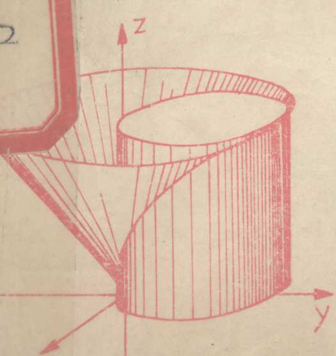
高等数学习题集解答

（根据同济大学数学教研室一九六五年修订本）

空间解析几何部分



武汉建材学院基础部
武汉师范学院数学系
合编

高等数学习题集解答

（根据同济大学数学教研室一九六五年修订本）

空间解析几何部份

武汉建材学院基础部
武汉师范学院数学系
合编

前　　言

党的十一届三中全会决议把工作着重点转移到社会主义现代化建设上来。实现四个现代化的关键是科学技术现代化，基础是教育，而高等数学是大学理工科的一门主要基础课程，广大教师亟需各种实用的教学参考资料。鉴于樊映川等编“高等数学讲义”不仅在工科院校通用，而且不少师专和高师函授也在采用，具有较大的普遍性，因此由武汉建材学院基础部和武汉师范学院数学系合编了这套相应的习题集解答，以便广大师生参考使用。

这套习题集解答共分四册：第一册为空间解析几何部分；第二册为函数、极限、连续、微分和不定积分；第三册为定积分、多元函数的微分、重积分和线、面积分；第四册为无穷级数、富氏级数和微分方程。和习题集相比较，内容次序有所变动，并略去了平面解析几何部分的习题解答。

编印中，参考了一些兄弟院校的交流材料，特别是上海科技大学所编习题解答；郧阳地区报社印刷厂和嘉鱼县印刷厂大力支持，承担全部排印工作，特此表示感谢。

由于时间仓促，加之我们水平有限，本资料一定存在不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

——编　者

1979.

目　　录

第一编　解析几何

第六章　空间直角坐标、矢量代数初步

空间点的直角坐标

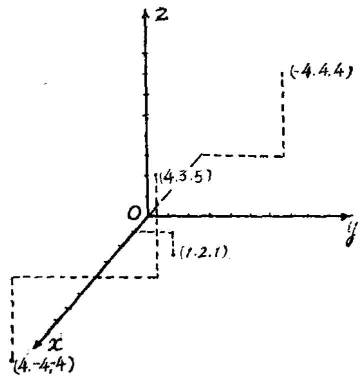
6.1. 在空间的直角坐标系中作出具有下列坐标的点：

(a)　(4,3,5)；

(b)　(1,2,−1)；

(c)　(−4,4,4)；

(d)　(4,−4,−4).



6.2. 指出下列各点位置的特殊性质：

(a)　(4,0,0)；

(b)　(0,−7,0)；

(c)　(0,−7,2)；

(d)　(5,0,3).

解　(a)　$\because y=0$，$z=0$，故在x轴上；

(b)　$\because x=0$，$z=0$，故在y轴上；

(c)　$\because x=0$，故在yOz平面上；

(d)　$\because y=0$，故在xOz平面上.

6.3. 一立方体放置在xOy平面上，其底面的中心与原点相合，底面的顶点在x轴和y轴上，已知立方体的边长为a. 求它各顶点的坐标.

解　在xOy平面上，设在x轴上点为$(x,0,0)$，y轴上点为$(0,y.0)$，由题设$x^2+y^2=a^2$，又$x^2=y^2$，$\therefore x^2=y^2=\dfrac{1}{2}a^2$，

$\therefore\quad x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ y=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，故$xOy$平面上四点为：

$$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},0,0\right),\quad \left(0,\pm\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$$，而另外四点为：

$$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},0,a\right),\quad \left(0,\pm\frac{a}{\sqrt{2}},a\right).$$

6.4. 设某点与给定点$(2,-3,-1)$分别对称于下列坐标平面：

(a) xOy；(b) yOz；(c) zOx.求它的坐标.

解　(a) ∵对称于xOy平面，故z坐标取相反数值，

即　　$(2,-3,1)$.

(b) ∵对称于yOz平面，故x坐标取相反数值，

即　　$(-2,-3,-1)$.

(c) ∵对称于zOx平面，故y坐标取相反数值，

即　　$(2,3,-1)$.

6.5. 设某点与给定点(a,b,c)分别对称于下列坐标平面：(a) xOy；(b) yOz；(c) zOx.求它的坐标.

解　(a) $(a,b,-c)$；(b) $(-a,b,c)$；(c) $(a,-b,c)$.

6.6. 设某点与给定的点$(2,-3,-1)$分别对称于下列各轴：(a) x轴；(b) y轴；(c) z轴. 求它的坐标.

解(a)∵对称于x轴,故y,z坐标各取相反数,即$(2,3,1)$;

(b)∵对称于y轴,故x,z坐标各取相反数,即$(-2,-3,1)$;

(c)∵对称于z轴,故x,y坐标各取相反数,即$(-2,3,-1)$.

6.7. 设某点与给定的点(a,b,c)分别对称于:(a)x轴;(b) y轴；(c) z轴；(d) 原点O. 求它的坐标.

解 (a) $(a,-b,-c)$; (b) $(-a,b,-c)$;
(c) $(-a,-b,c)$; (d) $(-a,-b,-c)$.

6.8. 求点$M(4,-3,5)$与原点及各坐标轴间的距离.

解 $\overline{OM}=\sqrt{4^2+3^2+5^2}=5\sqrt{2}$;

$\overline{M}_x=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$;

$\overline{M}_y=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$;

$\overline{M}_z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

6.9. 求顶点是$A(2,5,0)$, $B(11,3,8)$, $C(5,1,11)$的三角形各边的长.

解
$$\overline{AB}=\sqrt{(11-2)^2+(3-5)^2+(8-0)^2}$$
$$=\sqrt{9^2+2^2+8^2}=\sqrt{149}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(5-11)^2+(1-3)^2+(11-8)^2}$$
$$=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=7$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(2-5)^2+(5-1)^2+(0-11)^2}$$
$$=\sqrt{3^2+4^2+11^2}=\sqrt{146}.$$

6.10. 求顶点为$A(2,1,4)$, $B(3,-1,2)$, $C(5,0,6)$的三角形各边的长.

解
$$\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(-1-1)^2+(2-4)^2}$$
$$=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(5-3)^2+(0+1)^2+(6-2)^2}$$
$$=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(2-5)^2+(1-0)^2+(4-6)^2}$$
$$=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

6.11. 试证以三点$A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 $\because$ $\overline{AB}=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}$

$=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=7$,

$\overline{BC}=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}$

$=\sqrt{8^2+5^2+3^2}=7\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2}$

$=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$

$\therefore$　　$\overline{AB}=\overline{CA}$.

又　　$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$，$\therefore$ $\triangle ABC$是等腰直角三角形.

6.12. 根据下列条件求点B的未知坐标:

(a) $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$,

(b) $A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$,

解 (a) $\because 11^2=(6-4)^2+(2+7)^2+(z-1)^2$

$\therefore$　　$(z-1)^2=121-81-4=36$　　$\therefore$ $z-1=\pm 6$,

故　　$z_1=-5$，$z_2=7$,

(b) $\because$ $5^2=(x-2)^2+(-2-3)^2+(4-4)^2$

$\therefore$　　$(x-2)^2=0$，　　即　$x=2$.

6.13. 在z轴上求与点$A(-4,1,7)$和点$B(3,5,-2)$等距离的点.

解 $\because$ 点在z轴上，故坐标可假定为$(0,0,z)$，由题意

$$\sqrt{(4)^2+1^2+(z-7)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(z+2)^2}$$

$\therefore$　　$17+(z-7)^2=34+(z+2)^2$

即　　$17+z^2-14z+49=34+z^2+4z+4$

$\therefore \qquad 18z=28, \qquad z=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9},$

$\therefore$ 所求点为$(0,0,1\frac{5}{9})$.

6.14. 在yOz平面上，求与三已知点：$A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$和$C(0,5,1)$等距离的点.

解 由题设所求点应为$(0,y,z)$.于是有

$$\begin{cases}\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}\\ \qquad =\sqrt{(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2},\\ \sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}\\ \qquad =\sqrt{0+(y-5)^2+(z-1)^2}.\end{cases}$$

即
$$9+y^2-2y+1+z^2-4z+4$$
$$=16+y^2+4y+4+z^2+4z+4,$$
$$9+y^2-2y+1+z^2-4z+4$$
$$=y^2-10y+25+z^2-2z+1,$$

即
$$\begin{cases}-6y-8z=10,\\ 8y-2z=12.\end{cases}$$

$$3y+4z=-5,\quad 4y-z=6$$

$\therefore \qquad y=1,\ z=-2,$ 故所求点为$(0,1,-2)$.

6.15. 线段$\overline{AB}$被五等分，已知第一个分点$C(3,-5,7)$和最后一个分点$F(-2,4,-8)$. 求线段的端点和其他分点的坐标.

解 设两端点为 $A(x_0,y_0,z_0)$及$B(x_5,y_5,z_5)$，另二个分点为$D(x_2,y_2,z_2)$，$E(x_3,y_3,z_3)$.

$\because \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}=\frac{1}{3}, \qquad \therefore \quad \overline{AC}=\frac{1}{3}\overline{CF},$

故 $\begin{cases}(x_0-3)=\dfrac{1}{3}(3+2)\\(y_0+5)=\dfrac{1}{3}(-5-4)\\(z_0-7)=\dfrac{1}{3}(7+8)\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_0=\dfrac{14}{3}\\y_0=-8\\z_0=12\end{cases}$

又 $\dfrac{\overline{DC}}{\overline{CF}}=-\dfrac{1}{3}$, 故 $\overline{DC}=-\dfrac{1}{3}\overline{CF}$,

即 $\begin{cases}x_2-3=-\dfrac{1}{3}(3+2)\\y_2+5=-\dfrac{1}{3}(-5-4)\\z_2-7=-\dfrac{1}{3}(7+8)\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_2=\dfrac{4}{3}\\y_2=-2\\z_2=2\end{cases}$

又 $\dfrac{\overline{EC}}{\overline{CF}}=-\dfrac{2}{3}$, $\therefore$ $\overline{EC}=-\dfrac{2}{3}\overline{CF}$.

即 $\begin{cases}x_3-3=-\dfrac{2}{3}(3+2)\\y_3+5=-\dfrac{2}{3}(-5-4)\\z_3-7=-\dfrac{2}{3}(7+8)\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_3=-\dfrac{1}{3}\\y_3=1\\z_3=-3\end{cases}$

又 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CF}}=-\dfrac{4}{3}$, $\therefore$ $\overline{BC}=-\dfrac{4}{3}\overline{CF}$.

即 $\begin{cases}x_5-3=-\dfrac{4}{3}(3+2)\\y_5+5=-\dfrac{4}{3}(-5-4)\\z_5-7=-\dfrac{4}{3}(7+8)\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_5=-\dfrac{11}{3}\\y_5=7\\z_5=-13\end{cases}$

故 $A(\frac{14}{3},-8,12)$，$D(\frac{4}{3},-2,2)$， $E(-\frac{1}{3},1,-3)$，

$B(-\frac{11}{3},7,-13)$.

6.16. 决定每个坐标平面分点$A(2,-1,7)$和点$B(4,5,-2)$间线段$\overline{AB}$之比，并求分点的坐标.

解 设 xOy平面与$\overline{AB}$之交点为$C(x_0,y_0,0)$

由于 $z_0=0$, $\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{0-7}{-2-0}=\frac{7}{2}=\lambda_1$

$\therefore$ $\frac{x_0-2}{4-x_0}=\frac{7}{2}$ $\frac{y_0+1}{5-y_0}=\frac{7}{2}$

即有 $x_0=\frac{32}{9}$, $y_0=\frac{11}{3}$, 故交点为$(\frac{32}{9}, \frac{11}{3}, 0)$，

设 yOz平面与$\overline{AB}$之交点为$D(0,y_d,z_d)$

$\because$ $x_d=0$, $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{0-2}{4-0}=-\frac{1}{2}=\lambda_2$

$\therefore$ $\frac{y_d+1}{5-y_d}=-\frac{1}{2}$, $\frac{z_d-7}{-2-z_d}=-\frac{1}{2}$

即有 $y_d=-7$， $z_d=16$，故交点为$D(0,-7,16)$

设 zOx平面与$\overline{AB}$之交点为$E(x_e, 0, z_e)$

$\because$ $y_e=0$, $\therefore$ $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{0+1}{5-0}=\frac{1}{5}=\lambda_3$

$\therefore$ $\frac{x_e-2}{4-x_e}=\frac{1}{5}$, $\frac{z_e-7}{-2-z_e}=\frac{1}{5}$.

$\therefore \quad x_e=\frac{7}{3}, \quad z_e=\frac{11}{2}, \quad \therefore$ 交点为 $E(\frac{7}{3}, 0, \frac{11}{2})$.

6.17. 给定点 $M_1(-1,4,1)$ 和 $M_2(1,0,-3)$. 求线段$\overline{M_1M_2}$的中点，以及分线段$\overline{M_1M_2}$成比值 $\lambda=2$和 $\lambda=-\frac{1}{2}$的点的坐标.

解 i) 中点$M=M(\frac{-1+1}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{1-3}{2})=M(0,2,-1)$,

ii) $\lambda=2$, 设分点为$M'(x',y',z')$, 则

$$x'=\frac{-1+2\cdot(1)}{1+2}=\frac{1}{3}, \quad y'=\frac{4+2\cdot 0}{1+2}=\frac{4}{3}$$

$$z'=\frac{1+2(-3)}{1+2}=-\frac{5}{3}$$

即 $\quad M'(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$.

iii) $\lambda=-\frac{1}{2}$, 设分点为$M''(x'',y'',z'')$, 则

$$x''=\frac{-1+(\frac{-1}{2})\cdot 1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{-2-1}{2-1}=-3$$

$$y''=\frac{4+(-\frac{1}{2})\cdot 0}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{2-1}=8$$

$$z''=\frac{1+(-\frac{1}{2})(-3)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2+3}{2-1}=5$$

$\therefore \quad M''(-3.8.5)$.

6.18．求点$(1,-3,2)$关于点$(-1,2,1)$的对称点．

解 设上述二点为A及O，设对称点为$A'(x',y',z')$．故O是$\overline{AA'}$之中点，所以有

$$-1=\frac{1}{2}(1+x'),\quad 2=\frac{1}{2}(-3+y'),\quad 1=\frac{1}{2}(2+z')$$

$\therefore\qquad x'=-3,\ y'=7,\ z'=0.$

$\therefore\qquad A'(-3,7,0).$

6.19．试证连接四面体相对边中点的直线相互平分．

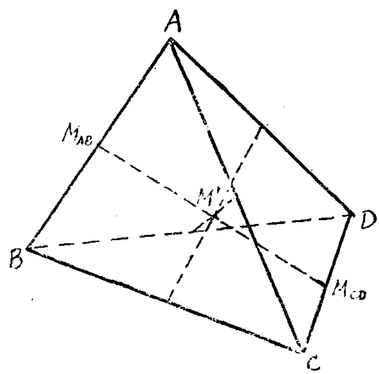
证 设四面体的四个顶点为

$A(x_a,y_a,z_a)$,

$B(x_b,y_b,z_b)$,

$C(x_c,y_c,z_c)$,

$D(x_d,y_d,z_d)$,



设AB之中点为M_{AB}，则

$$M_{AB}=\left(\frac{x_a+x_b}{2},\ \frac{y_a+y_b}{2},\ \frac{z_a+z_b}{2}\right)$$

而与AB相对的边是CD，其中点为

$$M_{CD}=\left(\frac{x_c+x_d}{2},\ \frac{y_c+y_d}{2},\ \frac{z_c+z_d}{2}\right)$$

$\overline{M_{AB}\ M_{CD}}$之中点为$M'=\left(\frac{1}{4}\Sigma x_i,\ \frac{1}{4}\Sigma y_i,\ \frac{1}{4}\Sigma z_i\right).$

另一方面，AC和BD之中点连线之中点也是M'.相类似AD和BC之中点连线之中点仍然是M'，所以证 明了 定理。

6.20．四面体的顶点是点系$A(-7,3,-2)$，$B(0,2,1)$，$C(4,-1,0)$ 和$D(-1,0,-3)$，如将坐标轴平行移动使原点移在点$M(6,\ -2,1)$处，试求四面体顶点的新坐标．

解 ∵点的新坐标(x',y',z')与旧坐标(x,y,z)有如下关系：

$$x'=x-6,\quad y'=y+2,\quad z'=z-1$$

∴ $$A'=A'(-13,5,-3),\quad B'=B'(-6,4,0)$$

$$C'=C'(-2,1,-1),\quad D'=D'(-7,2,-4).$$

6.21．求四等质量的质点系$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$，$D(x_4,y_4,z_4)$的重心．

解 设重心为$M(x,y,z)$，则

$$4m\ x=m\ x_1+m\ x_2+m\ x_3+m\ x_4$$

$$4m\ y=m\ y_1+m\ y_2+m\ y_3+m\ y_4$$

$$4m\ z=m\ z_1+m\ z_2+m\ z_3+m\ z_4$$

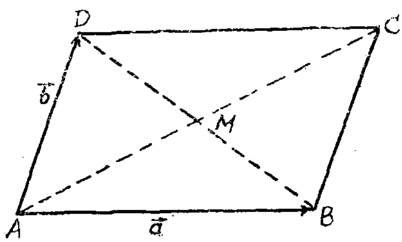
$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \\ y=\dfrac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4) \\ z=\dfrac{1}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4) \end{cases}$$

矢　量　代　数

6.22．在平行四边形$ABCD$内设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.用$\vec{a}$和$\vec{b}$表示矢量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$．这里$M$是平行四边

形对角线的交点.

解 ∵ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$



∴ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

∴ $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}$

$=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

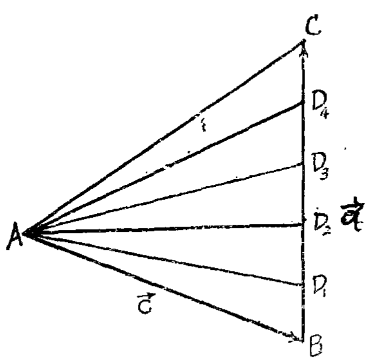
而 $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

∵ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}$

∴ $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

而 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$.

6.23. 把三角形ABC的BC边五等分，并把分点D_1, D_2, D_3，D_4各与对角A连接．试以$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$表示矢量$\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.



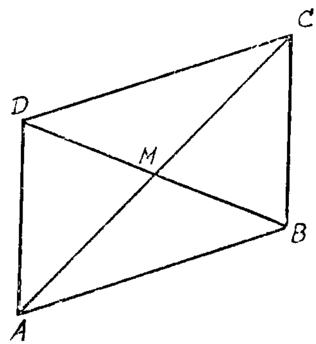
解 ∵ $\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AB}+$

$$+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=\vec{c}+\frac{1}{5}\vec{a}$$

$\therefore\quad \overrightarrow{D_1A}=-\left(\vec{c}+\frac{1}{5}\vec{a}\right)$

同理 $\overrightarrow{D_2A}=-\left(\vec{c}+\frac{2}{5}\vec{a}\right)$，$\overrightarrow{D_3A}=-\left(\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{a}\right)$

$\overrightarrow{D_4A}=-\left(\vec{c}+\frac{4}{5}\vec{a}\right)$.



6.24. 若四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形.

证 设四边形为$ABCD$，对角线交点为M.

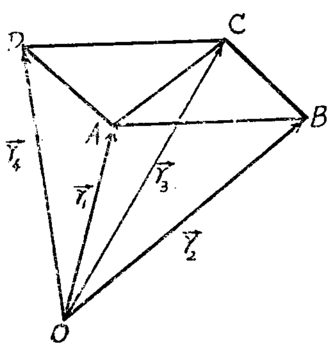
设$\overline{MA}=\overline{MC}$，$\overline{MB}=\overline{MD}$.

$\because\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}$

$$=-(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC})=-\overrightarrow{CD}.$$

$\therefore\quad \overline{AB}=\overline{CD}$. 同理可证

$\overline{AD}=\overline{BC}$，两双对边分别相等，故为平行四边形.



6.25. 已知平行四边形的三顶点$A(\vec{r}_1)$，$B(\vec{r}_2)$，和$C(\vec{r}_3)$. 求与顶点B相对的第四个顶点D.

解　$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$，　由于 $AB /\!/ CD$

且　$\overline{AB}=\overline{CD}$，

故　$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$．

因此 D 的矢径是　$\vec{r}_4=\vec{r}_3+\overrightarrow{CD}=\vec{r}_3-(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$

即　$\vec{r}_4=\vec{r}_1-\vec{r}_2+\vec{r}_3$

即　$D(\vec{r}_1-\vec{r}_2+\vec{r}_3)$．

6.26．设一矢量 $\vec{r}$ 的模是4，它与投影轴的交角是60°．求这矢量在该轴上的投影．

解　$Prj\,\vec{r}=4\cos 60^\circ=4\cdot\frac{1}{2}=2$．

6.27．写出矢量 $\vec{a}=\frac{1}{3}(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$，$\vec{b}=\frac{1}{3}(-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$ 的坐标，并分别求出各矢量的模．

解　$\vec{a}=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right\}$，　$\vec{b}=\left\{-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=1$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1.$$

6.28．分别求出上一习题内矢量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的方向余弦．

解　方向余弦公式：

$$\cos\alpha=\frac{Prj_x\vec{A}}{|\vec{A}|},\ \cos\beta=\frac{Prj_y\vec{A}}{|\vec{A}|},\ \cos\gamma=\frac{Prj_z\vec{A}}{|\vec{A}|}$$