PUTONGGAODENGJIAOYU GAOJIYINGYONGXING RENCAI PEIYANGGUIHUAJIAOCAI

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

线性代数

丘兆福　胡永谟　等　编著

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

线性代数

丘兆福　胡永谟　孙洪波
林伟初　彭　雪　张娇霞　编　著
兰　星　张星红　唐炳南

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书根据教育部高等学校“线性代数教学基本要求”编写，涵盖行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换等内容，同时编入相应的数学实验．本书服务于大众化高等教育的需要，符合包括独立学院在内的大多数高等院校的办学定位和人才培养目标，着力体现教育部[2007]1号和2号文件关于教材建设“分类指导，注重特色”的要求，在考虑课程自身的系统性和科学性的基础上，突出其应用性．内容安排由浅入深，先直观、后抽象，注重基本概念、基本方法和基本运算，淡化较难的证明及烦琐的计算，加强实际运用，紧密与计算机相结合，适当引入数学实验．

根据内容取舍，本书适合大多数院校的学生用作“线性代数”课程的教材，包括独立学院的学生（学习前五章）、高职高专学生（学习前三章）和一般本科院校非数学专业的学生（学习全书）．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/丘兆福，胡永谟等编著．--上海：同济大学出版社，2008.8

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

ISBN 978-7-5608-3912-7

Ⅰ．线… Ⅱ．①丘…②胡… Ⅲ．线性代数—高等学校—教材 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 103699 号

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

线性代数

丘兆福　胡永谟 等　编著

责任编辑　曹　建　　责任校对　徐春莲　　封面设计　潘向蓁　何颂锋

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787 mm×960 mm　1/16

印　　张　11.25

印　　数　1—4 100

字　　数　225 000

版　　次　2008 年 8 月第 1 版　　2008 年 8 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-3912-7/O·320

定　　价　20.00 元

前　言

“线性代数”是普通高等院校普遍开设的一门重要数学基础课，本书根据教育部高等学校“线性代数教学基本要求”编写而成，涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换等内容，同时编入了相应的数学实验．本书的编写服务于大众化高等教育的需要，符合包括独立学院在内的大多数普通高等院校的办学定位和人才培养目标，着力体现教育部[2007]1号文件和2号文件关于教材建设“分类指导、注重特色”的要求，在考虑课程自身的系统性和科学性的基础上，突出其应用性．内容安排由浅入深，先直观、后抽象，注重基本概念、基本方法和基本运算，淡化较难的证明及烦琐的计算，加强实际运用，紧密与计算机相结合，适当引入数学实验．书中基本概念的引入，力求直观，尽量减少其抽象性，如将线性相关性融入线性方程组中，以分散其难点，让学生好学、易懂．这既是本书编写的原则和做法，也是本书的特点．

根据内容取舍，本书可供多种层次院校的学生用作教材，包括独立学院的学生(学习前五章)、高职高专学生(学习前三章)和一般本科院校非数学专业的学生(学习全书)．

本书在编者集体讨论的基础上再分工编写．林伟初、张星红(华南农业大学珠江学院)编写第1章，丘兆福(广东商学院华商学院)编写第2章，张娇霞(广东商学院华商学院)编写第3章及附录的数学实验指导，胡永谟、兰星(广东技术师范学院天河学院)编写第4章，彭雪、唐炳南(广州大学松田学院)编写第5章，孙洪波(北京理工大学珠海学院)编写第6章．

由于编者水平的局限，错漏之处在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

2008年6月

目　录

1 行列式

行列式是一种基本的数学工具，在线性代数的很多问题中，都要用行列式来进行计算，例如解线性方程组、求矩阵与向量组的秩、求矩阵的特征值等. 本章将以解线性方程组来引进二阶行列式，从而引进 n 阶行列式的概念，然后以三阶行列式为主介绍行列式的性质，此外，还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

1.1 行列式的概念与性质

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1-1}$$

将方程组(1-1-1)的第1式乘 a_{22} 减去第2式乘 a_{11} 即可消去未知数 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

用类似的方法消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得到方程组(1-1-1)的唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-1-2}$$

为了记忆方便，我们将式(1-1-2)中的分母表示为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称为二阶行列式，其值定义为

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数 $a_{ij}\,(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为上述行列式的元素，第1个下标 i 称为行标，表示

该元素位于第 i 行，第 2 个下标 j 称为列标(从左往右数)，表示该元素位于第 j 列，a_{ij} 就是表示行列式第 i 行第 j 列相交处的元素.

例 1 计算 $D=\begin{vmatrix}3 & 6\\ 5 & 4\end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix}3 & 6\\ 5 & 4\end{vmatrix}=3\times4-5\times6=-18.$

1.1.2 *n* 阶行列式的定义及展开

我们把二阶行列式的概念进行推广.类似地，式子

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

称为三阶行列式.更一般地，有

定义 1.1 式子

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{1-1-3}$$

称为 n 阶行列式.它是由 n^2 个数按一定顺序排成的 n 行 n 列的行列式.

为了介绍一般 n 阶行列式的具体含义和展开方法.先引进余子式和代数余子式的概念.

定义 1.2 在 n 阶行列式中划去 a_{ij} 元素所在的第 i 行和第 j 列的元素，剩下的元素按原次序构成 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}. a_{ij} 的余子式乘上 $(-1)^{i+j}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式为

$$M_{23}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},$$

其代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

有了余子式的概念，我们介绍一般 n 阶行列式的具体含义.

定义 1.1′ $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值定义为

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开}, i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad (\text{按第 } j \text{ 列展开}, j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中，$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 为 D 的第 i 行各元素，$A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$ 为它们对应的代数余子式，即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

我们可以按照此定义来计算行列式的值. 有人担心，按不同的行或列展开会得到不同的结果，等我们后面介绍了行列式的性质后，就可知道这种担心是多余的了.

另外，规定一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.

我们知道行列式某一元素的余子式总是比原行列式降低一阶，而二阶行列式是有明确定义的，所以，三阶行列式可以用代数余子式的概念，即可得到三阶行列式的展开规则：三阶行列式等于其任一行或者任一列各元素与其相应的代数余子式乘积之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开}, i = 1, 2, 3)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}. (\text{按第 } j \text{ 列展开}, j = 1, 2, 3)$$

例 2 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 按第一行展开得

$$D = 1 \times A_{11} + 2 \times A_{12} + 3 \times A_{13}$$
$$= 1 \times (-1)^{1+1}M_{11} + 2 \times (-1)^{1+2}M_{12} + 3 \times (-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= M_{11} - 2M_{12} + 3M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 0 - 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 5.$$

下面我们按照第 2 行展开：

$$D = -1 \times A_{21} = -1 \times (-1)^{2+1} M_{21} = M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

大家可以看到，按照不同的行展开行列式其结果是相等的，但是复杂程度不同，因为第 2 行有较多的零，所以按第 2 行展开较简便. 今后，我们通常选择含有零的个数较多的行或列展开.

类似地，利用三阶行列式又可以计算四阶行列式的值，如此等等，可计算任意阶行列式的值.

例 3 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

解 因为第 1 行有两个零，于是我们选择第 1 行展开，得

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} + a_{14}(-1)^{1+4}M_{14}$$
$$= 3M_{11} + 0 \times (-M_{12}) - 2M_{13} + 0 \times M_{14} = 3M_{11} - 2M_{13}$$
$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times (28 + 20) - 2 \times (-80 + 30 - 4)$$
$$= 144 + 108 = 252.$$

当然，此题也可以按照第 2 列或第 4 列展开，读者可以尝试. 按这种展开行列式的方法我们不难算出下面行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

这种除主对角线上的元素外，其余元素全是 0 的行列式称为**对角形行列式**.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

主对角线的左下方元素全是 0 的行列式称为**上三角形行列式**.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

类似的,主对角线的右上方元素全是零的行列式称为**下三角形行列式**.

下面我们介绍拉普拉斯(Laplace)定理,首先我们引入 k 阶子式、k 阶子式的余子式和代数余子式的定义.

定义 1.2′ 在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(k\leqslant n)$,位于这些行和列的交叉点上的 k^2 个元素按照原来次序组成一个 k 阶行列式 M,称为行列式 D 的一个 **k 阶子式**;在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来的次序组成的 $n-k$ 阶行列式 M',称为 k 阶子式 M 的**余子式**;若 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k$; $j_1, j_2, \cdots, j_k$,则在 M 的余子式 M' 前加上符号 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}$ 后称为 M 的**代数余子式**,记为 $A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M'$.

注 ① k 阶子式不是唯一的.

② $k=1$ 时,D 中每个元素都是一个一阶子式;$k=n$ 时 D 本身为一个 n 阶子式.

定理 1.1(拉普拉斯定理) 在 $n\ (n>1)$ 阶行列式中任意取定 $k\ (1\leqslant k<n)$ 行(列),由这 k 行(列)构成的一切 k 阶子式 $N_1, N_2, \cdots, N_t\ (t=C_n^k)$,与其相应的代数余子式依次为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$,则

$$D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_tA_t.$$

证明从略.

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解 由于 D 的第 1,第 4 行中只有一个二阶子式不为零,因此,取这两行,然后按拉普拉斯定理展开,得

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}(-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix}=acfh-adeh+bdeg-bcgf.$$

1.1.3 行列式的性质

将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的新行列式,称为 D 的转置行列式,记为 D^{T}. 即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad (\text{按第 } i \text{ 行展开}, i=1,2,\cdots,n) \\ D^{\mathrm{T}} &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad (\text{按第 } i \text{ 列展开}, j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

从而得证.

性质 1 说明了行列式的行和列的地位是相同的. 也就是说,对于行成立的性质,对列也成立,反之亦然. 于是,下面我们对行列式性质的证明只对行的性质进行证明,关于列的性质,留给读者自己证明.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式改变符号.

我们用 r_i 表示第 i 行,c_i 表示第 i 列. 第 i 行和第 j 行互换,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$;第 i 列和第 j 列互换,记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

证明 先证明邻行互换时行列式变号,设 D_1 是由 n 阶行列式 D 的第 i 行与第 $i+1$ 行互换得到的行列式.

$$D_1 = \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ i\text{行} \\ i+1\text{行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

把 D_1 按第 $i+1$ 行展开：

$$D_1 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+1+j}a_{ij}M_{ij} = -\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = -D.$$

设 D_2 是由 n 阶行列式 D 的第 i 行与第 j 行互换得到的行列式，不妨设 $i<j$，于是，D_2 可看成 D 的第 i 行依次经过 $j-i$ 个邻行互换后到第 j 行位置，而原第 j 行又依次经过 $j-i-1$ 邻行互换后到第 i 行位置，因此

$$D_2 = (-1)^{(j-i)+(j-i-1)}D = -D.$$

如果行列式有两行（列）完全相同，那么，交换这两行后，得到的行列式的值与原行列式的值相等，由性质 2，它们又互为相反数．于是有以下推论：

推论 1　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

证明　若第 i 行和第 j 行相同，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们将第 i 行（列）和第 j 行（列）互换，得

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 2 知 $D=-D'$，又易知 $D=D'$，从而 $D=0$.

推论 2　n 阶行列式中任一行(列)与另一行(列)元素对应代数余子式的乘积为零.

事实上，这个乘积就是表示有两行(列)完全相同的行列式的值，由推论 1，显然值为零.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式. 第 i 行(列)乘以 k，记作 kr_i(或 kc_i).

证明　若行列式 D 中第 i 行的所有元素都乘以 k，即

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由于

$$D' = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开})$$

而

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开})$$

从而 $D' = kD$.

推论 1 如果行列式某一行(列)的所有元素有公因子,则公因子可以提到行列式外面.

推论 2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

以上两个推论的证明留给读者.

性质 4 如果行列式中有一行(列)的所有元素全为零,则此行列式等于零.

事实上,按全为零元素的行展开,立即可得此行列式为零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式等于两个行列式的和,而且这两个行列式除了这一行(列)外,其余的元素与原来行列式的对应元素相同,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

事实上,$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= (a_{i1}+a'_{i1})A_{i1} + (a_{i2}+a'_{i2})A_{i2} + \cdots + (a_{in}+a'_{in})A_{in} \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开})$$

$$= (a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) + (a'_{i1}A_{i1} + a'_{i2}A_{i2} + \cdots + a'_{in}A_{in})$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

此性质表明，当某一行(列)的元素为两数之和时，行列式关于该行(列)可分解为两个行列式. 若 n 阶行列式每个元素都表示成两数之和，则它可分解成 2^n 个行列式. 例如，二阶行列式

$$
\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.
$$

性质 6 以数 k 乘行列式中某一行(列)的所有元素，然后加到另一行(列)的对应元素上，则此行列式的值不变.

数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列)，记作 $kr_i+r_j(kc_i+c_j)$.

证明 设

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},
$$

用数 k 乘第 i 行加到第 j 行，得

$$
D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$