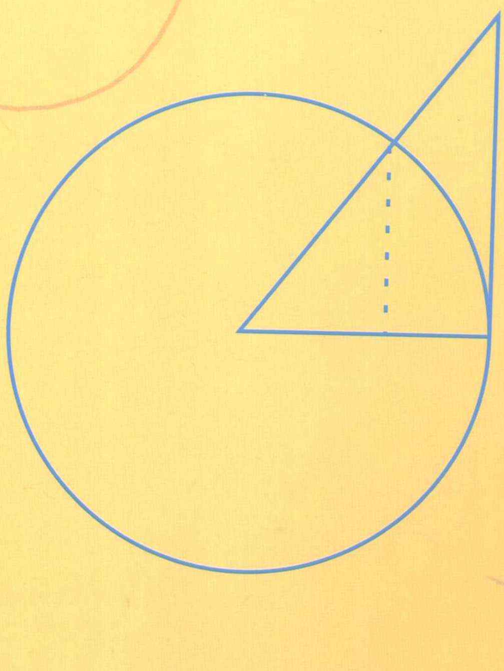
经济应用数学

JINGJI YINGYONG SHUXUE

主　编　王丹红

副主编　徐嘉南　陈向华



東北林業大學出版社

经济应用数学

主　编　王丹红
副主编　徐嘉南　陈向华

東北林業大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学/王丹红主编. —哈尔滨：东北林业大学出版社，2008.6
ISBN 978-7-81131-266-9

Ⅰ. 经… Ⅱ. 王… Ⅲ. 经济数学—高等学校—教材 Ⅳ. F244.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 097217 号

责任编辑：倪乃华
封面设计：边 威

NEFUP

经济应用数学
Jingji Yingyong Shuxue
主 编 王丹红
副主编 徐嘉南 陈向华

东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
黑龙江省教育厅印刷厂印装

开 本787×1092 1/16 印张13.75 字数308千字
2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—1 000 册
ISBN 978-7-81131-266-9
F·232 定价：24.50 元

前　言

经济数学是随着经济管理科学的发展和数学应用性强化而兴起的一门相对独立的学科，经济数学课是经济管理、财务会计、对外贸易和其他相关专业一门重要的基础课，经济数学方法更是从事宏观经济管理人员和微观生产经营者不可缺少的专业知识。

在经济发展日趋全球化的今天，提高我国经济的国际竞争能力已成为举国之共识。近年来每届两会频频形成有关决议并发出号召：转变经济增长方式，由粗放型向集约型转变，以便节能减排、保护环境、提高效益。党的十七大报告更是明确指出："转变发展方式取得重大进展，在优化结构、提高效益、降低消耗、保护环境的基础上，实现人均国内生产总值到2020年比2000年翻两番。"显然，这就要求在经济运营的不同层次和各个环节上都力争实行量化管理，以确保成本最小化和效益最大化的生产经营目标的实现，在这里经济数学派上了用场。为使经济数学的理论和方法与经济管理实践紧密结合，本书编委会联系和组织了有关院校的教授和专家以及教学人员编写了这部《经济应用数学》。

本书可作为高等院校经济管理专业教学用书，并可作为经济职能部门和生产经营单位相关人员学习量化管理专业知识的参考用书。

本书内容涵盖两部分，第一部分一至六章为微积分；第二部分七至十二章为数理统计和概率，可以说本书内容简明扼要，适用性强。本书在编写过程中既考虑到数学学科本身的科学性、系统性，又考虑到培养学生的逻辑思维能力，尽可能地让学生更好地理解和掌握教材中的基本原理和方法。为了体现数学在经济领域中的应用，书中列举了很多经济应用方面的问题，使学生能初步掌握经济分析中的定量方法。每章后均配有习题供广大师生参考。

参加本书撰稿的人员有哈尔滨师范大学王丹红（编写第一、二、四、七、八章）、黑龙江省社会科学院徐嘉南（编写第三、五、九、十章）、东北林业大学陈向华（编写第六、十一、十二章）。本书最后由李世广、王丹红统稿、定稿。

由于时间仓促，加之我们水平有限，书中错误和疏漏在所难免，恳请各位专家和广大读者批评指正。

编者

2008 年 6 月

目　　录

第一章 函　　数

函数是高等数学的一个最基本概念,是微积分研究的主要对象. 在经济领域中涉及的大量数量关系都可以用函数来表达. 本章将讨论函数的概念及其简单性质,着重分析作为本学科主要研究对象的初等函数的结构,同时介绍几个经济管理中常见的函数.

第一节 函　　数

一、常量与变量

当我们观察某种自然现象或生产过程时,常常遇到各种不同的量. 有些量在过程进行中始终保持同一数值,称为**常量**. 例如,某种商品的价格在一定时期内是相对稳定的,可以看作常量. 有些量在过程进行中取不同的数值,称为**变量**. 例如,某种商品的销售量和销售额是变化的,可以看作变量.

常量与变量的概念是相对的. 一个量是常量还是变量要根据具体问题、具体条件来分析. 例如,销售某种商品,商品的价格在商品滞销或商品更新换代时,其价格也要变化,此时,价格就成了变量.

常量通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示,变量则以字母 x,y,z 表示. 常量与变量都可以用数轴上的点表示,如常量 x_0 表示数轴上的一定点,变量 x 表示数轴上的动点.

二、区间、邻域

设 a,b 都是实数,且 $a<b$. 数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点. 数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

a 和 b 称为闭区间 $[a,b]$ 的端点. 类似地可以说明:

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 在几何上,区间是指数轴上介于两个点(区间端点)之间的一条线段(图 1-1).

图 1-1

此外,还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),

则无限的半开或开区间表示如下：

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

$[a, +\infty)$ 及 $(-\infty, b]$ 称为无限半开区间. $(a, +\infty)$ 及 $(-\infty, b)$ 称为无限的开区间. 在几何上，它们表示长度为无限的半直线（图 1－2）.

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数，它是无限的开区间.

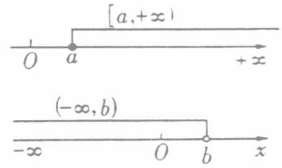


图 1－2

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$.

数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$

称为点 a 的 δ 邻域，点 a 叫做邻域的**中心**，δ 叫做邻域的**半径**.

因为 $|x - a| < \delta$ 等价于 $a - \delta < x < a + \delta$，所以点 a 的 δ 邻域就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$，这个开区间以点 a 为中心，而长度为 2δ（图 1－3）.

在几何上，点 a 的 δ 邻域表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体，这正是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$. 数集 $\{0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域. 与点 a 的 δ 邻域不同的是此邻域内不含点 a.

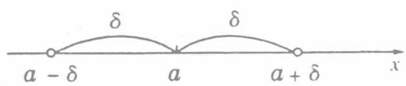


图 1－3

例如，点 2 的 0.5 邻域就是 $(1.5, 2.5)$，而 -2 的去心 0.1 邻域就是 $(-2.1, -2) \cup (-2, -1.9)$.

三、函数的概念

1. 函数的定义

在自然科学和经济管理中，所遇到的问题往往同时有几个变量同时在变化，它们之间并不是孤立的，而是相互联系、相互依赖的，并按一定规律变化着. 这种关系就是所谓的函数关系，下面考察几个实例.

例 1 商店在销售某种商品的过程中，销售总收入 R 与该商品销售量 Q 之间有下列关系：

$$R = PQ$$

其中，P 是该商品单价. 上式表明了销售总收入 R 与商品销售量 Q 之间的相互依存关系，即 R 与 Q 成正比，P 是比例系数.

例 2 为了进行市场预测，调查了某企业 1 ～ 6 月份某种商品的销售量分别为 100，105，110，115，111 和 120 件. 将其列成表格，则月份 t 与销售量 Q 有如下表所列的对应关系：

月份 $/t$	1	2	3	4	5	6
销售量 $/Q$	100	105	110	115	111	120

根据这个表格，当 t 取定 1 ～ 6 的整数中的任一个值时，Q 就有一个确定的数值与之对应.

例 3 设某地一天的气温 T 用自动记录仪记录如图 1－4. 时刻 t 与气温 T 之间的相互依存关系在图上反映出来，对于时刻 t_0，在图上就能找到此时刻的气温 T_0.

上面的例子所反映的问题各不相同，但都具有一个共同的特点，那就是它们反映了两

个变量之间的相依关系，即当其中一个变量在某一范围内取定一数值时，按照某种规律，另一个变量就有一个确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系，就是函数概念的实质.

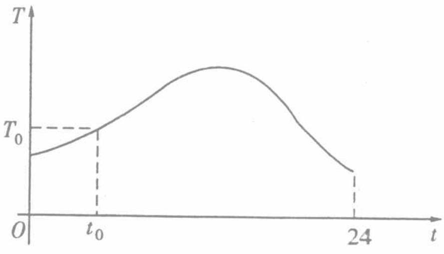


图 1－4

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，如果变量 x 在某一数集 D 内取值时，变量 y 按照一定法则总有确定的值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

数集 D 叫做这个函数的定义域，记作 $D(f)$，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当自变量 x 取定值 x_0 时，与之对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集称为函数的值域.

从函数的定义中可以看到函数包含两个要素：

(1) 定义域；

(2) 对应法则.

值得注意的是，函数的符号 $f(x)$ 是一个整体，字母"f"应理解为变量 x 与 y 之间的对应规律.

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如"φ"，"F"，等等，这时函数记作 $y = \varphi(x)$，$y = F(x)$，等等.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如例 1 中，定义域 $D = (0, +\infty)$；在例 2 中，定义域 $D = \{1,2,3,4,5,6\}$；在例 3 中，定义域 $D = [0,24]$.

在只给出函数的表达式 $y = f(x)$，而没有指出它的定义域时，则其定义域就是使 y 有意义的自变量 x 的全体.

例 4 求下列函数的定义域：

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$；　　(2) $f(x) = \lg(3 - 2x) + \arcsin(x - 1)$.

解 (1) 要使函数有意义，必须满足 $x^2 - 1 > 0$，即 $x > 1$ 或 $x < -1$，所以函数的定义域为

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

(2) 因为只有当 $3 - 2x > 0$ 且 $|x - 1| \leqslant 1$ 时函数才有意义，所以由不等式组

$$\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ |x - 1| \leqslant 1 \end{cases}$$

可得解集为 $0 \leqslant x < \dfrac{3}{2}$. 故函数的定义域为

$$D(f) = [0, \frac{3}{2})，或记为 D(f) = \{x \mid 0 \leqslant x < \frac{3}{2}\}$$

例 5 设 $f(x) = x^2 + x - 2$，计算 $f(0)$，$f(2)$，$f(-2)$，$f(t+1)$.

解 $f(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2$

$f(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4$

$f(-2) = (-2)^2 - 2 - 2 = 0$

$f(t+1) = (t+1)^2 + (t+1) - 2 = t^2 + 3t$

2. 函数的表示法

从上面例 1 ~ 例 3 我们可以看到,函数的表示法有三种:公式法、表格法和图示法.

公式法就是直接用数学式子表示两个变量间的函数关系的方法,它便于运算和分析,是微积分中常采用的方法. 表格法是将自变量 x 的一系列取值与对应的函数值列成表格,便于求函数值.

图示法可对函数的变化一目了然,直观醒目,缺点是不够准确和完整.

需要指出,公式法不一定用一个公式表示,有的在几个不同的定义域内分别用几个不同的式子来表示一个函数,称为**分段函数**.

对于分段函数强调以下两点:

(1) 分段函数是用几个式子表示一个函数,而不是几个函数;

(2) 分段函数的定义域是各段分析式子定义域的“并”.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

试指出 $f(x)$ 的定义域,并计算 $f(-3)$, $f(-\frac{1}{3})$, $f(0)$, $f(\frac{1}{3})$, $f(\frac{4}{3})$.

解 函数的定义域 $D(f)=(-\infty,0)\cup[0,1]\cup(1,2]=(-\infty,2]$.

因为 $x<0$ 时, $f(x)=0$, 故 $f(-3)=f(-\frac{1}{3})=0$, 同理 $f(0)=0^2=0$, $f(\frac{1}{3})=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$, $f(\frac{4}{3})=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.

第二节 函数的几种常见性态

一、单调性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 若对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)\subset D(f)$, 当 $x_1<x_2$ 时, 有 $f(x_1)<f(x_2)$ [或 $f(x_1)>f(x_2)$] 则称该函数在区间 (a,b) 内单调增加(或单调减少).

在区间 (a,b) 内单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**, 如图 1 - 5 所示.

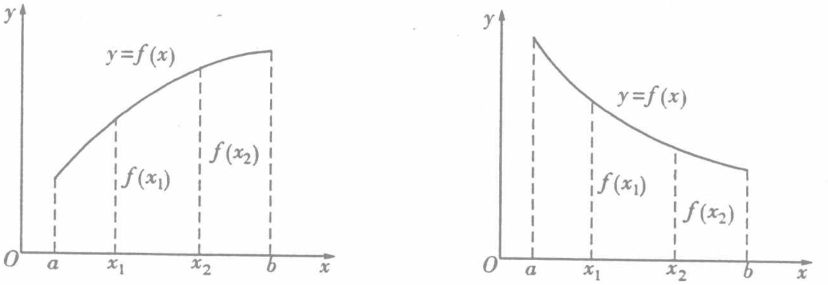


图 1 - 5

例如, 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加, 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调减少; 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调函数(图 1 - 6).

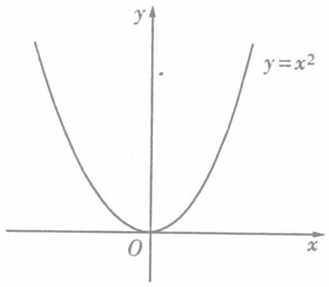


图 1－6

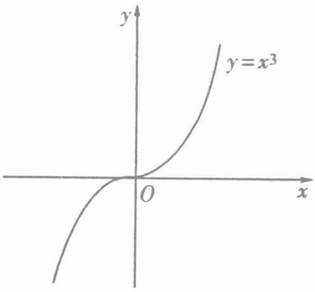


图 1－7

又例如,函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加函数(图 1－7).

二、奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)\,[\text{或} f(-x)=-f(x)]$$

恒成立,则称该函数为偶函数(或奇函数).

例如,$y=f(x)=x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

又例如,$f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

奇函数的图形关于原点对称(图 1－8),偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1－9).

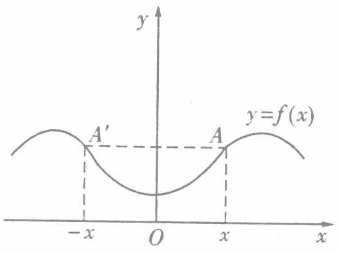


图 1－8

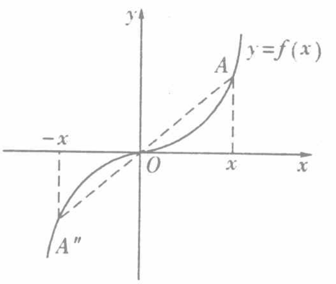


图 1－9

可以证明,$f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数,也不是偶函数,此类函数为**非奇非偶函数**.

三、周期性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$,$x\in(-\infty,+\infty)$. 若存在一个不为零的常数 l,使

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数. l 叫做 $f(x)$ 的周期. 通常,我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $y=\tan x$,$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

四、有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义. 若存在一个正数 M,对一切 $x\in$

(a,b)，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

例如，函数 $y = \sin x$，对一切 $x \in (-\infty,+\infty)$，恒有 $|\sin| \leqslant 1$，故此函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

与函数的单调性一样，函数的有界性也是一个与区间有关的概念. 例如函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的，在 $[1,+\infty)$ 内是有界的.

第三节　反函数与复合函数

一、反函数

设某种商品销售总收益为 y，销售量为 x，已知该商品的单价为 a. 对每一个给定的销售量 x，可以通过函数 $y = ax$ 确定销售总收益 y. 这种由销售量确定销售总收益的关系称为销售总收益是销售量的函数. 反过来，对每一个给定的销售总收益 y，则可以由函数 $x = \dfrac{y}{a}$ 确定销售量 x，这种由销售总收益确定销售量的关系称为销售量是销售总收益的函数. 我们称后一函数 $\left(x = \dfrac{y}{a}\right)$ 是前一函数 $(y = ax)$ 的反函数，或者说它们互为反函数.

定义 1.6　设已知函数 $y = f(x)$，$[x \in D(f)]$ 的值域为 R，如果对于 R 中的每一个 y，$D(f)$ 中只有一个 x 使 $f(x) = y$，则在 R 上确定了以 y 为自变量 x 为因变量的新函数 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的**反函数**，记作 $x = f^{-1}(y)$，$y \in R$，或称它们互为反函数.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，则函数 $y = f(x)$，$x \in D(f)$ 的反函数表示为

$$y = f^{-1}(x) \qquad x \in R$$

$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换，所以它们的图形是关于直线 $y = x$ 对称的，如图 1 − 10.

例 7　求 $y = 2x - 1$ 的反函数.

解　由 $y = f(x) = 2x - 1$ 可以求出

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$$

将上式中的 x 换成 y，将 y 换成 x，因此得出 $y = 2x - 1$ 的反函数是 $y = \dfrac{x+1}{2}$，如图 1 − 11.

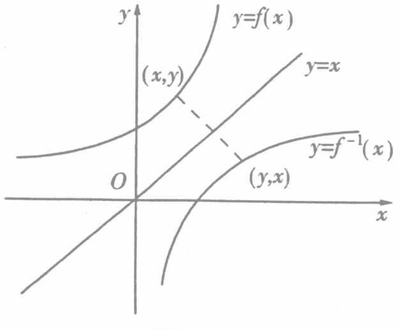


图 1 − 10

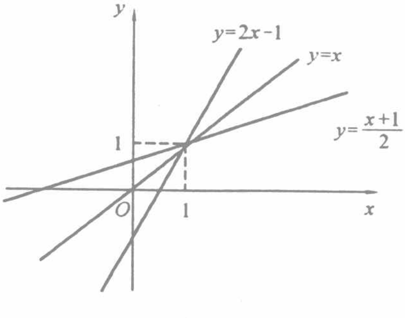


图 1 − 11

一个函数如果有反函数，它必定是一一对应的函数关系. 例如，在$(-\infty,+\infty)$内$y=x^2$不是一一对应的函数关系，所以它没有反函数；而在$(0,+\infty)$内，$y=x^2$有反函数$y=\sqrt{x}$；在$(-\infty,0)$内，$y=x^2$有反函数$y=-\sqrt{x}$.

二、复合函数

设$y=\sqrt{u}$，而$u=1-x^2$，由以上的两个函数就可以构成一个新的函数：

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

我们把这类函数称为复合函数.

定义 1.7 设$y=f(u)$，$u\in D(f)$，$u=\varphi(x)$，$x\in D(\varphi)$. 若对于$x\in D(\varphi)$，有$\varphi(x)\in D(f)$，则称函数$y=f[\varphi(x)]$为复合函数. x为自变量，y为因变量，u称为中间变量.

例 8 由函数$y=\sqrt{u}$，$u\in(0,+\infty)$，$u=x^2+1$，$x\in(-\infty,+\infty)$可以构成复合函数$y=\sqrt{x^2+1}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

例 9 由函数$y=\lg u$，$u\in(0,+\infty)$，$u=x-2$，$x\in(-\infty,+\infty)$可以构成复合函数$y=\lg(x-2)$，$x\in(2,+\infty)$.

例 10 函数$y=\sin^2x$是由$y=u^2$，$u=\sin x$两个函数复合而成的复合函数.

例 11 求复合函数$y=\arccos\dfrac{2x-1}{3}$的定义域.

解 $y=\arccos u$，$u=\dfrac{2x-1}{3}$，要求$|u|\leqslant 1$，即$\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1$，因此有$-1\leqslant x\leqslant 2$，于是得出$y=\mathrm{crccos}\dfrac{2x-1}{3}$的定义域为$[-1,2]$.

利用复合函数的概念，可以将一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成，也就是说，复合函数可以由两个以上的函数复合构成.

例 12 函数$y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$是由$y=\mathrm{e}^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$（$u$，$v$为中间变量）三个函数复合而成的复合函数.

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如，$y=\arccos u$，$u=x^2+5$就不能复合成一个复合函数. 因为$u=x^2+5$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[5,+\infty)$，而$y=\arccos u$的定义域为$[-1,1]$，在$u=x^2+5$中无论x取什么数值，对应的u值都不属于区间$[-1,1]$，因而不能使$y=\arccos u$有意义.

第四节　初等函数

一、基本初等函数

在实际问题中遇到的函数是各种各样的，有简单的，也有复杂的. 根据人们长期的社会实践总结出一类最基本的函数，它们是常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数，这六种函数通称为**基本初等函数**. 人们经常遇到的函数往往都是由这些函数构成的，因此熟悉这些函数的性质和图形是十分重要的.

1. 常值函数 $y = c$(c 为常数)

常值函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$,图形为平行于 x 轴、截距为 c 的直线,如图 1 - 12.

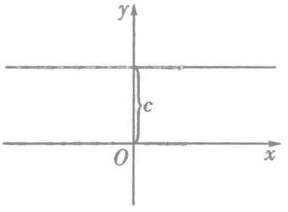


图 1 - 12

2. 幂函数 $y = x^{\alpha}$(α 为实数)

幂函数的定义域随 α 而异,但不论 α 为何值,x^{α} 在$(0, +\infty)$内总有定义,而且图形都经过(1,1)点.

例如,$y = x^2$ 与 $y = x^{\frac{2}{3}}$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,图形关于 y 轴对称,如图 1 - 13.

$y = x^3$,$y = x^{\frac{1}{3}}$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,图形关于原点对称,如图 1 - 14.

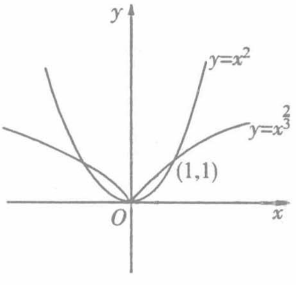


图 1 - 13

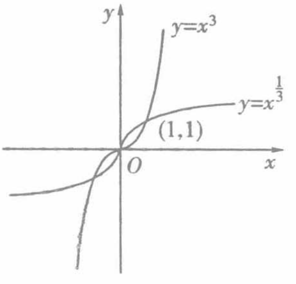


图 1 - 14

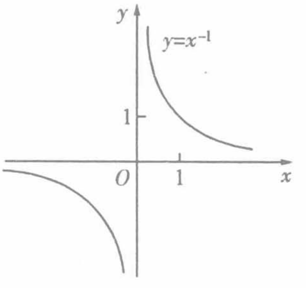


图 1 - 15

$y = x^{-1}$,定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,图形关于原点对称,如图 1 - 15.

$y = x^{\frac{1}{2}}$,定义域为$[0, +\infty)$,如图 1 - 16.

3. 指数函数 $y = a^x$($a > 0, a \neq 1$)

定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(0, +\infty)$,都通过(0,1)点,当 $a > 1$ 时,函数单调增加,当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少,如图 1 - 17.

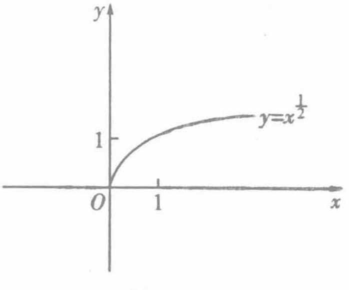


图 1 - 16

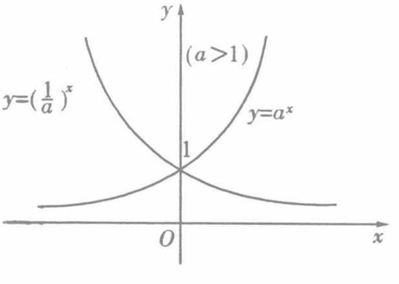


图 1 - 17

在实际问题中,用的最多的是形如 $y = e^x$,$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$ 的指数函数,其中 $e = 2.71828\cdots$.

4. 对数函数 $y = \log a^x (a > 0, a \neq 1)$

定义域为$(0, +\infty)$，都通过$(1,0)$点，当$a > 1$时，函数单调增加；当$0 < a < 1$时，函数单调减少，如图 1 - 18.

对数函数与指数函数互为反函数. 指数函数$y = e^x$的反函数是以 e 为底的对数函数$y = \ln x$.

5. 三角函数

三角函数有 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

正弦函数 $y = \sin x$ 与余弦函数 $y = \cos x$ 定义域均为$(-\infty, +\infty)$，均以2π为周期. $y = \sin x$ 为奇函数，$y = \cos x$ 为偶函数. 由于$|\sin x| \leqslant 1$，$|\cos x| \leqslant 1$，因此它们都是有界函数，如图 1 - 19.

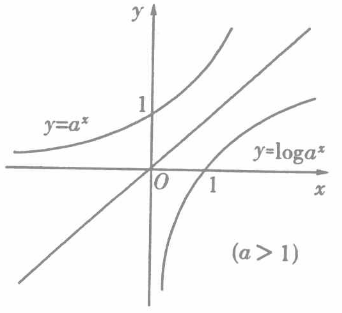


图 1 - 18

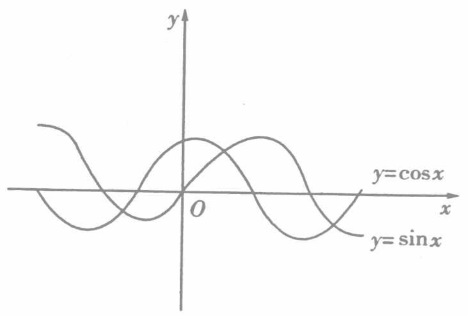


图 1 - 19

正切函数 $y = \tan x$ 定义域为 $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}(n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ 的实数，$\tan x$ 以 π 为周期，且为奇函数，如图 1 - 20.

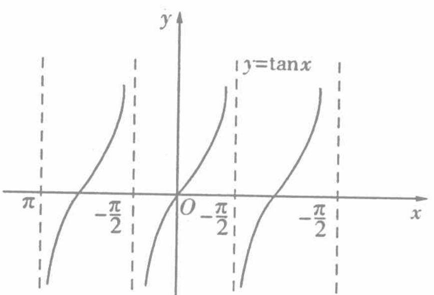


图 1 - 20

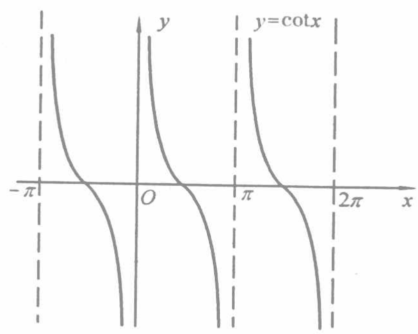


图 1 - 21

余切函数 $y = \cot x$ 定义域为 $x \neq n\pi(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的实数，ctyx 以 π 为周期，且为偶函数，如图 1 - 21.

6. 反三角函数

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ 等的反函数统称为反三角函数，分别记为 $y = \mathrm{Arcsin}x, y = \mathrm{Arccos}x, y = \mathrm{Arctan}x, y = \mathrm{Arccot}x$ 等，它们的图形分别与其相应的三角函数的图形关于直线$y = x$对称，我们按下列区间取其一段，称为**主值分支**，分别记作

反正弦函数：$y = \arcsin x \quad y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数:$y = \arccos x \quad y \in [0,\pi]$

反正切函数:$y = \arctan x \quad y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

反余切函数:$y = \operatorname{arccot} x \quad y \in (0,\pi)$

它们的图形分别如图 1 - 22、图 1 - 23、图 1 - 24 和图 1 - 25.

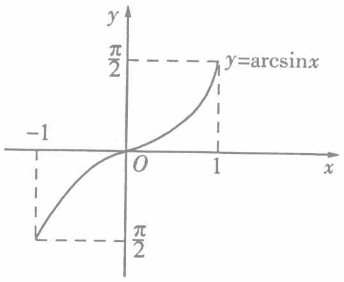


图 1 - 22

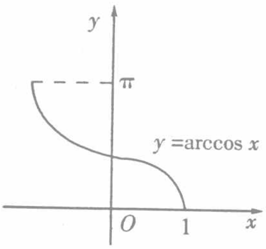


图 1 - 23

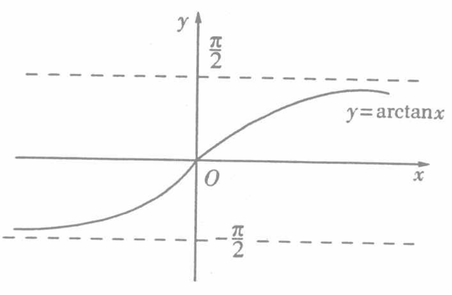


图 1 - 24

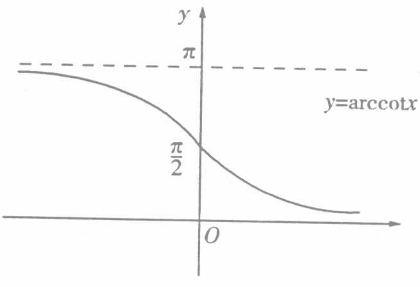


图 1 - 25

二、初等函数

定义 1.8 由基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次复合所构成并可以用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如,$y = x(1-2x)^2$,$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 等都是初等函数.

注意:分段函数一般不是初等函数. 但是,由于分段函数在其定义域的各个子区间上都由初等函数表示,故我们仍可通过初等函数来研究它们.

第五节 常用的经济函数

一、总成本函数,总收益函数和总利润函数

人们在生产和经营产品的活动中,总希望尽可能降低产品的生产成本,增加收入和提高利润. 而成本(C)、收益(R) 和利润(L) 这些经济变量都与产品的产量或销售量 x 密切相关,经过抽象简化,它们都可看成 x 的函数,分别称为**总成本函数**,记为 $C(x)$;**总收益函数**,记为 $R(x)$;**总利润函数**,记为 $L(x)$.

一般地,总成本由固定成本和可变成本两部分组成,即 $C(x) = C_1(x) + C_0$,固定成本

C_0 与产量 x 无关,如设备维修费、企业管理费等;可变成本 $C_1(x)$ 随产量 x 的增加而增加,如原材料费、动力费等. 因此,总成本函数 $C(x)$ 是 x 的单调增加函数.

平均单位成本函数 $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

如果产品的单位售价为 P,销售量为 x,则总收益函数为

$$R(x) = P \cdot x$$

总利润等于总收益减去总成本,故总利润函数为

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

例 13 某工厂生产某产品,每日最多生产 100 个单位. 它的日固定成本为 130 元,生产一个单位产品的可变成本为 6 元. 求该厂日总成本函数及平均单位成本函数.

解 设日产量为 x,日总成本为 $C(x)$,平均单位成本为 $\overline{C}(x)$.

根据题意,日总成本函数为

$$C(x) = C_1(x) + C_0 = 130 + 6x \qquad x \in [0,100]$$

平均单位成本函数为

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{130}{x} + 6 \qquad x \in (0,100]$$

例 14 设某厂产品的总成本中,固定成本为 20 000 元,单位产品(每台)变动费用为 3 000 元,单位产品售价为 5 000 元. 试求成本函数、收益函数、利润函数.

解 设产量为 x,总成本为 $C(x)$,总收益为 $R(x)$,利润为 $L(x)$.

根据题意,总成本函数 $\quad C(x) = 3\,000x + 20\,000$

收益函数 $\quad R(x) = x \cdot p = 5\,000x$

利润函数 $\quad L(x) = R(x) - C(x) = 2\,000x - 20\,000$

将 $R(x) = 5\,000x$ 及 $C(x) = 3\,000x + 20\,000$ 的图形画在同一坐标平面内,这是两条直线,易求得其交点 $x = 10$(图 1 - 26). 显然,当 $x > 10$ 时,$R - C > 0$,企业盈利;反之,当 $x < 10$ 时,$R - C < 0$,企业就亏本;而当 $x = 10$ 时 $R = C$,企业收支相抵.

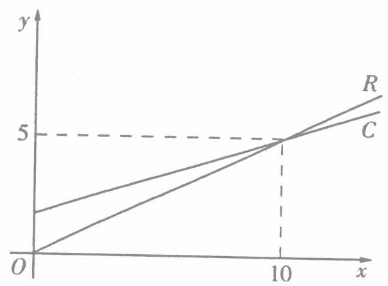


图 1 - 26

二、需求函数与供给函数

1. 需求函数

"需求"是指在一定价格条件下,消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量.

一种商品的市场需求量 Q 是多种因素决定的,商品的价格 P 是影响需求的一个主要因素. 降价使需求量增加,涨价使需求量减少. 如果不考虑其他影响需求的因素,只研究需求与价格的关系,则