4. 收敛数列的性质

(1)收敛数列的极限惟一的(极限存在的唯一性)

(2)收敛数列必有界，即有界为$\{x_n\}$收敛的必要条件而非充分条件。

5.收敛准则

(1)单调有界数列必有极限.

(2)夹逼准则，设数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$.如果$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n\in N_+)$且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$.则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

6. 数列极限的四则运算，若数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$则(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$；(2)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=ab$，(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}(b\neq0)$.

7. 重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$.

(二)函数极限

1. 自变量$x\to\infty$时函数极限定义

(1)设$f(x)$在$(a,+\infty)$上有定义，如果当$x\to+\infty$时，$f(x)$无限趋近于常数A，即$|f(x)-A|$无限趋于零，则称当$x\to+\infty$时，$f(x)$以A为极限，记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.或对任意给定$\varepsilon>0$，存在$M>0$，当$x>M$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立.

(2)设$f(x)$在$(-\infty,a)$内有定义，如果当$x\to-\infty$时，$f(x)$无限趋近于常数A.即$|f(x)-A|$无限趋于零，则称当$x\to-\infty$时，$f(x)$以A为极限，记作$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$或对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$M>0$，当$x<-M$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立.

(3)设$f(x)$在$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$内有定义，如果当$|x|$无限增大时，$f(x)$无限趋于常数$A$，即$|f(x)-A|$无限趋于零，则称当$x\to\infty$时$f(x)$以$A$为极限，记作$=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A\ (x\to\infty)$，也可叙述为对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$M>0$，当$|x|>M$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立.

2. 自变量$x\to x_0$时函数极限定义(双边极限)

设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义.如果当$x\to x_0$时，$f(x)$无限趋近于常数A，即$|f(x)-A|$无限趋于零，称当$x\to x_0$时，$f(x)$以A为极限记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.或$f(x)\to A\ (x\to x_0)$.精确定义：对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)\to A|<\varepsilon$成立.

3. 函数的左、右极限定义(单边极限)

(1)当x从x_0左侧$(x<x_0)$趋于x_0表示为$x\to x_0^-$时，$f(x)$无限趋于常数A，即$|f(x)-A|$趋于零，称A边为$f(x)$在x_0点的左极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或$f(x)\to A\ (x\to x_0^-)$，精确定义对任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立.

(2)当x从x_0右侧$(x>x_0)$趋于x_0表为$x\to x_0^+$时，$f(x)$无限趋于A，即$|f(x)-A|$无限趋于零，称A为$f(x)$在x_0点的右极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$或$f(x)\to A\ (x\to x_0^+)$精确定义对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立.左、右极限也可用符号$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 表示.

4. 函数极限存在的充分必要条件

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.即左、右极限都存在且相等.

5. 函数极限存在的夹逼准则:设函数$f(x)$,$g(x)$,$h(x)$在点x_0的某一去心邻域(或$|x|>M$)内有定义,若(1)$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$. (2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

6. 函数极限的四则运算法则:设函数$f(x)$,$g(x)$在自变量x的同一极限过程中,有$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$.

则(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$

7. 重要极根 (1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,(2)$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(三)无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量定义　若函数$f(x)$,有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称$f(x)$在$x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷小量(以0为极限的变量).

2. 无穷小量与极限的关系　$f(x)$以A为极限的充要条件是$f(x)=A+a$,其中α为同一变化过程的无穷小量,即

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+a$($a$为无穷小量).

3. 无穷小量的性质

(1)有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量,

(2)有限个无穷小量的积仍是无穷小量,

(3)无穷小量与有界变量的积仍为无穷小量。

4. 无穷小量的比较,设a,β为同一极限过程中的无穷小量.

(1)若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称$\alpha$是较$\beta$高阶的无穷小量,记作$\alpha=o(\beta)$.

(2)若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称$\alpha$是较$\beta$低阶的无穷小量.

(3)若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c(c\neq0)$则称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小量.

(4)若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$则称$\alpha$与$\beta$为等价无穷小量记作$\alpha\sim\beta$

5. 等价无穷小量的代换,设$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

6. 无穷大量定义:函数$f(x)$,在x的某一变化过程中,$|f(x)|$无限增大,称$f(x)$为无穷大量,记作$\lim f(x)=\infty$,这种写法,只是刻化变化趋势,不是极限。

7. 无穷小量与无穷大量关系：若α为无穷小量($\alpha\neq0$)，则$\frac{1}{\alpha}$为无穷大量，即互为倒数关系。

三、解题指导

例1.1.1 求下列极限：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^3-3n+1}$，(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-5}{n+1}$.

解：(1)利用分式的基本性质变形：分子、分母同除n^3，

即原式$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+n+1}{n^3}}{\frac{n^3-3n+1}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{0+0+0}{1-0+0}=0$

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\infty$，

例1.1.2 求下列极限：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$，(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$

解：(1)($\infty-\infty$)型，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$$

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}[(n+2)-(n-2)]}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}})}=2.$

例1.1.3 求下列极限：(1)$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(n+1)(n-1)}$

解：(1)注意到$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，于是原式$=\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$.(应学会这种分析变形)

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{2(1+2+\cdots n)}{n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{n^2-1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2-1}=1$

例1.1.4 求下列极限：(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+k}$，(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$

解：(1)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})^k]=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^k=e\cdot1$

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n]^{\frac{1}{2}}=[\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

(一)求函数的极限,主要方法有极限的四则运算法则,两个重要极限,无穷小量与有界变量积仍是无穷小量,等价无穷小量代换等,极限形式有$\frac{0}{0}$,$\frac{\infty}{\infty}$,$\infty-\infty$,1^∞,型,对$\frac{0}{0}$型通过分解因式,有理化等代数变形消去零因式,求之.

例1.1.5　求下列极限:(1)$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$,　　(2)$\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

解:(1)原式$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x-2)=-3$

(2)原式$=\lim\limits_{h\to0}\frac{h}{h(\sqrt{h+x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(二)利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

例1.1.6　求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$,　　(2)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{2x}$.

解:(1)原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

(2)原式$=\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos3x}\cdot\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos3x}=\frac{3}{2}\cdot1\cdot1=\frac{3}{2}$.

(3)在乘积和商中用等价无穷小量代换,可使计算简捷,当$x\to0$时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,…

例1.1.7　求下列极限:(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^n x}{\tan x^m}$,　　(2)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

解:(1)当$x\to0$时,$\sin^n x\sim x^n$,$\tan(x^m)\sim x^m$,所以

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0,n>m,\\1,n=m,\\\infty,n<m,\end{cases}$

(2)原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$.

对“$\frac{\infty}{\infty}$”型的计算方法与数列情况相同.

例1.1.8　求下列函数极限:

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2+2x+2}$,　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n-1}{b_0x^m-1}$

解:(1)原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{2-0+0}{1+0+0}=2$

(2)原式$=\begin{cases}0,n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0},n=m,\\ \infty,n>m\end{cases}$

对“$\infty-\infty$”型极限一般可通过通分,有理化变为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型后再求之.

例1.1.9 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})$, (2)$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)$

解:(1)原式$=\lim\limits_{x\to1}\frac{2-(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{x^2-1}=-\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}$.

(2)原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$.

对“1^∞”型的计算,通常经过变换利用$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$或

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$计算.

例1.1.10 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$, (2)$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^x$

解:(1)原式$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}\xlongequal{令t=-x}\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{t})^t]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

(2)原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{3}{x})^x}{(1-\frac{1}{x})^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x}=\frac{e^3}{e^{-1}}=e^4$或原式$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{4}{x-1})^{\frac{x-1}{4}\cdot4+1}]=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{4}{x-1})^{\frac{x-1}{4}}]^4\cdot$ $(1+\frac{4}{x-1})=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{4}{x-1})^{\frac{x-1}{4}}]^4\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x-1})=e^4$

例1.1.11 求一列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{3}{x-1}}$, (2)$\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{x}}$.

解:(1)原式$=\lim\limits_{x\to1}[(1+(x-1))]^{\frac{3}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\{[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}\}^3=e^3$ (2)原式$=\lim\limits_{x\to0}(1-2\sin^2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1-2\sin^2x)^{\frac{1}{-2\sin^2x}\cdot\frac{-2\sin^2x}{x}}]=\lim\limits_{x\to0}[(1-2\sin^2x)^{\frac{1}{-2\sin^2x}}]^{\frac{-2\sin^2x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin^2x}{x}}=e^0=1$

对无穷小量与有界函数积的极限计算,利用其积仍是无穷小量.

例1.1.12 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cos\frac{1}{x-1}$, (2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\arctan x}{x^2+1}$.

解:(1)因$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$,$|\cos(x-1)|\leqslant1$,

所以$\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cos\frac{1}{x-1}=0$

(2)因$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$. 所以原式=0

(三)求分段函数的极限，主要是求分段点处的极限，这要根据函数在一点处极限存在的充要条件——左、右极限存在且相等来确定，求左极限、右极限的方法与其求极限的方法相同。

例1. 1. 13　求下列函数在分段点处的极限：

(1)$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}\sin x, & x<0\\ x\sin\frac{1}{2}+2, & x>0\end{cases}$

(2)$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}, & -1\leqslant x<0\end{cases}$

解：(1)$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2\sin x}{x}=2\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=2$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^-}(x\sin\frac{1}{x}+2)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}+2=0+2=2$，即$f(0-0)=f(0+0)$，故$\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

(2)$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2x}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{1}{2}$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$即$f(0-0)\neq f(0+0)$

故$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

(四)求极限等式中的字母系数，这类问题的解法，主要涉极限概念深刻理解，及不同类型极限的求法.

例1. 1. 14　已知$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=-5$，求$a$，b的值.

解：因当$x\to2$时，$x-2\to0$，由此及已知，可得必有$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$.（否则，将与已知矛盾）. 即$4+2a+b=0$，$b=-4-2a$，有$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax-4-2a}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}=2+2+a=4+a$. 即$4+a=-5$，$a=-9$，$b=14$，或由已知，必有$x^2+ax+b=(x-2)(x+k)$，即$\lim\limits_{x\to2}(x+k)=-5$，$k=-7$，由$x^2+ax+b=(x-2)(x-7)=x^2-9x+14$. 比较两端系数，得$a=-9$，$b=14$

例1. 1. 15　若$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-2}{x-1}-ax+b)=0$，求$a$，$b$的值.

解：此为"$\infty-\infty$"型极限，即$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(a+b)x-b-2}{x-1}=0$. 因分母为$x=1$的一次二项式，分子必为常数即$\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=1\\ b=-1\end{matrix}$

例1. 1. 16　设$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}, & x>0\\ 3x^2+a, & x<0\end{cases}$若$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在，求$a$的值.

解：因$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\sin x(\sqrt{x+1}+1)}=\dfrac{1}{2}$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x^2+a)=a$，由$f(0+0)=f(0-0)$，故$a=\dfrac{1}{2}$.

（五）无穷小量的比较，这一问题实质上就是求两个无穷小量的商的极限．

例1.1.17　已知当$x\to 0$时，$\sqrt{1+ax^3}-1$与$\sin^3x$是等价无穷小量，求常数a.

解：依题意有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax^3}-1}{\sin^3x}=1$.即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^3}{\sin^3x(\sqrt{1+ax^3}+1)}=a\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin^3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+ax^3}+1}=\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{a}{2}=1$，等$a=2$.

四、练习题

（一）选择题

1. 下更极限错误的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{2})^x=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{2})^x=-1$　　C. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{1}{2})^x=0$　　D. $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{1}{2})^x=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3mx}{x^2}$（$m$为常数）等于（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. m^2　　D. $\dfrac{1}{m}$

3. 若$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，则$k=$（　　）.

A. −4　　B. 4　　C. 3　　D. −3

4. 当$x\to 0$时，下列式为无穷小量的是（　　）.

A. $\dfrac{x+\cos x}{x}$　　B. $\dfrac{\sin x}{x}$　　C. $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{x}}$　　D. $\dfrac{1}{2^x-1}$

5. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^{bx+c}$等于（　　）.

A. e　　B. e^b　　C. e^{ab}　　D. e^{ab+c}

6. 下列数列中发散的是（　　）.

A. $\{x_n\}=\{\dfrac{1}{n}\}$　　B. $\{x_n\}=\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$　　C. $\{x_n\}=\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\}$　　(D) $\{x_n\}=\{1+(-1)^n\}$

（二）填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+3n})=$________.

2. 若$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2}=$________.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=$________.

4. 若$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. 则$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$________.

5. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=\dfrac{1}{3}$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=$________.