# 高等数学

（第二版）

GAODENG
SHUXUE

田俐萍　曹思越　主编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

# 高 等 数 学

（第二版）

主　编　田俐萍　曹思越
编　委　徐昌贵　张燕洲　熊　学
　　　　符　伟　张　静

西南交通大学出版社
·成　都·

## 内 容 提 要

本书的主要内容包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、空间解析几何、微分方程、级数和数学软件 Mathematica 的使用等内容。

本书可作为大专院校工科学生和应用技术类学生的教材，也可作为其他学科学生学习《高等数学》的教学参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学/田俐萍，曹思越主编．—2 版.—成都：西南交通大学出版社，2008.7

ISBN 978-7-81104-959-6

Ⅰ．高…　Ⅱ.①田…②曹…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 115943 号

**高 等 数 学**

（第二版）

主编　田俐萍　曹思越

*

责任编辑　张宝华

封面设计　本格设计

西南交通大学出版社出版发行

（成都二环路北一段 111 号　邮政编码: 610031　发行部电话: 028-87600564）

http: //press.swjtu.edu.cn

成都蜀通印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 185 mm×260 mm　　印张: 22.75

字数: 568 千字　印数: 7 001—10 000 册

2005 年 8 月第 1 版

2008 年 8 月第 2 版　　2008 年 8 月第 4 次印刷

**ISBN 978-7-81104-959-6**

定价: 33.80 元

图书如有印装质量问题　本社负责退换

# 第二版前言

本书第二版是在第一版的基础上，根据我们多年的教学经验，再参考国内外各优秀教材，进行了部分修订而成的. 修改内容有：增加了部分章节的习题容量并加以完善；调整并补充了部分内容；改正了原教材中的一些错误. 修改后，全书内容和系统更加合理与完整，更便于教学.

本书自 2005 年 7 月出版以来，得到了老师和学生们的好评. 现借本书第二版出版之际，向使用本书的教师和学生对我们工作的支持和肯定表示感谢！向为本书出版而努力工作和为本书提出意见和建议的师生表示感谢！

新版中存在的问题，欢迎广大师生批评指正.

编　者

2008 年 6 月

# 前　言

“高等数学”是理工类和经济类大专院校学生必修的基础课程，也是现代科学技术和社会科学中应用最为广泛的一门学科。在现阶段，各高等院校采用的《高等数学》教材，种类繁多，各有特色，但适应工科教学及突出应用的高等数学教材并不多见，编写一本适合工科学生及体现学科应用的《高等数学》教材是我们多年的愿望。

现在，我们集多年执教“高等数学”课程的实践经验，参考国内外各优秀教材，共同努力，形成了此书。书中融入了我们在长期的教学和科研实践中所积累的心得和体会，以飨读者。

本书在结构体系、内容安排、习题选择等方面，努力尝试学科应用，且针对工科教学的特点，本着“打好基础，够用为度”的原则，把握内容的难易程度，注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养。在教材中，尽力做到引进基本概念自然、清晰，除学科中的基本定理外，其余理论证明淡化处理，强调应用。尤其在每章最后部分的“应用与提高”内容中，充分体现了高等数学理论应用于实践的作用。教师可根据需要选讲这部分内容。

为了适应现代化教学的需要和新的计算机发展形势的要求，我们专门在第 9 章介绍了数学软件 Mathematica 的操作和使用及它在“高等数学”课程中的应用，目的是想使学生在掌握数学理论的同时，能够比较轻松地完成计算，这对学生以后的学习和工作都是非常有益的。

本书由叶建军教授主审，由田俐萍、曹思越任主编，编委为徐昌贵、张燕洲、熊学、符伟、张静，薛正庭参与编写了第 4 章，另外赵先锋参与了前期的校对工作，在此表示衷心的感谢。

本书虽经几次校对，但恐疏落之处仍在所难免，尚祈读者不吝指正。

编　者

2005 年 7 月

# 目　　录

# 第 1 章　函数的极限与连续

## 1.1 函　数

### 1.1.1 邻域及其表示法

在高等数学中经常要用到两种特殊的数集——区间和邻域. 在中学数学中,我们已经学习了区间的有关知识,下面介绍邻域的概念.

设 $a\in\mathbf{R}$,以点 $a$ 为中心的一个开区间称为点 $a$ 的一个邻域,记为 $U(a)$. 设 $\delta\in\mathbf{R}$,且 $\delta>0$,开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,$\delta$ 称为邻域的半径. 在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 $a$ 所成的数集称为点 $a$ 的去心 $\delta$ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$. 如 $U\left(-2,\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$,$\mathring{U}\left(0,\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{1}{5},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{5}\right)$. 两个邻域的中心分别是 $-2,0$,邻域半径分别是 $\frac{1}{2},\frac{1}{5}$. 邻域还可以表示为 $U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$,$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$.

### 1.1.2 函　数

**1) 函数的概念**

微积分学的研究对象是函数,它的学科理论和数学方法是在函数的基础上建立和实施的. 在中学数学中已经学习了函数的有关概念和一些常见的、较简单的函数,由于函数的重要性,有必要对函数概念进行较系统的复习和更深入的讨论.

**定义 1**　设 $X$ 是给定的一个非空数集. 若有两个变量 $x$ 和 $y$,当变量 $x$ 在 $X$ 中取某个特定值时,变量 $y$ 依确定的关系 $f$ 也有一个确定的值,则称 $y$ 是 $x$ 的函数,$f$ 称为 $X$ 上的一个函数关系,记为 $y=f(x)$. $x$ 称为自变量,$y$ 称为因变量. 当 $x$ 取遍 $X$ 中各数,对应的 $y$ 构成一数集 $Y$,$X$ 称为函数的定义域,$Y$ 称为函数的值域.

20 世纪初,随着数学体系中集合论的引入和发展,函数的概念以更抽象的形式表现出来,被明确地定义为集合间的映射关系. 这种定义突出了对应规律,是近代数学的函数模型.

***定义 1**　设 $X$、$Y$ 是两个非空集合,若存在一个法则 $f$,使得对于 $X$ 中的每个元素 $x$,按法则 $f$ 在 $Y$ 中有唯一确定的元素 $y$ 与之对应,则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的一个映射,也称 $f$ 为定义在 $X$ 上的一个函数,记作

$$f:X\to Y$$

其中 $y$ 称为 $x$ 在映射 $f$ 下的像，记作 $y=f(x)$. 而 $x$ 称为 $y$ 在映射 $f$ 下的一个原像，$X$ 称为函数 $f$ 的定义域，$x$ 在 $f$ 下的全体像构成的集合称为函数 $f$ 的值域.

例如，$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, y=f(x)=x^2$ 是一个二次函数. $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, y=g(x)=\sin x$ 是正弦函数.

在讨论函数时，为方便起见，常用 $y=f(x)$ 或 $f(x)$ 来表示函数 $f$，记作

$$y=f(x),\quad x\in X.$$

在有些情况下，函数关系是用算式表达的，通常约定函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，而不必再用"$x\in X$"的形式指出函数的定义域。

例如，$y=\sin x$ 表示定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的正弦函数；$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 表示定义域为 $(-\infty,1)$ 的一个函数.

2) **函数的单调性与有界性**

① 函数的单调性. 设函数 $y=f(x)$ 在 $I$ 内有定义，若对任意的 $x_1$、$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 内为一单调增加（或减少）的函数.

从函数图形上看，在 $I$ 上单调增加（或单调减少）的函数图像在 $I$ 内从左至右总是上升的（或下降的）. 单调函数中不同的原像 $x$ 在映射 $f$ 下总对应着不同的像 $y$.

② 函数的有界性. 正弦函数 $y=\sin x$ 的函数值总介于 $-1$ 与 $1$ 之间，即有

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

反正切函数 $y=\arctan x$ 的函数值总介于 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间，即有

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

这两函数的图像分别限定在 $y=-1$ 和 $y=1$，$y=-\frac{\pi}{2}$ 和 $y=\frac{\pi}{2}$ 两条直线之间，而有些函数的图像却不能限定在与 $x$ 轴平行的两条直线之间. 为区分函数的这两种性态，给出下面的定义.

**定义 2** 设函数 $f(x)$ 在 $I$ 内有定义，若存在一正数 $M$，使得对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 或 $|f(x)|<M$，则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 内有界，否则称 $f(x)$ 在 $I$ 内无界.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，可取 $M=1$；$y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，可取 $M=\frac{\pi}{2}$；$y=\sqrt{2-x^2}$ 在 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 上有界，可取 $M=\sqrt{2}$；$y=\frac{1}{x}$ 在其定义域内无界.

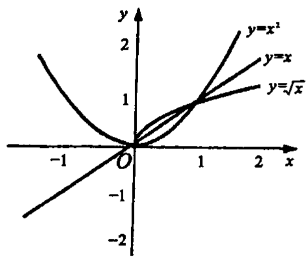
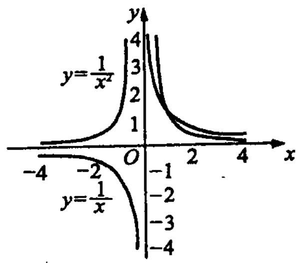
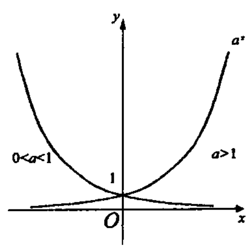
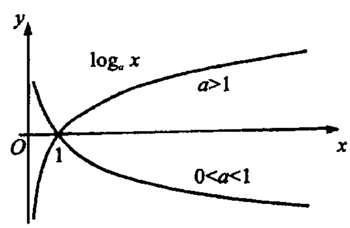
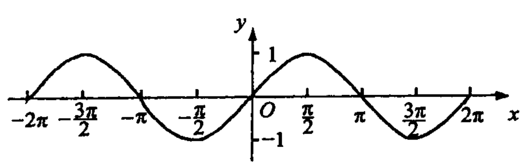
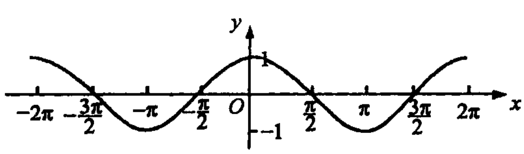
函数是否有界不仅与函数有关，还与自变量的取值范围有关. 如 $y=\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1]$ 内无界，但在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 内有界；$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内无界，但在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有界.

另外，函数的奇偶性和周期性在中学已经学习过，在这里不再赘述.

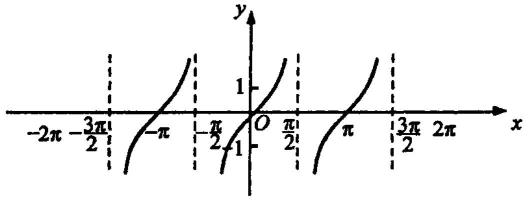
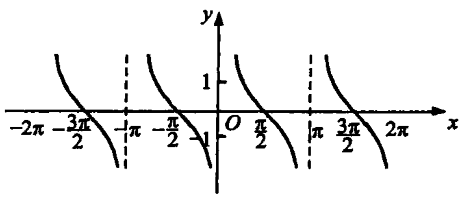
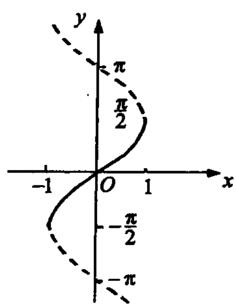
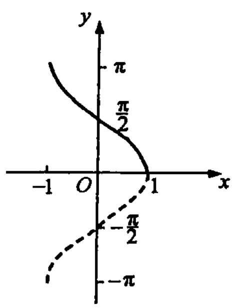
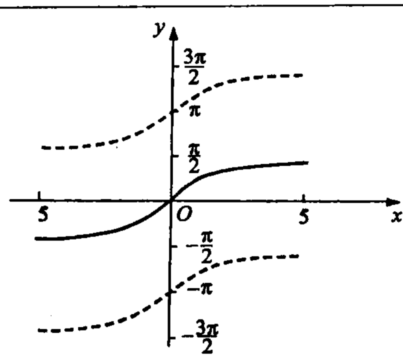
3) **基本初等函数**

中学学过的五类函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数，为了便于复习，我们将五类基本初等函数的表达式、图形和简单性质列于表 1-1 中.

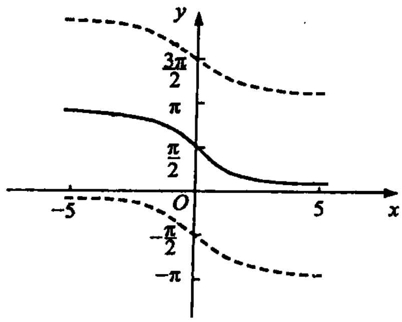
**表 1-1**

| 名称 | 表达式 | 图　形 | 简单性质 |
| --- | --- | --- | --- |
| 幂函数 | $y=x^{\alpha}$<br>$(\alpha>0)$ |  | 图形都过(1,1)点,若 $\alpha$ 为正数,函数在 $(0,+\infty)$ 内单调增加;若 $\alpha$ 为偶数,函数为偶函数;若 $\alpha$ 为奇数,函数为奇函数 |
| | $y=x^{\alpha}$<br>$(\alpha<0)$ |  | 若 $\alpha$ 为负数,函数在 $x=0$ 处断开,在 $(0,+\infty)$ 内单调减少 |
| 指数函数 | $y=a^x$,<br>$a>0$,<br>$a\neq1$ |  | 图形都过(0,1)点.<br>若 $a>1$,函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加;若 $0<a<1$,函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少 |
| 对数函数 | $y=\log_a x$,<br>$a>0$,<br>$a\neq1$ |  | 图形都过(1,0)点.<br>若 $a>1$,函数在 $(0,+\infty)$ 内单调增加;若 $0<a<1$,函数在 $(0,+\infty)$ 内单调减少 |
| 三角函数 | $y=\sin x$ |  | 以 $2\pi$ 为周期的周期函数,奇函数,有界,$-1\leqslant\sin x\leqslant1$ |
| | $y=\cos x$ |  | 以 $2\pi$ 为周期的周期函数,偶函数,有界,$-1\leqslant\cos x\leqslant1$ |

**续表 1-1**

| 名称 | 表达式 | 图形 | 简单性质 |
|---|---|---|---|
| 三角函数 | $y=\tan x$ |   | 以 $\pi$ 为周期的周期函数，奇函数，无界，在 $x=\frac{2k-1}{2}\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处无定义，在 $\left(\frac{2k-1}{2}\pi,\frac{2k+1}{2}\pi\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 内单调增加 |
| | $y=\cot x$ |   | 以 $\pi$ 为周期的周期函数，奇函数，无界，在 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处无定义，在 $(k\pi,(k+1)\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 内单调减少 |
| 反三角函数 | $y=\arcsin x$ |   | 主值 $y=\arcsin x$ $\left(-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，函数在 $[-1,1]$ 上单调增加 |
| | $y=\arccos x$ |   | 主值 $y=\arccos x$ $(-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\pi)$，函数在 $[-1,1]$ 上单调减少 |
| | $y=\arctan x$ |   | 主值 $y=\arctan x$，$\left(-\infty<x<+\infty,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加 |

**续表 1-1**

| 名称 | 表达式 | 图　　形 | 简单性质 |
|---|---|---|---|
| 反三角函数 | $y=\operatorname{arccot}x$ |  | 主值 $y=\operatorname{arccot}x(-\infty<x<+\infty, 0<y<\pi)$，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少 |

4)几种特殊函数

① 常值函数. 函数 $y=C$ 称为常值函数，在这个函数关系中，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，其对应的函数值都是 $C$，这函数的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，图像是一条平行于 $x$ 轴的直线.

② 分段函数.

**例 1**　某城市人均收取电费的规定为：耗电量在 100 度之内(含 100 度)，每度 0.32 元；耗电量在 100 度至 150 度之间(含 150 度)，每度 0.50 元；耗电量在 150 度以上，每度 0.80 元. 写出人均电费 $P$ 与用电量 $w$ 之间的函数关系.

**解**：

$$P=f(w)=\begin{cases}0.32w, & 0\leqslant w\leqslant 100,\\ 0.50w, & 100<w\leqslant 150,\\ 0.80w, & w>150.\end{cases}$$

当自变量 $w$ 在不同的范围内变化时，用不同的式子来表示 $P$ 与 $w$ 之间的函数关系，这种函数称为分段函数.

例如，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 和符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 都是分段函数，如图 1-1、图 1-2 所示.

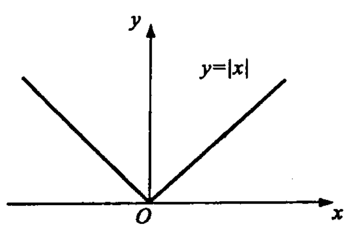



图　1-1

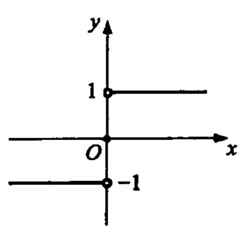



图　1-2

③ 取整函数. 函数 $y=[x]$ 称为取整函数，$[x]$ 表示不大于 $x$ 的最大整数.

例如，$[-4.5]=-5$，$[0.45]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-1]=-1$. 函数 $y=[x]$ 的图像是“阶梯状”的. 读者可自己画出.

④ 数列函数. 数列$\{a_n\}$可以看成是定义域为正整数集合 $N^+$ 的函数,可记为 $f(n)=a_n$, $n\in N^+$. 例如,设$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$, $f(n)=\frac{1}{2n+1}$, $f(5)=a_5=\frac{1}{11}$.

⑤ 双曲函数. 函数$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$、$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$、$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$分别称为双曲正弦函数、双曲余弦函数、双曲正切函数,记为 $\mathrm{sh}x$、$\mathrm{ch}x$、$\mathrm{th}x$,则

$$\mathrm{sh}x+\mathrm{ch}x=e^x,\quad \mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x},$$

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}=\frac{4e^x\cdot e^{-x}}{4}=1,$$

即
$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y&=\frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})}{4}+\frac{(e^x+e^{-x})(e^y-e^{-y})}{4}\\&=\frac{2e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}+e^{y-x}-e^{x-y}-2e^{-(x+y)}}{4}\\&=\frac{e^{x+y}-e^{-(x-y)}}{2}=\mathrm{sh}(x+y)\end{aligned}$$

即
$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y \tag{2}$$

类似可得
$$\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y-\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y \tag{3}$$
$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y \tag{4}$$
$$\mathrm{ch}(x-y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y-\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y \tag{5}$$
$$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x \tag{6}$$
$$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x \tag{7}$$

以上公式(1)～(7)可与三角函数的有关公式对比后记忆.

双曲函数常应用于工程、力学、物理等学科.

**5) 反函数**

在一个函数关系中,将哪个变量看成自变量,哪个变量看成因变量是由我们人为认定的. 如在 $y=f(x)$中,是将 $x$ 作为自变量,用含有 $x$ 的代数式来表达 $y$,认为原像 $x$ 在映射 $f$ 下的像为$y$. 如果将 $y=f(x)$恒等变形为 $x=\varphi(y)$,用含有 $y$ 的代数式来表达$x$,将 $y$ 作为自变量,$x$ 看成是自变量 $y$ 的函数,认为原像 $y$ 在映射 $\varphi$ 下的像为 $x$,则称 $x=\varphi(y)$是 $y=f(x)$的反函数. 当然这要求 $y=f(x)$在定义区间 $I_x$ 上是单调的,才能在其值域 $I_y$ 上定义其反函数 $x=\varphi(y)$.

例如,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上是非单调的,将函数变形为 $x=\pm\sqrt{y}$,当 $y\in(0,+\infty)$时,对应的 $x$ 有两个值,不满足函数关系,不能定义其反函数. 但对 $y=x^2$, $x\in[0,+\infty)$,函数在定义域上是单调增加的,可在其值域$[0,+\infty)$上定义其反函数 $x=\sqrt{y}$.

从以上讨论可知 $y=f(x)$与 $x=\varphi(y)$在 $xOy$ 平面内是同一条曲线,只是表示自变量与因变量的数轴不同. 由于人们习惯上总是用 $x$ 表示自变量,用 $y$ 表示因变量,所以用$y=\varphi(x)$替代 $x=\varphi(y)$,仍称 $y=\varphi(x)$为 $y=f(x)$的反函数,记作 $y=f^{-1}(x)$. 事实上,$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数.

**例 2**　求(1) $y=3x+1$;(2)$y=\log_a(x+1)$,$(a>1)$;(3) $y=\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数.

**解**:(1) $y=3x+1$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的函数，值域为$(-\infty,+\infty)$. 将 $y=3x+1$ 恒等变形为 $x=\frac{y-1}{3}$,所以所求反函数为 $y=\frac{x-1}{3}$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 当 $a>1$ 时,$y=\log_a(x+1)$在定义域$(-1,+\infty)$内是单调增加的函数,值域为$(-\infty,+\infty)$,将 $y=\log_a(x+1)$ 恒等变形为 $x=a^y-1$,所求反函数为 $y=a^x-1$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $y=\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,先讨论它的单调性.

设 $x_1$、$x_2\in(-\infty,+\infty)$,且 $x_1>x_2$,$y_1=\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}$,$y_2=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}$,

$$y_1-y_2=\frac{1}{2}(e^{x_1}-e^{x_2})+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{x_2}-\left(\frac{1}{e}\right)^{x_1}\right],$$

因为 $e>1$,由指数函数的性质可得

$$e^{x_1}-e^{x_2}>0,\ \left(\frac{1}{e}\right)^{x_2}-\left(\frac{1}{e}\right)^{x_1}>0,$$

所以,$y_1-y_2>0$,可知双曲正弦函数在定义域$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

下面求 $\mathrm{sh}x$ 的反函数.

令 $u=e^x$，　则 $2y=u-\frac{1}{u}$，　即 $u^2-2yu-1=0$. 解方程得　$u=y\pm\sqrt{y^2+1}$，　由于 $u=e^x>0$，　取 $u=y+\sqrt{y^2+1}$,所以得

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}\quad 或\quad x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

故所求反函数为　$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，　$x\in\mathbf{R}$，　或记为　$\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,$x\in\mathbf{R}$.

若定义在 $I_1$ 上的函数 $y=f(x)$是单调增加(或减少)的,其值域为 $I_2$,则它一定具有反函数,且它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在 $I_2$ 上也是单调增加(或减少)的.

例如,$y=x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的,它的反函数 $y=\sqrt[3]{x-1}$在其值域$(-\infty,+\infty)$也是单调增加的. $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上是单调减少的,它的反函数 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上也是单调减少的.

函数 $y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像有什么样的关系呢?

若$(x_0,y_0)$是曲线 $y=f(x)$上一点,$(x_0,y_0)$也是曲线 $x=\varphi(y)$上一点,则$(y_0,x_0)$是曲线 $y=\varphi(x)$,即 $y=f^{-1}(x)$上一点. 可知曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=f^{-1}(x)$关于直线 $y=x$ 对称.

6) **复合函数**

在实际问题中,我们遇到的许多函数都是由五类基本初等函数和常值函数经过有限次的四则运算和“叠置”后构成的. 如函数 $y=\ln(x^2+1)$可看成是由两个函数 $y=\ln u$,$u=x^2+1$“叠置”而构成的. 通常称两个函数的这种“叠置”为两个函数的“复合”,所构成的函数称为复合函数. 在复合函数 $y=\ln(x^2+1)$中,变量 $u$ 在 $y=\ln u$ 中是自变量,在 $u=x^2+1$ 中是因变量,称具有这种“双重身份”的变量 $u$ 为中间变量,$x$ 是(最终)自变量,$y$ 是(最终)因变量.

一般地,设有函数 $y=f(u)$,$u\in D_1$ 和函数 $u=\varphi(x)$,$x\in D_2$,则 $y=f[\varphi(x)]$是关于 $x$ 的函

数，称此函数是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，称 $u$ 为中间变量. $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $D=\{x|x\in D_2$ 且 $\varphi(x)\in D_1\}$. 一般地，$D$ 是 $D_2$ 的子集，$D$ 的元素是使 $\varphi(x)\in D_1$ 的全体实数.

**注**：并不是任意两个函数都可以构成复合函数的，若设 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $E$，必须有 $D_1\cap E\neq\varnothing$ 时才能复合. 例如，$y=\ln u$，$u=\sin x-2$，$D_1=(0,+\infty)$，$E=[-3,-1]$，$D_1\cap E=\varnothing$，这两个函数不能构成复合函数. 表达式 $y=\ln(\sin x-2)$ 不表示函数.

另外，两个以上的函数也可以构成一个复合函数.

**例 3** 指出下列函数的复合关系：

(1) $y=e^{\sqrt{x}}$； (2) $y=\sin\left(\frac{1}{x}+1\right)$； (3) $y=\arctan\sqrt{e^x-1}$.

**解**：(1) $y=e^{\sqrt{x}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{x}$ 复合而成的.

(2) $y=\sin\left(\frac{1}{x}+1\right)$ 是由 $y=\sin u$，$u=\frac{1}{x}+1$ 复合而成的.

(3) $y=\arctan\sqrt{e^x-1}$ 是由 $y=\arctan u$，$u=\sqrt{v}$，$v=e^x-1$ 复合而成的.

由上例可知，在分析一个函数的复合关系时，往往从“外层”函数开始逐层分解. 一般地，分解过程中各中间变量通常是基本初等函数或是它们经过有限次四则运算后所成的函数.

**例 4** 求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln\sin\sqrt{x}$； (2) $y=\arcsin\frac{1}{x^2+1}$.

**解**：(1) 要使函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$ 有意义，必须 $x\geqslant0$ 且 $\sin\sqrt{x}>0$，即 $\begin{cases}x\geqslant0,\\ \sin\sqrt{x}>0,\end{cases}$ 解此不等式组得 $2n\pi<\sqrt{x}<(2n+1)\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$，即

$$(2n\pi)^2<x<[(2n+1)\pi]^2\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

(2) 要使 $y$ 有意义，必须 $\left|\frac{1}{x^2+1}\right|\leqslant1$，即 $x^2+1\geqslant1$，所以定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

**例 5** 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(e^x)$； (2) $f(\arctan x)$.

**解**：(1) 要使函数有意义，则需 $0\leqslant e^x\leqslant1$，解得 $x\leqslant0$，所求定义域为 $(-\infty,0]$.

(2) 要使函数有意义，需 $0\leqslant\arctan x\leqslant1$，解得 $0\leqslant x\leqslant\tan1$，所求定义域为 $[0,\tan1]$.

## 习题 1 - 1

1. 求下列各函数的定义域，并表示在数轴上.

(1) $g(t)=\frac{2t+1}{\sqrt{t^2-3t+2}}$； (2) $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$； (3) $f(x)=\frac{1}{\ln(x-1)}$；

(4) $f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x}$； (5) $F(x)=\log_2(\log_2x)$； (6) $g(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$ $(a>0,a\neq1)$.

2. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=(0,1)$，求：(1) $f(\sin2x)$；(2) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x\sin\frac{1}{x}$； (2) $u=\sin(\cos x)$； (3) $y=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>0,\ a\neq1)$；

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$； (5) $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0;\end{cases}$ (6) $f(x)=\frac{|x|}{x}$.

4. 证明双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 为奇函数,双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 为偶函数.

5. 指出下列函数在指定区间上是否有界.

(1) $y=\mathrm{arccot}x, x\in(-\infty,+\infty)$;　(2) $y=\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0$;

(3) $y=|x|-x, x\in(-\infty,+\infty)$;　(4) $y=x^2\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$;

(5) $y=x\cos x, x\in[0,10000]$;　(6) $y=x-[x], x\in(-\infty,+\infty)$.

6. 求下列函数的反函数.

(1) $y=10^x-1$;　(2) $y=a\sin bx\left(a\neq 0, b>0, |x|<\dfrac{\pi}{2b}\right)$;　(3) $y=\mathrm{ch}x(x\geqslant 0)$.

7. 分析下列复合函数的复合关系,指出它们是由哪些函数复合而成的.

(1) $y=\sin^2 x$;　(2) $y=5^{(2x+1)^2}$;　(3) $y=\ln\cos 2x$;

(4) $z=(\arcsin\sqrt{x})^2$;　(5) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$;　(6) $u=e^{\sin(x^2+1)}$.

8. 已知 $y=\ln u, u=\sqrt{v}, v=1+\tan x$,将 $y$ 表示成 $x$ 的函数.

9. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

10. 设 $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $g[g(x)]$.

11. 对于定义在 $[-a,a]$ 上的任意函数 $f(x)$,证明:

(1) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数,$f(x)-f(-x)$ 是奇函数;

(2) $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

12. 设一工厂 $A$ 距离铁路的垂直距离为 $a$ 公里. 垂足 $B$ 到火车站 $C$ 的长度是 $b$ 公里,工厂的产品必须经火车站 $C$ 才能转销外地. 已知汽车运费为每吨每公里 $m$ 元,火车运费为每吨每公里 $n$ 元. 如果在铁路边上 $B$、$C$ 两点间选一定点 $M$ 向工厂修筑一条公路将货物转运出去,试将运送每吨产品的运费表示为距离 $BM$ 的函数.

## 1.2 极　限

极限是微积分学中的一个最基本、最重要的概念,微积分理论是在极限概念的基础上展开的,它是微积分学的奠基石.

极限描述的是变量在某一变化过程中的变化趋势. 例如,我国古代的哲学名著《庄子》中描述过"一尺之棰,日取其半,万世不竭". 从数学的角度来理解这段话,一尺长的木棒每天截取一半后,所剩之长度依次为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$ 这无穷多个数构成无穷数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$. 随着天数 $n$ 的增加,此数列的一般项 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ 与零日益接近,虽不可能达到零,但当天数 $n$ 无限增大时,$a_n$ 的变化趋势是与零无限接近的.

又如,函数 $y=\dfrac{1}{x}+1$,当 $x$ 变化时,函数值 $y$ 也在变化之中,随 $|x|$ 无限增大,$y$ 的变化趋势是与确定的常数 1 无限接近;当 $|x|$ 与零无限接近时,对应的 $y$ 的变化趋势是绝对值无限增大.

这种研究变量的变化趋势问题,人们在研究自然科学、客观世界和社会科学中经常遇到,如从市场变化趋势来预测产品的需求状况,从企业的发展趋势来判断其前景,这些都可以看成数学的极限思想的具体应用.

下面我们详细讨论两类极限:数列极限与函数极限.

### 1.2.1 数列的极限

观察下列各无穷数列$\{a_n\}$：

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$;

(2) $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$;

(3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$;

(4) $1, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{6}, \cdots, \frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}, \cdots$;

(5) $1, -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$.

考虑当$n$无限增大时(用$n\to\infty$表示)，各数列的一般项$a_n$变化的趋势. 在数列(1)、(3)、(4)中，当$n\to\infty$时，一般项$a_n$与一个确定的常数$A$无限接近：(1)中，$a_n=\frac{1}{n}$从大于零的方向与零无限接近；(3)中，$a_n=1-\frac{1}{n}$从小于1的方向与1无限接近；(4)中，$a_n$以大于零和小于零、时而又达到零的变化状态与零无限接近. 它们变化的共有特点就是数列中充分靠后的那些项的变化逐渐趋于稳定，稳定在一个常数$A$附近. 而数列(2)和(5)没有上述特点，当$n\to\infty$时，(2)中，$a_n=2n$无限增大；(5)中，$a_n=(-1)^{n-1}$在1和$-1$之间不停地跳动.

为了描述这些现象，我们给出以下数列极限的概念：

一般地，给定一个无穷数列$\{a_n\}$，若当$n$无限增大时，一般项$a_n$无限趋近于一个固定的常数$A$，则称当$n$无限增大时，数列$\{a_n\}$以$A$为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad 或 \quad a_n\to A \quad (n\to\infty)$$

这时也称$n\to\infty$时，数列$\{a_n\}$收敛于$A$. 否则，称数列$\{a_n\}$发散.

前面(1)、(3)、(4)中的数列是收敛的，它们分别收敛于0，1，0；而数列(2)和(5)都是发散的，发散数列没有极限.

**例1** 判断下列数列是否收敛？若收敛，求出其极限值$A$.

(1) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots$;　　(2) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \cdots$;

(3) $0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \cdots$;　　(4) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \cdots$.

**解**：(1) $a_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$. 当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}$与零无限接近，从而$1+\frac{1}{n}$与1无限接近，所以，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

(2) $a_n=\frac{2n-1}{2n+1}=1-\frac{2}{2n+1}$. 当$n\to\infty$时，$\frac{2}{2n+1}$与零无限接近，从而$1-\frac{2}{2n+1}$与1无限接近，所以，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

(3) $a_n=\frac{1}{10^n}$. 当$n\to\infty$时，$\frac{1}{10^n}$与零无限接近，所以，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$.

(4) $a_n=\sqrt{n}$，当$n\to\infty$时，$\sqrt{n}$无限增大，$a_n$不与任何一个确定的常数无限接近，所以，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$不存在.

下面我们讨论用精确的数学语言来定义数列极限概念.