

高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

浙江科学技术出版社

高等数学

(下 册)

浙江大学应用数学系

《高等数学》编写组

浙江科学技术出版社

责任编辑 周伟元

封面设计 丁振华

高等数学

(下册)

浙江大学应用数学系

《高等数学》编写组

*

浙江科学技术出版社出版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本: 850×1163 1/32 印张: 14.375 字数: 352,000

1986年3月第1版

1986年3月第一次印刷

印数: 1—11,330

统一书号: 7221·90

定 价: 2.80 元

内 容 提 要

本书是根据高等院校工科数学教学大纲编写的。全书分上、下两册。上册共六章,介绍函数、极限和一元函数微积分的基本知识。下册共九章,介绍矢量代数与空间解析几何、多元函数微积分、场论、无穷级数和傅里叶级数、常微分方程等内容。每章配有复习题和习题,书末附有习题答案。

该书可作为高等院校工科各专业高等数学课程的教材或教学参考书,也可作为业余科技大学、电视大学各专业及其他自学者学习高等数学用书。

目 录

第七章 矢量代数与空间解析几何	1
第一节 空间直角坐标系	1
一 空间直角坐标系	1
二 空间两点间的距离	3
第二节 矢量概念	3
一 矢量概念	3
二 矢量的加法	5
三 矢量的减法	6
四 数量与矢量的乘法	7
五 单位矢量	7
第三节 矢量的分解式	8
一 矢量的分解式	8
二 矢量的代数运算	10
第四节 两矢量的数积和矢积	12
一 两矢量的数积	12
二 两矢量的矢积	15
第五节 混合积与二重矢积	18
一 混合积	18
二 二重矢积	21
第六节 空间曲面与曲线方程的概念	22
一 曲面的方程	22
二 空间曲线的方程	27
第七节 空间平面与直线	31
一 平面方程	31
二 空间直线方程	38

第八节 二次曲面	42
复习题	50
习题七	51
第八章 多元函数的微分学	57
第一节 多元函数的概念	57
一 二元函数的概念	57
二 平面点集	61
三 极限与连续	62
四 n 元函数的概念	65
第二节 偏导数	66
一 偏导数的概念	66
二 高阶偏导数	70
第三节 复合函数的偏导数	73
一 复合函数的偏导数	73
二 隐函数的导数	78
第四节 全微分	82
一 全微分	82
二 全微分在近似计算和误差估计中的应用	85
第五节 多元函数的极值	88
一 极值的必要条件	88
二 条件极值	90
三 多元函数的泰勒公式	94
四 极值的充分条件	96
第六节 空间曲线的切线、法平面, 曲面的切平面、法线	99
一 空间曲线的切线、法平面	99
二 曲面的切平面、法线	103
复习题	104
习题八	105
第九章 二重积分、三重积分	111
第一节 二重积分的概念	111

第二节 二重积分的计算法	115
一 二重积分在直角坐标系中的计算法	115
二 二重积分在极坐标系中的计算法	120
三 曲面的面积	127
第三节 三重积分的概念	130
第四节 三重积分的计算法	131
一 三重积分在直角坐标系中的计算法	131
二 三重积分在柱面坐标系和球面坐标系中的计算法	136
第五节 无界区域上的广义重积分	143
第六节* 重积分的换元公式	145
一 二重积分的换元公式	145
二 三重积分的换元公式	149
复习题	150
习题九	151
第十章 曲线积分与曲面积分	157
第一节 曲线积分	157
一 第一类曲线积分	157
二 第二类曲线积分	162
第二节 曲面积分	167
一 第一类曲面积分	167
二 第二类曲面积分	169
第三节 各种积分的关系——三个重要公式	176
一 格林公式	177
二 高斯公式	180
三 斯托克斯公式	183
等第四节 曲线积分与路径无关的条件	184
一 平面上的曲线积分与路径无关的条件	185
二 空间曲线积分与路径无关的条件	192
复习题	193
习题十	194

第十一章 场论	198
第一节 数量场的梯度	199
一 等值面	199
二 方向导数	200
三 梯度	202
四 梯度与等值面的关系	203
第二节 矢量场的散度	205
一 流量	205
二 散度	206
第三节 矢量场的旋度	211
一 环流	211
二 旋度	212
第四节 无源场和势量场	216
一 无源场	216
二 势量场	218
第五节 ∇ 算子和 Δ 算子	221
一 ∇ 算子	221
二 Δ 算子	223
三 调和场	224
第六节* 矢量函数的微分法	224
一 矢量函数	224
二 矢量函数的导数	225
三 矢量函数的微分	227
四 矢量函数的微分法	227
第七节* ∇ 算子的运算	229
第八节* 梯度、散度、旋度和调和量在柱面坐标系及球面坐 标系中的表达式	235
一 在柱面坐标系中的表达式	235
二 在球面坐标系中的表达式	236
复习题	237

习题十一	287
第十二章 级数	242
第一节 基本概念	242
一 级数的概念	242
二 级数的基本性质	245
第二节 正项级数收敛性的判定法	247
一 正项级数	247
二 正项级数收敛性的判定法	248
第三节 一般数项级数收敛性的判定法	253
一 交错级数	253
二 绝对收敛级数与条件收敛级数	254
第四节 幂级数	256
一 幂级数及其收敛半径	256
二 幂级数的性质与计算	261
第五节 函数展开成幂级数	263
一 泰勒级数	263
二 基本初等函数的幂级数展开式	265
三 幂级数展开的唯一性定理、函数展开成幂级数的其他方法	267
第六节 幂级数的应用	271
一 函数的近似公式	271
二 数值计算	273
三 积分计算	277
四 欧拉公式的导出	278
第七节 函数项级数与一致收敛性	278
一 函数项级数的基本概念	278
二 函数项级数的一致收敛概念	280
三 一致收敛级数的性质	284
四 幂级数可以逐项微分与逐项积分的证明	287
复习题	289
习题十二	290

第十三章 含参变量的积分	296
第一节 含参变量的常义积分	296
第二节 含参变量的广义积分	301
一 含参变量广义积分的一致收敛性	302
二 含参变量广义积分的连续性、可积性与可微性	303
复习题	309
习题十三	309
第十四章 傅里叶级数	311
第一节 问题的提出	311
第二节 傅里叶级数、周期函数的傅氏级数展开	313
第三节 定义在有限区间上的函数的傅氏级数展开	325
一 在区间 $[-l, l]$ 上的展开式	326
二 在区间 $[0, l]$ 上的展开式	327
第四节 傅里叶级数的复数形式	330
第五节 矩形域上的二元函数的傅氏级数展开	334
复习题	336
习题十四	336
第十五章 常微分方程	339
第一节 基本概念	339
第二节 可分离变量方程	345
一 可分离变量方程	345
二 齐次方程	348
第三节 一阶线性微分方程	350
一 一阶线性方程	350
二 贝努里(Bernoulli)方程	355
第四节 全微分方程与积分因子	357
一 全微分方程	357
二 积分因子	360
第五节 一阶方程初值问题的数值解	365

一 欧拉(Euler)折线法	365
二 龙格——库塔(Runge-Kutta)法	368
第六节 可降阶的二阶微分方程	370
一 $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ 型的微分方程 ..	370
二 $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ 型的微分方程 ..	372
三 $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ 型的微分方程	375
第七节 线性微分方程的一般理论	377
一 齐次线性微分方程通解的结构	377
二 非齐次线性微分方程解的结构的一个定理	382
第八节 常系数线性微分方程	383
一 常系数齐次线性微分方程的解法	384
二 常系数非齐次线性微分方程的解法	390
三 欧拉方程	401
四 常系数线性方程组	403
五 机械振动	404
六 R. L. C. 电路中的电振荡	408
第九节 一般线性微分方程的一些解法	411
一 降阶法	411
二 常数变易法	414
三 幂级数解法	417
习题十五	420
习题答案	428

第七章 矢量代数与空间解析几何

本章分为两部分：第一部分是矢量代数，主要介绍矢量的加、减法及乘法等运算；第二部分是空间解析几何，介绍空间中一些常见的曲面和曲线的方程及其图形。

第一节 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，使得平面上的点与一组有序的实数 (x, y) 对应起来，从而利用有序的数组（即点的坐标 (x, y) ）来确定平面上点的位置。现在来叙述在空间如何确定点的位置。

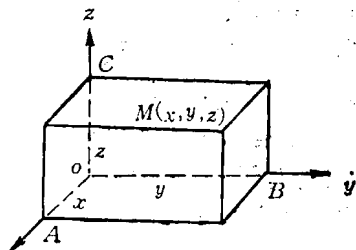


图 7-1

从空间某一定点 O 引三条互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz ，并取 x

定长度单位和正向（图 7-1），这

样就建立了空间直角坐标系。点 O 叫做坐标原点，数轴 Ox, Oy, Oz 叫做坐标轴，每两个坐标轴所在的平面 Oxy, Oyz, Ozx 叫做坐标平面。

空间直角坐标系有右手系和左手系两种（图 7-2）。我们采用的是右手系，它的坐标轴的正向是这样规定的：若右手大拇指垂直于 Oxy 平面，其他四指握拳旋转时从 Ox 轴的正向转过角 $\frac{\pi}{2}$ ，即与 Oy

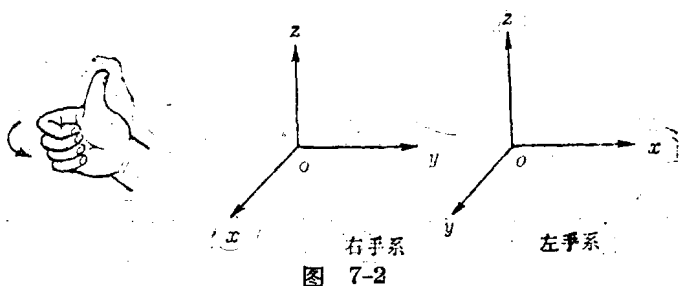


图 7-2

轴的正向相重合,此时,大拇指的指向就是 Oz 轴的正向.也可采用另一方法来确定坐标轴的正向,我们从图中 Oz 轴的正向往下看时, Ox 轴的正向按逆时针方向转过角 $\frac{\pi}{2}$,即与 Oy 轴的正向相重合.

有了空间直角坐标系以后,就可以用一组有次序的实数来确定空间点的位置.设 M 为空间的任意一点(图 7-1),过点 M 分别作垂直于 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴的平面,它们与 Ox 轴、 Oy 轴、 Oz 轴分别交于 A 、 B 、 C 三点,设这三个点在各自的数轴上的坐标分别为 x 、 y 、 z ,点 M 就确定了一组有次序的数 x 、 y 、 z .反之,给了一组有次序的实数 x 、 y 、 z ,则可以分别在三个坐标轴上找到相应的点,过这三个点分别作垂直于坐标轴的平面,这三张平面的交点就是由数 x 、 y 、 z 所确定的点.这样,空间的点与一组有序的实数 x 、 y 、 z 之间就建立了一一对应关系.我们把与点 M 相对应的一组有序实数 x 、 y 、 z 叫做点 M 的直角坐标,记为 $M(x, y, z)$,并分别把 x 、 y 、 z 叫做点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

Oxy 、 Oyz 、 Ozx 三张坐标平面,将整个空间分为八个部分,每一个部分叫做卦限,把点的坐标都是正数,即 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 的那个卦限,叫做第一卦限.

根据点的直角坐标的定义,容易知道对称点坐标之间的符号关系.例如,若点 $M(x, y, z)$ 是空间的一点,则点 $P(x, y, -z)$ 是与 M 关于坐标平面 Oxy 对称的点;点 $Q(x, -y, -z)$ 是与 M

关于轴 Ox 对称的点; 点 $B(-x, -y, -z)$ 是与 M 关于坐标原点
对称的点。

二、空间两点间的距离

利用点的坐标, 可以计算空间任意两点之间的距离。

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间的两已知点, 过点 M_1 、 M_2 各作三张平面分别垂直于三个坐标轴, 形成如图 7-3 所示的长方体。在直角三角形 M_1PM_2 中, 有

$$\begin{aligned}(M_1M_2)^2 &= (M_1P)^2 \\ &\quad + (PM_2)^2 \\ &= (M'_1M'_2)^2 \\ &\quad + (PM_2)^2.\end{aligned}\tag{1.1}$$

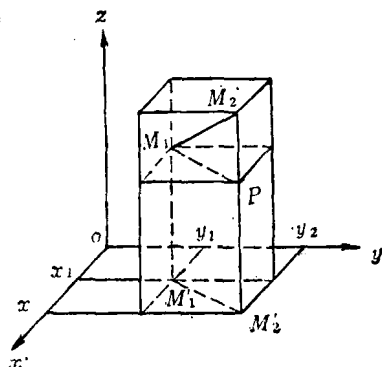


图 7-3

但因

$$(M'_1M'_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \tag{1.2}$$

又

$$(PM_2)^2 = (z_2 - z_1)^2, \tag{1.3}$$

将(1.2)和(1.3)式代入(1.1)式, 便得空间两点间的距离公式:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1.4}$$

第二节 矢量概念

一、矢量概念

人们在实际活动中所遇到的量大致可以分为两类: 一类量只有大小, 例如, 质量、密度、温度等, 这类量叫做数量, 也叫纯量或

标量；另一类量不但有大小，而且有方向，例如，力、位移、速度、加速度等，这类量叫做**矢量**，也叫**向量**。

矢量在书写时常用拉丁字母上面加一个箭头来表示，如 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 、 $\vec{C}$ 等，在铅印时用相应的黑体字母表示为 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 等。矢量的大小又叫做矢量的模，矢量 $\mathbf{A}$ 的模记为 $|\mathbf{A}|$ 。

矢量既然是有大小又有方向的量，因此，在几何上就可以用空间的一个有方向的线段来表示（图 7-4）。在选定长度单位后，这个有向线段的长度代表矢量的大小，它的方向指明矢量的方向。起点为 P ，终点为 Q 的矢量也记为 $\overrightarrow{PQ}$ ，它的模记为 $|\overrightarrow{PQ}|$ 。



图 7-4

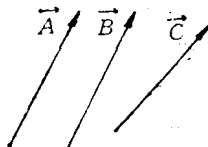


图 7-5

两矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ ，如果它们的模相等且方向相同，我们就说这两个**矢量相等***，记为

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

例如，图 7-5 所示的矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是相等的；而矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{C}$ 是不相等的，因为它们的模虽相等，但方向不同。

如果一个矢量的模为零，叫它为零矢量，记为 $\mathbf{0}$ 。零矢量是为了运算需要而引进的特殊矢量，它的方向不定。

* 如果矢量的起点是固定的，叫做**固定矢量**。如质点的位移是固定矢量。起点可以在矢量所在的直线上移动的矢量，叫做**滑动矢量**，如作用在一刚体上的力就是滑动矢量，它可以在刚体中力的作用线上移动而对刚体作用的效果是一样的。在数学上，研究的是矢量最一般的特性，即大小和方向。对于特殊的情况，可以在一般的原则下加以特殊的考虑。只考虑矢量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，这种矢量叫做**自由矢量**，本章只讨论自由矢量。

记两矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间的夹角为 θ (如图 7-6), 我们规定 $0 \leq \theta \leq \pi$. 特别地, 当 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 同向时, $\theta = 0$; 当 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 反向时, $\theta = \pi$.

矢量与数量的根本区别在于前者有方向, 后者没有方向. 矢量的大小和方向是组成矢量的不可分割的部分, 因此, 在讨论矢量的运算时, 必须把它的大小和方向统一起来考虑.

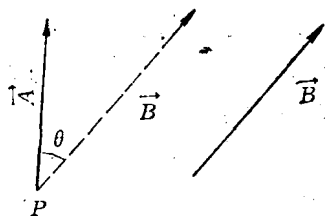


图 7-6

二、矢量的加法

由实验知道, 如果有两个力 $\mathbf{f}_1$ 与 $\mathbf{f}_2$ 作用在一质点上, 那么它们的合力 $\mathbf{f}$ 可按平行四边形法则求得 (图 7-7). 对于速度也有同样的结论. 一般, 两矢量和的定义如下:



图 7-7

两矢量

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{OP} \quad \text{与} \quad \mathbf{B} = \overrightarrow{OQ}$$

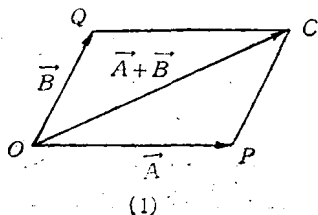
的和是以这两个矢量为邻边的平行四边形的对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$ (图 7-8(1)), 记为

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

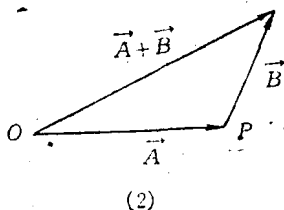
又因 $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OQ}$, 所以

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}.$$

由此可得两矢量加法的三角形法则: 以矢量 $\mathbf{A}$ 的终点作为矢量 $\mathbf{B}$



(1)



(2)

图 7-8

的起点作矢量 $\vec{B}$, 从 $\vec{A}$ 的起点到 $\vec{B}$ 的终点所作的矢量, 就是它们的和 $\vec{A} + \vec{B}$ (图 7-8(2)).

三个或三个以上的矢量也可以相加, 只要把这些矢量中前一个矢量的终点作为次一个矢量的起点, 再从最初的起点到最后的终点所作的矢量, 就是它们的和 (图 7-9).

由图 7-8(1) 和图 7-10 可以看出, 矢量的加法具有以下运算规律:

$$(1) \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \quad (\text{交换律})$$

$$(2) \quad \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}. \quad (\text{结合律})$$

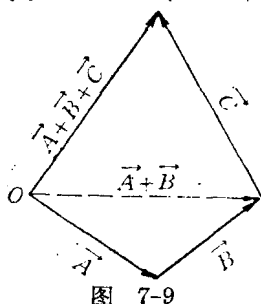


图 7-9

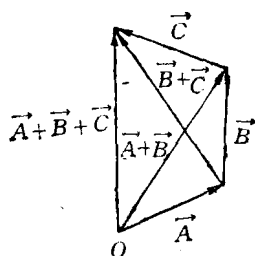


图 7-10

三、矢量的减法

象数量的减法是加法的逆运算一样, 矢量的减法也是加法的逆运算. 矢量减法的定义如下:

如果矢量 $\vec{B}$ 与 $\vec{C}$ 的和等于矢量 $\vec{A}$, 即 $\vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$, 那么矢量 $\vec{C}$ 就叫做矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的差, 记为

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}.$$

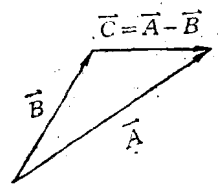


图 7-11

由矢量加法的三角形法则可得求 $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ 的方法: 如图 7-11 所示, 先把 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 平行移动到同一个起点, 然后由矢量 $\vec{B}$ 的终点向矢量 $\vec{A}$ 的终点引一矢量, 即为所求的矢量 $\vec{C}$.