

探究
课堂

主体探究

学习方略

十五规划教育部重点课题 编著
实施研究性学习专题研究课题组

高中新课程

数学

配人教B版 必修4



山东教育出版社

科学理念

全新思维

启迪智能

开阔视野

百战百胜

丛书编委会

主 任：崔相录
副 主 任：毕 诚 李希贵 韩德锋 陶三发
委 员：陈如平 郝志军 潘光舜 刘吉林
王本陆 吴 江 谭子刚 李光林
张克勤 邓后军 郑 勇

总 主 编：崔相录
副总主编：陶三发
执行主编：郑 勇
本册主编：孙维风
本册副主编：李健群
本册编委：孙维风 李健群 周 妍
王 璐 许俊红





出版说明

CHU BAN SHUO MING

国家教育大纲(纲要)是教育工作的“准宪法”,也是这套丛书所有作者的共同信条。我国新课改纲要以及新课标,不仅对课程、教法,而且对考试(包括中考、高考)都揭示了改革方向以及最终要达到的目标。新课改大力推进以培养创新精神和实践能力为主的素质教育,以让学生更多地在探究中学习,在实践中学习,扭转长期以来教学脱离科研实际和社会实践的局面,并大力提倡学生自主学习、合作学习、以学习者为中心的现代教学理念。新课改精神和新课标,是策划编写本丛书的出发点,又是归宿。因此,编者树立了新的编写理念,确定了新的编写目标,选择了新的编写视角,采取了新的编写方法。

除了上述“四新”以外,本丛书还有“六个特点”:

1. 编写宗旨——改变学生的学习方式。

即从根本上改变以接受知识为主的传统学习方式。

2. 推进以探究为主的多元学习方式。

多元学习包括探究的、实践的、合作的、自学的、接受的学习。探究既是科学的操作方式,又是科学的本质。科学学习和科学探究过程的不分离,越来越被视为学生掌握完整的知识,培养各种能力和优良品质品德的最佳途径。

3. 贯彻“以学习者为中心”理念。

本丛书以学生为直接的读者对象,为学生课内外探究实践、自学、合作、备考、应考提供最好的“援助”。

4. 紧扣新课标新教材的每章节、每节课的教学任务。

本丛书既是最好的学生用书,又是最好的教师用书。

5. 以多种精彩的学习范例启导学生。

范例的示范、启导作用无可估量,远远胜于直接传授。

6. 提出大量探究题和训练题,充分发扬传统教学“精讲多练”等优良传统。

尽可能地增加学生自主地探究、拓展、巩固知识和技能的契机。

本丛书作为全国教育科学“十五”规划重点课题“实施研究性学习专题研究”科研成果的重大推广项目,遵循从教学第一线中来到教学第一线中去的思路。课题组长崔相录研究员,十多年来潜心从事有关素质教育和探究教学的开创性研究工作。本丛书编写工作严格执行专家——教研员——第一线教师三结合原则。所有的作者,都是多年来接受过有关培训,在实验和实践研究中涌现出来的探究学习专才。

我们相信和期待,本丛书能够引领数以万计的中学生和教师走进充满生机的探究世界,踏上从根本上改变学习方式和教学方式,全面提高学习和教学质量的征程。

总主编

2009年1月

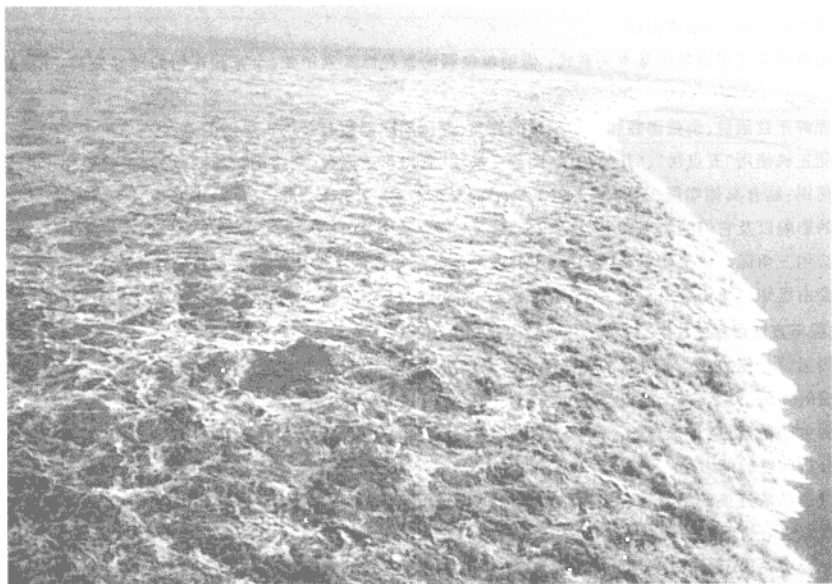
目 录

第一章 基本初等函数(Ⅱ)	(1)
第一节 任意角的概念与弧度制	(2)
主题1 角的概念的推广	(3)
主题2 弧度制和弧度制与角度制的换算	(6)
第二节 任意角的三角函数	(9)
主题1 三角函数的定义、单位圆与三角函数线	(9)
主题2 同角三角函数的基本关系式	(13)
主题3 诱导公式(一)	(16)
主题4 诱导公式(二)	(19)
第三节 三角函数的图象与性质	(22)
主题1 正弦函数的图象与性质1	(22)
主题2 正弦函数的图象与性质2	(26)
主题3 余弦函数的图象与性质	(29)
主题4 正切函数的图象与性质	(32)
主题5 已知三角函数值求角	(35)
单元回顾	(39)
单元测评	(41)
第二章 平面向量	(45)
第一节 向量的线性运算	(46)
主题1 向量的概念	(47)
主题2 向量的加减法	(50)
主题3 数乘向量	(54)
主题4 向量共线的条件与轴上向量坐标运算	(58)
第二节 向量的分解与向量的坐标运算	(61)
主题1 平面向量基本定理	(61)
主题2 向量的正交分解与向量的直角坐标运算	(65)
主题3 用平面向量坐标表示向量共线条件	(69)
第三节 平面向量的数量积	(72)
主题1 向量数量积的物理背景与定义	(72)
主题2 向量数量积的运算律	(75)
主题3 向量数量积的坐标运算与度量公式	(79)
第四节 向量的应用	(82)
主题1 向量在几何中的应用	(82)
主题2 向量在物理中的应用	(86)
单元回顾	(90)
单元测评	(92)
第三章 三角恒等变换	(96)
第一节 和角公式	(97)
主题1 两角和与差的余弦	(97)
主题2 两角和与差的正弦	(101)
主题3 两角和与差的正切	(105)
第二节 倍角公式和半角公式	(109)
主题1 倍角公式	(109)
主题2 半角的正弦、余弦和正切	(113)
第三节 三角函数的积化和差与和差化积	(117)
主题 三角函数的积化和差与和差化积	(117)
单元回顾	(121)
单元测评	(123)
(附参考答案)	



第一章

基本初等函数(II)



本章的内容是三角函数的概念、图象与性质,以及三角函数模型的简单应用.它建立在对几何中圆的性质、相似形的有关知识,函数及其性质等知识初步掌握的基础上,是学习进一步的延伸.它们揭示了现实生活中如潮涨潮落、四季更替等现象的实质.作为高中函数学习的第二阶段,你将通过回顾对指数函数、对数函数的研究方法,用类比的思想完成对三角函数的研究;通过代数变形和图象分析,理解三角函数的单调性与特殊点,感受数形结合的数学思想;从几个特殊的三角函数的图象,归纳探究它们性质的异同;通过梳理知识点、查阅资料、利用互联网、仿照课本例题等多种方法,收集现实生活中的有关素材,尝试用建立数学模型的方法分析、解决实际问题.你将看到本章所介绍的知识,既是解决生产实际问题的工具,又是学习后继内容和高等数学的基础.三角函数是研究度量几何的基础,作为描述周期现象的重要数学模型,与其他学科(特别是物理学、天文学)联系紧密.



第一节 任意角的概念与弧度制

三维目标

知识与技能目标:

1. 了解任意角的概念和弧度制,能正确地进行弧度与角度的互化.
2. 理解任意角的正弦、余弦、正切的定义;了解任意角的余切、正割、余割的定义;并会利用单位圆中的有向线段表示正弦、余弦和正切.
3. 理解同角三角函数的基本关系式;借助单位圆的直观性探索正弦、余弦和正切的诱导公式,并掌握其应用.
4. 理解正弦函数、余弦函数和正切函数的性质,理解周期函数与最小正周期的意义.
5. 能正确使用“五点法”、“几何法”、“图象变换法”画出正弦函数、余弦函数的图象,能正确地作出正切函数的简图;结合具体实例,了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义;了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中参数 A 、 ω 、 φ 对函数图象变化的影响以及它们的物理意义.
6. 会用三角函数解决简单实际问题,了解三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.
7. 会由已知三角函数值求角,并会用符号 $\arcsin\alpha$ 、 $\arccos\alpha$ 、 $\arctan\alpha$ 表示角.

过程与方法目标:

1. 用运动变化的观点了解角的概念的推广是解决现实生活和生产中实际问题的需要,通过对各种角的表示法的训练,提高分析、抽象、概括的能力.
2. 树立映射观点,正确理解三角函数是以实数为自变量的函数,培养利用联系、变化的辩证唯物主义观点去分析问题的能力.
3. 通过图象变换的学习培养运用数形结合思想分析、理解问题的能力;培养利用联系、变化的辩证唯物主义观点去分析问题的能力.
4. 结合有关内容(如角度与弧度的换算、已知角求它的三角函数值、已知三角函数值求角)进行算法的基本训练,鼓励学生运用计算器、计算机求函数值,作函数图象,探索 and 解决问题.

情感、态度与价值观目标:

1. 通过对角的概念的推广,培养学生学习数学的兴趣;理解并认识角度制与弧度制是辩证统一的,不是孤立、割裂的.
2. 通过同角三角函数的基本关系的学习,揭示事物之间的普遍联系规律,培养辩证唯物主义思想.
3. 通过图象变换的学习,培养从特殊到一般,从具体到抽象的思维方法,从而达到从感性认识到理性认识的飞跃.



情景导入

在初中我们已经知道了一些角,这些角是用“度”作单位来度量的,它们都在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 之间.在实际生活中,为了应用与计算方便,我们常常需要用另一种单位来度量角,这个单位就是弧度,你能举例说明这两者之间的关系吗?

主题一

角的概念的推广



主题探究

[主题情景]

我们已经知道了锐角、直角、钝角、平角及周角,这些角都在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间.可是,在日常生活中,比如观看体操比赛,我们常听到转体 540° 等.一个角的度数能大于 360° ? 下面让我们一起来探究吧.

[我的发现]

我对角的认识是: _____.

正角是: _____.

负角是: _____.

零角是: _____.

角的范围是: _____.

[归纳·整理]

1. 象限角的集合表示

(1) 第一象限的角的集合 $\{x | k \cdot 360^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

(2) 第二象限的角的集合 $\{x | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

(3) 第三象限的角的集合 $\{x | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

(4) 第四象限的角的集合 $\{x | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. 象限界角(或轴线角)

(1) 终边落在 x 轴正半轴上的角的集合 $\{x | x = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

(2) 终边落在 x 轴负半轴上的角的集合 $\{x | x = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

(3) 终边落在 x 轴上的角的集合 $\{x | x = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

(4) 终边落在 y 轴正半轴上的角的集合 $\{x | x = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

(5) 终边落在 y 轴负半轴上的角的集合 $\{x | x = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

(6) 终边落在 y 轴上的角的集合 $\{x | x = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

(7) 终边落在坐标轴上的角的集合 $\{x | x = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.



问题导探

问题 1: 在直角坐标系内,将一个角的顶点放在坐标原点,始边与 x 轴的正半轴重合,若将角的终边顺时针方向旋转一周半,请你画出这个角.

[我的探究]

专家导言: 确定角的始边与终边位置,就能将一个角画出来.

问题 2: 分别画出 45° 与 60° 的角,由此你能画出 15° 、 105° 、 75° 的角吗? 由 45° 与 60° 的角,你还能画出多少度的角?

[我的探究]

专家导言: 对角进行适当的裁剪与叠加,能产生各种度数的角.



[意义建构]

1. 正角是: _____, 负角是: _____.
零角是: _____, 转角是: _____.
2. 在直角坐标系中讨论角时, 使角的顶点与坐标 _____ 重合, 角的始边与 _____ 重合, 这时角的终边(端点除外)在第几象限, 就说这个角是 _____. 如果角的终边在坐标轴上, 则认为此角是 _____.
3. 各角和的旋转量等于 _____.
4. 与角 α 终边相同的角的集合为 _____.



范例导析

本节内容是学好后续知识的基础, 虽然很少以单独命题出现, 但常常与其他知识综合.

例 1: 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间, 求出与下列各角终边相同的角, 并判断它们在第几象限?

(1) $1018^\circ 28'$; (2) -908° .

解: (1) $1018^\circ 28'$

$$= 298^\circ 28' + 2 \times 360^\circ,$$

$\therefore 1018^\circ 28'$ 与 $298^\circ 28'$ 有相同的终边, 它在第四象限.

(2) $-908^\circ = 172^\circ + (-3) \times 360^\circ$,

$\therefore -908^\circ$ 与 172° 有相同的终边, 它在第二象限.

导析: 判断一个角属于第几象限, 通常表示为 $n \cdot 360^\circ + \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, 其中 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$, 只要判定 α 所在的象限即可.

例 2: 写出与 -1840° 终边相同的角的集合, 找出集合中属于区间 $[-720^\circ, 720^\circ]$ 的所有角.

解: 所求角的集合为:

$$\{\alpha | \alpha = -1840^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\therefore -1840^\circ = 320^\circ + (-6) \times 360^\circ,$$

$\therefore$ 在区间 $[-720^\circ, 720^\circ]$ 上的角为

$$-400^\circ, -40^\circ, 320^\circ, 680^\circ.$$

导析: 求符合某条件且与已知角终边相同的角, 先写出一般式(即通解), 再依条件讨论 k 的值.

例 3: (1) 写出终边在 y 轴上的角的集合; (2) 写出终边在坐标轴上的角的集合.

解: (1) 终边在 y 轴的正半轴上角的集合为

$$\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

终边在 y 轴的负半轴上角的集合为

$$\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

故终边在 y 轴上角的集合为

$$\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = 2k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) 终边在 x 轴上角的集合为 $\{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$,

终边在 y 轴上角的集合为 $\{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$,

则终边在坐标轴上角的集合为

$$\{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = n \cdot 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\}.$$

导析: 先写出终边在不同位置时的集合, 再对它们进行综合, 最后写出较简明的解集. 这类集合应牢记.

例 4: 已知集合 $A = \{\alpha | 30^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 集合 $B = \{\beta | -45^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 求 $A \cap B$.

解: 由 $30^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 得

当 $k = 2n (n \in \mathbb{Z})$ 时,

$$30^\circ + n \cdot 360^\circ < \alpha < n \cdot 360^\circ + 90^\circ, n \in \mathbb{Z};$$

当 $k = 2n+1 (n \in \mathbb{Z})$ 时,

$$210^\circ + n \cdot 360^\circ < \alpha < n \cdot 360^\circ + 270^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{则 } A \cap B = \{\theta | 30^\circ + k \cdot 360^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

导析: 借助图形, 在直角坐标系内分别画出集合 A 与集合 B 所在的区间, 然后, 找到它们的公共部分, 最后写出其解集.



学能导航

[要点剖析]

本节主题研究了角的推广, 终边相同的角的集合的表示方法, 并应用它解决一些如求某个范围内的角等较简单的问题, 通过本节主题的研究, 让我们逐步学会应用数形结合的思想解决有关问题.

主题研究的问题有三类: 一类是求与 α 终边相同的角的表示; 二类是求满足某个条件的角; 三类是利用数形结合的思想, 解决某些较简单的应用问题.

本节主题的重点是任意角的概念、象限角的概念, 难点是把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来.

[方法点评]

1. 掌握终边相同的角的集合的表示方法, 不要忘记写明 " $k \in \mathbb{Z}$ ".
2. 角的终边相同, 角不一定相等, 应依题目中的条件进行判断.
3. 学习中有意识的渗透数形结合与分类讨论的数学思想.



知能导练

A 级

一、选择题

- 若 α 是锐角, 则 $180^\circ - \alpha$ 是 ()
A. 第一象限角 B. 第二象限角
C. 第三象限角 D. 第四象限角
- 下列命题中正确的是 ()
A. 第一象限角一定是锐角
B. 小于 90° 的角在第一象限
C. 钝角一定是第二象限角
D. 终边相同的角一定相等
- 终边在坐标轴上的角的集合是 ()
A. $\{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$
B. $\{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$
C. $\{\alpha | \alpha = n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$
D. $\{\alpha | \alpha = n \cdot 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$

二、填空题

- 与角 -156° 终边相同角的集合中最小的正角是_____.
- 若 $-720^\circ < \alpha < -360^\circ$, 且 α 与角 120° 终边相同, 则 $\alpha =$ _____.
- 时针走过 1 小时 20 分, 则分针所转过的角度为_____, 时针所转过的角度为_____.

三、解答题

- 在直角坐标系中, 作出下列各角:
(1) 3900° ; (2) -240° .
- 将下列各角表示为 $\alpha + k \cdot 360^\circ$ ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$) 的形式, 并判断角所在象限?
(1) $560^\circ 24'$; (2) $-560^\circ 24'$.

B 级

一、选择题

- α 是第一象限角, 则 $-\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 ()
A. I B. I 或 IV
C. II D. II 或 IV
- 给出下列四个命题: ① -75° 是第四象限的角; ② 475° 是第三象限的角; ③ -315° 是第一象限的角; ④ 若角 α 的终边经过点 $M(0, -3)$, 则 α 既是第三象限角又是第四象限角. 其中正确的命题个数为 ()
A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个
- 若角 α 与 β 的终边垂直, 则它们的关系是 ()
A. $\beta = \alpha + 90^\circ$
B. $\beta = \alpha \pm 90^\circ$
C. $\beta = \alpha + 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$)
D. $\beta = \alpha \pm 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$)

二、填空题

- 已知 $A = \{\text{第一象限的角}\}$, $B = \{\text{锐角}\}$, $C = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, 则
 $A \cap B =$ _____; $B \cap C =$ _____.
- 若角 α 的终边经过点 $P(-1, -\sqrt{3})$, 则角 α 的集合为_____.
- 射线 OA 绕端点 O 逆时针旋转 120° 到达 OB 位置, 由 OB 位置顺时针旋转 270° 到 OC 位置, 则 $\angle AOC =$ _____.

三、解答题

- (1) 写出终边在第一象限角平分线上角的集合; (2) 写出终边在第一、三象限角平分线上角的集合.
- 自零时刻起, 到分针与时针再次重合, 求分针所转过的角的度数.

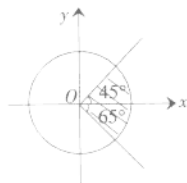


问题探究 1: 角 α 是第 n ($n=1, 2, 3, 4$) 象限角, 试讨论 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.

[我的探究]

问题探究 2: 如图, 写出终边在阴影部分的角的集合.

[我的探究]



问题探究 2 图

专家提示: 先写出角 α 的正确表示, 再分奇数、偶数两种情况分析.

专家提示: 先找准边界位置的角的表示, 再按逆时针方向写出解集.

主题二

弧度制和弧度制与角度制的换算



主题探究

[主题情景]

我们已经知道了用角度制来度量一个角, 现在我们学习一种新的度量角的方法——弧度制. 一个圆的圆心角为 360° , 你能得到它的弧度数是多少吗?

[我的发现]

我的例子是 _____;

弧度与角度的关系是 _____.



问题导探

问题 1: 设半径为 1 的两个扇形, 它们的圆心角分别为 90° 和 120° , 试计算其各自的弧长及弧长与半径的数值比. 由此, 你能得出什么结论?

[我的探究]

我的结论是 _____.

我的理由:

专家导言: 按初中已学过的弧长的公式计算, 比值相等.

问题 2: 设半径分别为 1 和 2 的两个扇形, 它们的圆心角都为 120° , 试计算其各自的弧长及弧长与半径的比值. 由此, 你能得出什么结论?

[我的探究]

我的结论是 _____.

我的理由:

专家导言: 弧长不同, 比值相等.

[意义建构]

1. 角度制是: _____;

弧度制是: _____.

2. 我们规定周角的 _____ 为 1 度的角;把弧长等于半径的弧所对的圆心角叫做 _____ 的角.

3. 正角的弧度数为 _____;负角的弧度数为 _____;零角的弧度数为 _____;

| α | _____.(其中 α 为圆心角的弧度数)

4. 弧度制下的弧长公式为 _____;扇形的面积公式为 _____.

5. 1 度 = _____ 弧度;1 弧度 = _____ 度.



范例导析

本节内容是学习三角函数的基础,试题一般结合三角函数的相关知识以选择题、填空题的形式出现进行综合考查,或利用弧长公式、扇形面积公式解决某些简单的实际问题.

例 1: (1) 把 -1480° 写成 $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的形式, 其中 $0 \leq \alpha < 2\pi$; (2) 若 $\beta \in [-4\pi, 0)$, 且 β 与 (1) 中 α 终边相同, 求 β .

解: (1) $-1480^\circ = -\frac{74}{9}\pi$

$$= \frac{16}{9}\pi + 2 \times (-5) \times \pi.$$

(2) $\therefore \beta$ 与 α 终边相同,

$$\therefore \beta = \frac{16\pi}{9} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

又 $\beta \in [-4\pi, 0)$,

$$\therefore \beta = -\frac{20\pi}{9}, -\frac{2\pi}{9}.$$

导析: 求符合某条件且与已知角终边相同的角, 先写出一般式(即通解), 再依条件讨论 k 的值.

例 2: 若三角形的三个内角之比为 2:3:4, 求这三个内角的弧度数和角度数.

解: 设三个内角的弧度数分别为 $2x, 3x, 4x$, 则 $2x + 3x + 4x = \pi$, $\therefore x = \frac{\pi}{9}$.

$$\therefore \text{三个内角的弧度数分别为 } \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}.$$

角度数分别为 $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$.

导析: 合理的设未知数, 抓住三角形的本质(三内角和为 π), 是解决本题的关键.

例 3: (1) 12 时 15 分时, 时钟的时针与分针的夹角 α 是多少弧度? (2) 在 1 时 15 分时, 时钟的时针与分针的夹角 α 是多少弧度? ($0 \leq \alpha < \pi$)

$$\text{解: (1) } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{23}{48}\pi;$$

$$(2) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \times \frac{5}{4} = \frac{19}{48}\pi.$$

导析: 应注意时针与分针运动的速度不同.

例 4: 一扇形的周长为 20 cm, 当扇形的圆心角 α 等于多少弧度时, 这个扇形的面积最大? 最大面积是多少?

解: 设扇形的半径为 r cm, 则弧长为 $l = (20 - 2r)$ cm, 扇形的面积 $S = \frac{1}{2} (20 - 2r) \cdot r = -(r - 5)^2 + 25$.

$$\text{当 } r = 5 \text{ cm 时, } l = 10 \text{ cm, } \alpha = \frac{l}{r} = 2 \text{ 弧度,}$$

$$\text{故当 } \alpha = 2 \text{ 弧度时, } S_{\max} = 25 \text{ cm}^2.$$

导析: 本题应用公式时必须是弧度制.



学能导航

[要点剖析]

本节主题研究了弧度制及其与角度制的换算, 以及弧度的某些简单应用. 通过本节主题的研究, 让我们理解弧度的意义, 熟记特殊角的弧度数, 能正确进行弧度与角度的换算, 掌握弧度制下的弧长公式、扇形面积公式, 会利用弧度解决某些实际问题. 本节主题的重点是理解弧度的意义, 能正确进行弧度与角度的换算, 难点是弧度制及弧度与角度的换算.

[方法点评]

1. 弧度制的引入, 使任意角与实数建立了一一对应的关系. 要善于运用弧度制.
2. 熟练掌握弧度制下的弧长公式和扇形的面积公式. 弄清圆心角、半径、弧度、扇形面积之间的关系.
3. 学习中有意识的渗透数形结合与分类讨论的数学思想.



A 级

一、选择题

1. 315° 角的弧度数为 ()
A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{7\pi}{4}$
C. $-\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{4}$
2. 5 弧度的角所在的象限为 ()
A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
3. 扇形半径为 2, 弧长为 3, 则圆心角 α 为 ()
A. $\frac{3}{2}$ rad B. $\frac{1}{2}$ rad
C. 1 rad D. 2 rad

二、填空题

4. $\frac{12\pi}{5}$ (rad) = _____ (度).
5. 已知扇形 OAB , $OA=160$ cm, $\widehat{AB}=240$ cm, 则 $\angle AOB$ 的弧度数 _____; 扇形 OAB 的面积 _____.
6. 已知扇形的圆心角为 α , 半径为 r , 弧长为 l , 则 (1) 若 $\alpha=3\pi$, $r=4$, 则 $l=$ _____; (2) 若 $\alpha=216^\circ$, $l=7\pi$, 则 $r=$ _____.

三、解答题

7. 将下列各角写成 $\alpha+2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的形式, 其中 $0 \leq \alpha < 2\pi$.

(1) $\frac{23\pi}{3}$; (2) $-\frac{23\pi}{3}$; (3) 450° .

8. 已知圆上的一段弧长等于该圆的内接正方形的边长, 求这段弧所对的圆周角的弧度数.

B 级

一、选择题

1. 下列命题中正确的是 ()
A. 若两扇形面积之比是 1:4, 则两扇形弧长之比是 1:2

- B. 若扇形的弧长一定, 则面积存在最大值
- C. 若扇形的面积一定, 则弧长存在最小值
- D. 任意角的集合可以与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立一种一一对应关系

2. 若角 α 和角 β 的终边关于 y 轴对称, 则 ()

- A. $\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)
- B. $\alpha+\beta=2k\pi+\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)
- C. $\alpha+\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)
- D. $\alpha+\beta=k\pi+\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

3. 把 $-\frac{11}{4}\pi$ 表示成 $2k\pi+\theta$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的形式, 使 $|\theta|$ 最小的 θ 的值 ()

- A. $-\frac{3}{4}\pi$
- B. $-\frac{1}{4}\pi$
- C. $\frac{3}{4}\pi$
- D. $\frac{1}{4}\pi$

二、填空题

4. 一个扇形的面积为 1, 周长为 4, 则圆心角的弧度数 _____.
5. 已知扇形 AOB 的面积为 1 cm^2 , 它的周长为 4 cm, 则弦 AB 的长等于 _____.
6. 已知扇形的圆心角为 120° , 半径为 6, 则扇形所含弓形的面积为 _____.

三、解答题

7. 已知角 α 的终边与角 $\frac{\pi}{6}$ 的终边关于直线 $y=x$ 对称, 且 $\alpha \in (-4\pi, 4\pi)$, 求 α .

8. 已知扇形的周长为 c ($c>0$), 求其扇形面积的最大值, 并求此时扇形的圆心角的弧度数.



拓展导览

问题探究 1: 已知集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $P = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则集合 M 与集合 P 的关系是_____.

[我的探究]

专家提示: 借助图形, 在直角坐标系内分别画出集合 A 与集合 B 所在的区间, 然后找到它们的公共部分, 最后写出其解集.

问题探究 2: 用皮带连接直径分别为 10 cm, 6 cm 的两个轮子 A, B . 若点 P, Q 分别是 A, B 边缘上一点, 轮子 A 以每秒 5 弧度的角速度旋转, 经过 5 秒钟后, 求点 Q 转过的弧度数.

[我的探究]

专家提示: 注意, 两轮转动的线速度相等.

第二节 任意角的三角函数



情景导入

在初中, 我们在直角三角形中学习过锐角的三角函数. 现在, 我们继续学习三角函数. 在这里, 你将学习到六种三角函数, 以及它们之间的运算关系. 通过本节内容的学习, 我们应理解三角函数的定义, 掌握“同角三角函数的基本关系式”和诱导公式, 并能运用公式进行有关化简、求值的运算.

主题一

三角函数的定义、单位圆与三角函数线



主题探究

[主题情景]

角的概念推广到了任意角, 三角函数也可以相应地推广到任意角的三角函数. 通过学习, 你了解到了哪些? 三角函数的几何表示是什么?

[我的发现]

三角函数有_____种, 它们是利用_____来定义的.

三角函数的几何表示是_____.



问题导探

问题 1: 角 α 的终边上一点 P 的坐标为 $(4a, -3a) (a \neq 0)$, 求 $2\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值.

[我的探究]

专家导言: 已知条件中含有参数时, 要注意对参数进行分类讨论.

问题 2: 当 $0 < \alpha < \pi$ 时, 求使 $\sin\alpha > \frac{1}{2}$ 和 $\cos\alpha < \frac{1}{2}$ 同时成立的 α 的取值范围.

[我的探究]

专家导言: 借助三角函数线解简单的三角不等式, 要熟悉特殊角的三角函数值.

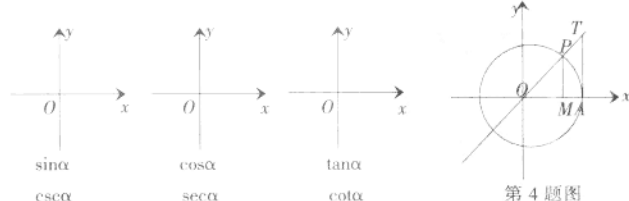
[意义建构]

1. 设 α 是一个任意角, α 的终边上任意一点 P 的坐标为 (x, y) , 它与原点的距离是 $r (r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0)$, 那么: 比值 $\frac{y}{r}$ 叫做 α 的正弦, 记作 $\sin\alpha$, 即 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; 比值 $\frac{x}{r}$ 叫做 α 的余弦, 记作 $\cos\alpha$, 即 $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; 比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切, 记作 $\tan\alpha$, 即 $\tan\alpha = \frac{y}{x}$; 比值 $\frac{x}{y}$ 叫做 α 的余切, 记作 $\cot\alpha$, 即 $\cot\alpha = \frac{x}{y}$; 比值 $\frac{r}{x}$ 叫做 α 的正割, 记作 $\sec\alpha$, 即 $\sec\alpha = \frac{r}{x}$; 比值 $\frac{r}{y}$ 叫做 α 的余割, 记作 $\csc\alpha$, 即 $\csc\alpha = \frac{r}{y}$.

2. 三角函数的定义域:

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	
$\cos\alpha$	
$\tan\alpha$	
$\cot\alpha$	
$\sec\alpha$	
$\csc\alpha$	

3. 三角函数值在各象限的符号:



第 4 题图

4. 如图, 单位圆与角 α 终边交于点 P , 与 x 轴正半轴交于 $A(1, 0)$, 过点 A 作单位圆的切线, 与 α 终边或其反向延长线交于点 T , 过 P 作 $PM \perp OM$, 垂足为 M , 则有向线段 MP 、 OM 、 MA 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线.



范例导析

例 1: 已知角 α 的终边在直线 $y = -3x$ 上, 求 $10\sin\alpha + 3\sec\alpha$ 的值.

解: 设终边上任意一点 $P(k, -3k)$, 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{k^2 + (-3k)^2} = \sqrt{10}|k|$.

当 $k > 0$ 时, $r = \sqrt{10}k$,

$$\therefore \sin\alpha = \frac{-3k}{\sqrt{10}k} = \frac{-3}{\sqrt{10}}, \sec\alpha = \frac{\sqrt{10}k}{k} = \sqrt{10},$$

$$\therefore 10\sin\alpha + 3\sec\alpha = -3\sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 0.$$

当 $k < 0$ 时, $r = -\sqrt{10}k$,

$$\therefore \sin\alpha = \frac{-3k}{-\sqrt{10}k} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sec\alpha = \frac{-\sqrt{10}k}{k} = -\sqrt{10},$$

$$\therefore 10\sin\alpha + 3\sec\alpha = 3\sqrt{10} - 3\sqrt{10} = 0.$$

导析: (1) 根据角的终边所在直线设出点 P 的坐标, 从而利用三角函数的定义式求解.

(2) 要清楚当 $k > 0$ 时, $P(k, -3k)$ 是第四象限的点, 角 α 的终边在第四象限; 当 $k < 0$ 时, $P(k, -3k)$ 是第二象限的点, 角 α 的终边在第二象限.

例 2: x 取什么值时, $\frac{\sin x + \cos x}{\tan x}$ 有意义?

解: 要使 $\frac{\sin x + \cos x}{\tan x}$ 有意义, 只需满足 $\tan x \neq 0$,

$$\therefore x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{又 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\therefore x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\therefore \text{当 } x \in \left\{ x \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ 时, } \frac{\sin x + \cos x}{\tan x} \text{ 有意义.}$$

导析: 式中每个三角函数值本身应有意义, 解题中这

一点不容忽视.

例 3: 若 $\sec\alpha > 0$ 且 $\csc\alpha < 0$, 则 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的符号为 _____.

解: $\because \sec\alpha > 0, \therefore \alpha$ 是第一或第四象限角.

$\because \csc\alpha < 0, \therefore \alpha$ 是第三或第四象限角.

综上所述, α 是第四象限角. 从而可知 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角.

$$\therefore \tan\frac{\alpha}{2} < 0.$$

$\therefore$ 应填负号.

导析: 由角所在象限能确定其三角函数值的符号, 反之, 由三角函数值符号也能推断角所在象限.

例 4: 已知点 $P(\sin\alpha - \cos\alpha, \tan\alpha)$ 在第一象限, 则在 $[0, 2\pi)$ 内 α 的取值范围是 _____.

$$\text{A. } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\text{B. } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\text{C. } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\text{D. } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{解: 由题意知} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha > \cos\alpha, \\ \tan\alpha > 0, \\ 0 \leq \alpha < 2\pi, \end{array} \right. \end{array}$$

由三角函数线知, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$, 故选 B.

导析: 利用三角函数线进行大小比较或解简单的三角不等式, 是一种很直观、简便的方法.



学能导航

[要点剖析]

本主题将三角函数的自变量从锐角推广到任意角, 通过平面直角坐标系对各三角函数进行了定义, 着重讨论了正弦、余弦、正切函数的定义域和这三种函数的值在各象限的符号, 并利用与单位圆有关的有向线段, 将这些函数值分别用它们的几何形式表示出来.

主题研究的问题主要有: (1) 三角函数的定义; (2) 三角函数值在各象限的符号; (3) 三角函数线.

主题的重点是三角函数的定义, 难点是三角函数线.

[方法点评]

1. 准确地理解任意角的三角函数定义, 并用其正确地回答问题. 当角 α 终边上点的坐标以参数形式给出时, 要根据问题的实际及解题的需要, 对参数进行分类讨论.

2. 三角函数值的符号与其角的终边所在象限可以互相确定.

3. 利用图形, 可直观地找出不等式(组)的解集, 体现了数形结合的思想.



A 级

一、选择题

1. 若角 600° 的终边上有一点 $(-4, a)$, 则 a 的值为 ()
A. $4\sqrt{3}$ B. $-4\sqrt{3}$
C. $\pm 4\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$
2. $\sin 2^\circ \cdot \cos 3^\circ \cdot \tan 4^\circ$ 的值 ()
A. 小于 0 B. 大于 0
C. 等于 0 D. 不存在
3. 已知 $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$ 且 $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 α 的取值范围是 ()
A. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ B. $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$
C. $(0, \frac{\pi}{4})$ D. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

二、填空题

4. 角 α 的终边经过 $P(-4k, 3k) (k < 0)$, 则 $\cos \alpha$ 的值为 _____.
5. 若 $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} > 0$, 则 θ 是第 _____ 象限角.
6. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha - 1} =$ _____.

三、解答题

7. 求函数 $y = \lg \sin x + \sqrt{\sqrt{2} \cos x - 1}$ 的定义域.
8. 已知 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 函数 $y = (\sin \theta)^{x^2 - 6x + 5}$ 的最大值为 16, 求 θ 的值.

B 级

一、选择题

1. 函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|} + \frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是 ()
A. $\{-2, 4\}$ B. $\{-2, 0, 4\}$
C. $\{-2, 0, 2, 4\}$ D. $[-4, -2, 0, 4]$
2. 若三角形的两内角 A, B , 满足 $\sin A \cdot \cos B < 0$, 则三角形的形状是 ()
A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 钝角三角形 D. 不能确定
3. 已知锐角 α 终边上一点 P 的坐标是 $(2\sin 2, -2\cos 2)$, 则 $\alpha =$ ()
A. 2 B. -2
C. $2 - \frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2} - 2$

二、填空题

4. $\cos \theta > 0, \sin 2\theta < 0$, 则 θ 角终边所在象限是 _____.
5. 若 $0 < \alpha < \pi$, 则 $10^{\sin \alpha}, \lg \sin \alpha, \sin^{10} \alpha$ 三个数的大小顺序是 _____.
6. $\lg \cos \theta = \cos \theta, \lg \tan \theta = -\tan \theta$, 则 $\frac{\theta}{2}$ 的终边在 _____.

三、解答题

7. 已知角 α 的终边上的点 P 与 $A(m, 2m) (m \neq 0)$ 关于 x 轴对称, 角 β 终边上的点 Q 与 A 关于直线 $y = x$ 对称, 求 $\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \tan \alpha \tan \beta$ 的值.
8. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 试比较 $\alpha, \sin \alpha, \tan \alpha$ 的大小.
9. 求证: $\frac{1 + \sec \alpha + \tan \alpha}{1 + \sec \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.



拓展导学

[问题探究]

通过本主题的学习,我们已经知道,三角函数线是三角函数的一种几何表示,你能否利用正弦函数线作出正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象?

[我的探究]

专家提示:关键在于弄清楚图象上点的纵坐标与正弦线的对应关系.

主题二

同角三角函数的基本关系式



主题探究

[主题情景]

前面我们学习了六种三角函数,那么它们之间有着哪些联系呢?通过本主题的学习,你找到了哪几组关系式呢?它们都有哪些运用呢?

[我的发现]

同角三角函数的基本关系式可分为三类:_____、_____、_____.



问题导探

问题 1:若 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 是第二象限的角,则 $\tan\alpha$ 的值等于 ()

A. $-\frac{4}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\pm\frac{3}{4}$

D. $\pm\frac{4}{3}$

[我的探究]

专家导言:要注意角所在的象限,正确地确定其三角函数值.

问题 2:已知 $\tan\alpha = m (m \neq 0)$, 求 $\csc\alpha$ 的值.

[我的探究]

专家导言:应先用同角关系变形,然后再以 α 的象限进行分类.

[意义建构]

平方关系

商数关系

倒数关系
