华腾教育
HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书数学类（二）
配人大社《线性代数》(第三版）赵树嫄 主编

经济应用数学基础（二）

线性代数

（第三版）

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 中国人民大学 邹绍荣
本书主编 中国人民大学 李 娜

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- **紧贴教材**：精讲重点 点拨方法 联系考研
- **考试宝典**：教材精华 经典试卷 常考试题
- **学 习 卡**：资料下载 信息交流 互动论坛
- **课后习题**：三级突破 分析要点 总结难点

中国矿业大学出版社

线性代数

（第三版）

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　中国人民大学　邹绍荣
本书主编　中国人民大学　李　娜

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导及习题全解/李娜主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2006.8

（高等学校教材经典同步辅导丛书）

ISBN 7 - 81107 - 396 - X

Ⅰ.线… Ⅱ.李… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086951 号

书　　名 线性代数同步辅导及习题全解

主　　编 李　娜

责任编辑 罗　浩

出版发行 中国矿业大学出版社

网　　址 http://www.cumtp.com **E-mail** cumtpvip@cumtp.com

印　　刷 北京市昌平百善印刷厂

经　　销 新华书店

开　　本 850×1168 1/32 **本册印张** 10.5 **本册字数** 232 千字

版次印次 2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

总 定 价 57.60 元

本套丛书四大特色

本书在编写时充分考虑到您在学习过程中的需求，史无前例地把课后习题按照难易程度分成了三个等级，分别用○代表**“简单”习题，◎代表“中等难度”习题，●代表“较高难度”习题，这是目前所有辅导书都没有的创新！**针对不同的等级我们给出了不同程度的讲解，对于简单习题我们提供了详尽的解题过程，对于中等难度习题我们在简单习题的基础上，添加对该题的详尽分析；对于较高难度习题，我们在中等难度解答的基础上，更是对该题进行总结，以便举一反三，使您能够掌握重点、巩固所学。

特色一

课后习题分等级，开差异化习题全解之先河。

本书附赠的考试宝典，它包括以下丰富内容：

1.知识卡片：这部分集中了教材中的精华部分，我们精选教材的重要公式、定理、定义，把教材中的重点难点知识进行总结，使您在最短的时间掌握最多的知识；

2.为了让大家更零距离的接触考试，我们还特意整理了**名校考研真题、名校期末真题、期末模拟试题**各一套让您提前预热，掌握所学；

3.期末考试常考50道试题索引，这是我们对全国100多所知名高校期中、期末考试题的研究总结出的常考易考的经典题目，对于那些重要的题，我们在正文中将对该题用加灰底的方式特别标注出来，如 $\boxed{\bigcirc\ 1.9}$。有了这些常考题型，相信大家考试时一定会胸有成竹。

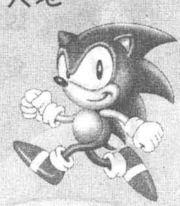
特色二

赠送考试宝典
考试学习无忧

本套丛书四大特色

特色三

网络学习卡
开拓学习新天地



现在是网络时代，我们的服务因此也是全方位的。通过随书赠送的学习卡，只要登陆华腾教育网（www.huatengedu.com.cn），您就可以获得在线学习、在线下载、论坛交流、信息浏览、各种课程课件下载、各种考研真题、课后习题全解下载等精彩服务内容。

本书全部由专家执笔，编写严谨，具有较强的针对性、指导性和补充性等特点。内文结构安排合理，栏目设置系统实用（我们有**内容提要、典型例题与解题技巧、历年考研真题评析**等精彩设置），可以使您事半功倍地掌握更多知识。

特色四

内容合理
结构科学

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前言

PREFACE

《线性代数》是数学专业重要的课程之一，也是报考该类专业硕士研究生的考试课程。中国人民大学出版社的《线性代数》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《线性代数同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 内容提要：串讲概念，总结性质和定理，使知识全面系统，便于掌握。

2. 典型例题与解题技巧：精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

3. 历年考研真题评析：精选历年考研真题进行深入的讲解。

4. 课后习题全解：本书给出了《线性代数》(第三版)的各章习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且我们还依照难易程度给题目划分了三个等级，并根据等级的不同分别对题目进行了不同程度的讲解。

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助。同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

华腾教育教学与研究中心

目录

CONTENTS

第一章 行列式

内容提要

一、(全)排列和逆序数

1.(全)排列

由 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列(简称排列). n 个不同元素的所有排列的种类 $P_n = n!$.

2.逆序和逆序数

在 n 个元素的任一排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中，若某两个元素的先后次序与标准次序不同，如若 $i_t > i_s$，则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数，记作 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 若 τ 为奇数，则称$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$为奇排列；若 τ 为偶数，则称此排列为偶排列.

3.对换

排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中，交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置，称为一次对换. 对换改变排列的奇偶性.

任意一个 n 元排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 经过若干次对换可变为 $(1,2,\cdots,n)$ 样的标准排列，且所作的对换次数与排列 $(i_1,i_2,\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性. 即奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

二、n 阶行列式的定义

n^2 个元素 a_{ij} 排成 n 行 n 列 $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和(共有 $n!$ 项). 各项的符号是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 即 n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可写为

$$(-1)^{i(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

行列式有时简记为：$|a_{ij}|$.

n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项也可以记为

$$(-1)^{i(i_1i_2\cdots i_n)+i(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

三、行列式的性质

1. 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.
2. 互换两行(列)后的行列式是原行列式的相反数.
3. 行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数 k，等于 k 乘此行列式.

推论 行列式某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

4. 两行(列)元素对应成比例的行列式为零.

推论　两行(列)元素完全相同的行列式为零.

5. 若行列式某一行(列)的各元素都是两数之和,则该行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　把行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数,然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

6. 行列式按行(列)展开定理:行列式等于其任一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和.

7. 拉普拉斯展开定理:行列式等于其中任意 k 行(列)的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和(显见(6)是(7)的特例).

四、行列式按行(列)展开

1. 展开法则

行列式按任一行(列)展开

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

或 $D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 其中 A_{ij}

为对应元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. **推论**

行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

或 $$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j)$$

3. **代数余子式的性质**

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D_n\delta_{ij}=\begin{cases}D_n & \text{当 } i=j\\ 0 & \text{当 } i\neq j\end{cases}$$

或 $$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D_n\delta_{ij}=\begin{cases}D_n & \text{当 } i=j\\ 0 & \text{当 } i\neq j\end{cases}$$

其中,$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } i=j\\ 0 & \text{当 } i\neq j\end{cases}$

4. **拉普拉斯定理**

行列式按某 k 行(列)$(1<k\leqslant n-1)$ 展开

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_tA_t$$

其中 $t=C_n^k$,而 $N_i(i=1,2,\cdots,t)$ 为取定的某 k 行(列)所得到的 k 阶子式;A_i 为 N_i 的对应代数余子式.

五、重要公式

1. **上(下)三角行列式及对角行列式**

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

2. 范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\geqslant j>i\geqslant n}(x_i-x_j)$$

3. 克莱姆法则

含有 n 个方程 n 元的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

当行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

典型例题与解题技巧

【例 1】 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1)6　3　2　1　4;

(2)1　3　5　$\cdots(2n-1)$　2　4　$6\cdots(2n)$.

解题分析　在求排列 $j_1, j_2, \cdots j_n$ 的逆序数时,可以从第 2 个数开始,依次统计 $j_i(i=2,3,\cdots,n)$ 与其前面的数构成的逆序个数(即前面比 j_i 大的数的个数)τ_i,则排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为 $\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n$.

解题过程　(1)$\tau(6\ 3\ 2\ 1\ 4)=1+2+3+1=7$,为奇排列.

(2) 该排列的前 n 个数 1 3 5 $\cdots(2n-1)$ 之间不构成逆序,后 n 个数 2 4 $6\cdots(2n)$ 之间也不构成逆序,只有前后 n 个数之间才构成逆序,因此排列的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n+\tau_{n+1}+\tau_{n+2}+\cdots+\tau_{2n-1}+\tau_{2n} \\ &= 0+0+\cdots+0+(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

对于$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性讨论如下:

当 $n=4k$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 为偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 为偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

综上所述，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 k 为任意非负整数.

【例 2】 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解题分析 n 阶行列式的计算方法主要的有以下几种：

1. 直接按定义计算，特别是对于非零元素特别少(一般小于 $2n$ 个)的题适用.
2. 利用行列式的性质或重要公式定理化为三角行列式.
3. 利用行列式按行(列)展开定理进行降阶.
4. 升阶法. 为了对要计算的行列式进行化简. 根据行列式的特征，有时可把原行列式在保值的情况下加上一行一列再进行计算. 常见的加边法如下

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 递推公式法. 把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式 $D_n=k_1D_{n-1}+k_2D_{n-2}$