高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

浙江科学技术出版社

高 等 数 学

（下 册）

浙江大学应用数学系

《高等数学》编写组

浙江科学技术出版社

责任编辑　周伟元
封面设计　丁振华

高　等　数　学
(下　册)
浙江大学应用数学系
《高等数学》编写组
*
浙江科学技术出版社出版
浙 江 新 华 印 刷 厂 印 刷
浙 江 省 新 华 书 店 发 行
开本: 850×1168 1/32　印张: 14.375　字数: 352,000
1986 年 3 月第 一 版
1986 年 3 月第一次印刷
印数: 1—11,330

统一书号: 7221·90
定　价: 2.80 元

内 容 提 要

本书是根据高等院校工科数学教学大纲编写的。全书分上、下两册。上册共六章，介绍函数、极限和一元函数微积分的基本知识。下册共九章，介绍矢量代数与空间解析几何、多元函数微积分、场论、无穷级数和傅里叶级数、常微分方程等内容。每章配有复习题和习题，书末附有习题答案。

该书可作为高等院校工科各专业高等数学课程的教材或教学参考书，也可作为业余科技大学、电视大学各专业及其他自学者学习高等数学用书。

目　　录

第七章　矢量代数与空间解析几何

本章分为两部分：第一部分是矢量代数，主要介绍矢量的加、减法及乘法等运算；第二部分是空间解析几何，介绍空间中一些常见的曲面和曲线的方程及其图形.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，使得平面上的点与一组有序的实数 (x, y) 对应起来，从而利用有序的数组（即点的坐标 (x, y)）来确定平面上点的位置. 现在来叙述在空间如何确定点的位置.

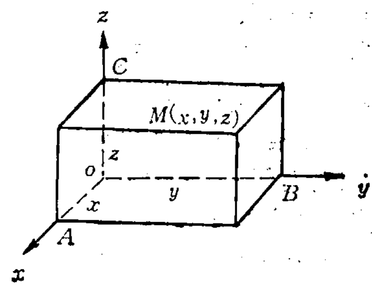

图　7-1

从空间某一定点 O 引三条互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz, 并取定长度单位和正向（图 7-1），这样就建立了**空间直角坐标系**. 点 O 叫做**坐标原点**，数轴 Ox, Oy, Oz 叫做**坐标轴**，每两个坐标轴所在的平面 Oxy, Oyz, Ozx 叫做**坐标平面**.

空间直角坐标系有**右手系**和**左手系**两种（图 7-2）. 我们采用的是右手系，它的坐标轴的正向是这样规定的：若右手大拇指垂直于 Oxy 平面，其他四指握拳旋转时从 Ox 轴的正向转过角 $\frac{\pi}{2}$，即与 Oy

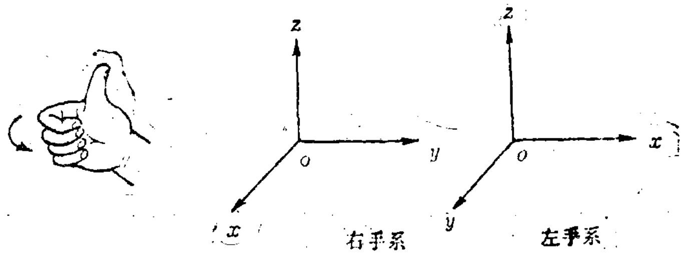

图 7-2

轴的正向相重合，此时，大拇指的指向就是 Oz 轴的正向. 也可采用另一方法来确定坐标轴的正向，我们从图中 Oz 轴的正向往下看时，Ox 轴的正向按逆时针方向转过角 $\frac{\pi}{2}$，即与 Oy 轴的正向相重合.

有了空间直角坐标系以后，就可以用一组有次序的实数来确定空间点的位置. 设 M 为空间的任意一点(图 7-1)，过点 M 分别作垂直于 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的平面，它们与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴分别交于 A、B、C 三点，设这三个点在各自的数轴上的坐标分别为 x、y、z，点 M 就确定了一组有次序的数 x、y、z. 反之，给了一组有次序的实数 x、y、z，则可以分别在三个坐标轴上找到相应的点，过这三个点分别作垂直于坐标轴的平面，这三张平面的交点就是由数 x、y、z 所确定的点. 这样，空间的点与一组有序的实数 x、y、z 之间就建立了一一对应关系. 我们把与点 M 相对应的一组有序实数 x、y、z 叫做点 M **的直角坐标**，记为 $M(x, y, z)$，并分别把 x、y、z 叫做点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.

Oxy, Oyz, Ozx 三张坐标平面，将整个空间分为八个部分，每一个部分叫做**卦限**，把点的坐标都是正数，即 $x>0$, $y>0$, $z>0$ 的那个卦限，叫做第一卦限.

根据点的直角坐标的定义，容易知道对称点坐标之间的符号关系. 例如，若点 $M(x, y, z)$是空间的一点，则点 $P(x, y, -z)$ 是与 M 关于坐标平面 Oxy 对称的点； 点 $Q(x, -y, -z)$是与 M

关于轴 Ox 对称的点；点 $R(-x,\ -y,\ -z)$是与 M 关于坐标原点对称的点。

二、空间两点间的距离

利用点的坐标，可以计算空间任意两点之间的距离。

设 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$是空间的两已知点，过点 M_1、M_2 各作三张平面分别垂直于三个坐标轴，形成如图 7-3 所示的长方体．在直角三角形 M_1PM_2 中，有

$$(M_1M_2)^2=(M_1P)^2+(PM_2)^2=(M_1'M_2')^2+(PM_2)^2. \tag{1.1}$$

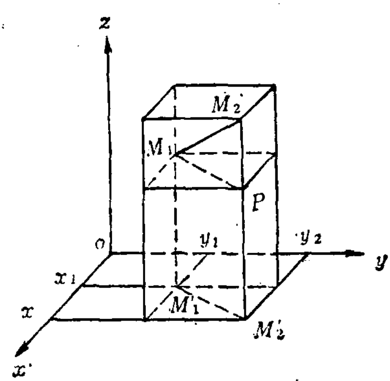

图 7-3

但因

$$(M_1'M_2')^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2, \tag{1.2}$$

又

$$(PM_2)^2=(z_2-z_1)^2, \tag{1.3}$$

将(1.2)和(1.3)式代入(1.1)式，便得空间两点间的距离公式：

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.4}$$

第二节 矢量概念

一、矢量概念

人们在实际活动中所遇到的量大致可以分为两类：一类量只有大小，例如，质量、密度、温度等，这类量叫做数量，也叫纯量或

标量；另一类量不但有大小，而且有方向，例如，力、位移、速度、加速度等，这类量叫做**矢量**，也叫**向量**.

矢量在书写时常用拉丁字母上面加一个箭头来表示，如 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ 等，在铅印时用相应的黑体字母表示为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等. 矢量的大小又叫做矢量的模，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模记为 $|\boldsymbol{A}|$.

矢量既然是有大小又有方向的量，因此，在几何上就可以用空间的一个有方向的线段来表示(图 7-4). 在选定长度单位后，这个有向线段的长度代表矢量的大小，它的方向指明矢量的方向. 起点为 P，终点为 Q 的矢量也记为 $\overrightarrow{PQ}$，它的模记为 $|\overrightarrow{PQ}|$.

图 7-4

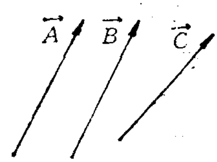

图 7-5

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，如果它们的模相等且方向相同，我们就说这两个矢量**相等***，记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}.$$

例如，图 7-5 所示的矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相等的；而矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是不相等的，因为它们的模虽相等，但方向不同.

如果一个矢量的模为零，叫它为**零矢量**，记为 $\mathbf{0}$. 零矢量是为了运算需要而引进的特殊矢量，它的方向不定.

---

* 如果矢量的起点是固定的，叫做**固定矢量**. 如质点的位移是固定矢量. 起点可以在矢量所在的直线上移动的矢量，叫做**滑动矢量**，如作用在一刚体上的力就是滑动矢量，它可以在刚体中力的作用线上移动而对刚体作用的效果是一样的. 在数学上，研究的是矢量最一般的特性，即大小和方向. 对于特殊的情况，可以在一般的原则下加以特殊的考虑. 只考虑矢量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，这种矢量叫做**自由矢量**，本章只讨论自由矢量.

记两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为 θ(如图7-6)，我们规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 特别地，当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同向时，$\theta=0$; 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 反向时，$\theta=\pi$.

矢量与数量的根本区别在于前者有方向，后者没有方向. 矢量的大小和方向是组成矢量的不可分割的部分，因此，在讨论矢量的运算时，必须把它的大小和方向统一起来考虑.

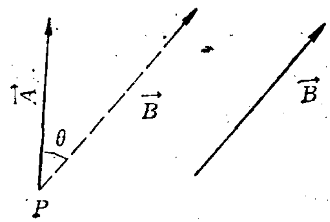

图 7-6

二、矢量的加法

由实验知道，如果有两个力 $\boldsymbol{f}_1$ 与 $\boldsymbol{f}_2$ 作用在一质点上，那么它们的合力 $\boldsymbol{f}$ 可按平行四边形法则求得(图 7-7). 对于速度也有同样的结论. 一般，两矢量和的定义如下:

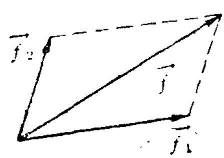

图 7-7

两矢量

$$\boldsymbol{A}=\overrightarrow{OP} \quad 与 \quad \boldsymbol{B}=\overrightarrow{OQ}$$

的和是以这两个矢量为邻边的平行四边形的对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$(图7-8(1))，记为

$$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}.$$

又因 $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OQ}$, 所以

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}.$$

由此可得两矢量加法的**三角形法则**: 以矢量 $\boldsymbol{A}$ 的终点作为矢量 $\boldsymbol{B}$

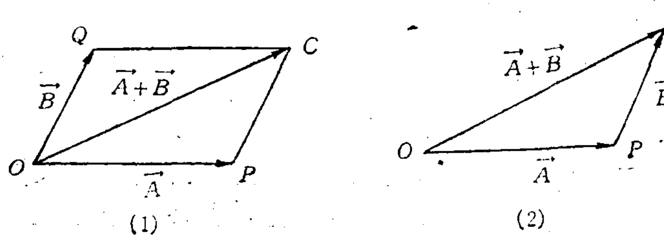

图 7-8

的起点作矢量 $\boldsymbol{B}$，从 $\boldsymbol{A}$ 的起点到 $\boldsymbol{B}$ 的终点所作的矢量，就是它们的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$(图 7-8(2))．

三个或三个以上的矢量也可以相加，只要把这些矢量中前一个矢量的终点作为次一个矢量的起点，再从最初的起点到最后的终点所作的矢量，就是它们的和(图 7-9)．

由图 7-8(1)和图 7-10 可以看出，矢量的加法具有以下的运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$．(交换律)

(2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$．(结合律)

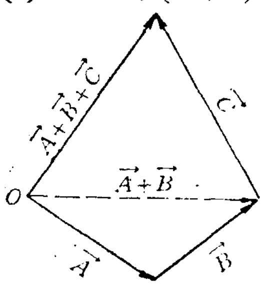

图 7-9

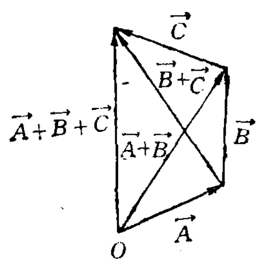

图 7-10

三、矢量的减法

象数量的减法是加法的逆运算一样，矢量的减法也是加法的逆运算．矢量减法的定义如下：

如果矢量 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的和等于矢量 $\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$，那么矢量 $\boldsymbol{C}$ 就叫做矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差，记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}.$$

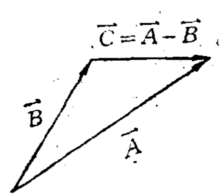

图 7-11

由矢量加法的三角形法则可得求 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 的方法：如图 7-11 所示，先把 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行移动到同一个起点，然后由矢量 $\boldsymbol{B}$ 的终点向矢量 $\boldsymbol{A}$ 的终点引一矢量，即为所求的矢量 $\boldsymbol{C}$．