

数字滤波器 设计及工程应用

Digital Filter Design and Applications

宋寿鹏 编著



江苏大学出版社

内容简介

数字滤波器 设计及工程应用

Digital Filter Design and Applications

宋寿鹏 编著

南京理工大学出版社

本书主要介绍数字滤波器的设计方法、工程应用及仿真。全书共分5章。第1章介绍数字滤波器的基本概念、分类及性能指标；第2章介绍数字滤波器的设计方法；第3章介绍数字滤波器的工程应用；第4章介绍数字滤波器的仿真；第5章介绍数字滤波器的工程应用。

本书可作为高等院校电子信息工程、通信工程、自动化等专业及相关专业的教材，也可供从事数字滤波器设计、工程应用及仿真的工程技术人员参考。

本书可作为高等院校电子信息工程、通信工程、自动化等专业及相关专业的教材，也可供从事数字滤波器设计、工程应用及仿真的工程技术人员参考。

本书共分5章。第1章介绍数字滤波器的基本概念、分类及性能指标；第2章介绍数字滤波器的设计方法；第3章介绍数字滤波器的工程应用；第4章介绍数字滤波器的仿真；第5章介绍数字滤波器的工程应用。

本书可作为高等院校电子信息工程、通信工程、自动化等专业及相关专业的教材，也可供从事数字滤波器设计、工程应用及仿真的工程技术人员参考。

江苏大学出版社

内容简介

本书详细介绍了数字滤波原理、数字滤波器设计与应用技术。全书共六章,包括噪声的基础知识,数字滤波器的基础知识,低通数字滤波器的设计及性能分析,高通、带通及带阻数字滤波器的设计,数字滤波器的 MATLAB 实现及应用,工程中简易滤波方法,并在附录中分别介绍了数字滤波的分析工具和常用窗函数。本书文字简明扼要,物理概念清晰,贴近工程实际,避免烦琐的数学推导,使读者能够在较短的时间内,对低通、高通、带通、带阻及多频带数字滤波器原理和设计方法有一个全面的了解。书中用 MATLAB 语言实现了每一种滤波器,程序都经过实际调试,并对实际信号进行了滤波处理,列出了部分处理结果,便于读者对其性能进行分析比较,方便对实际工程信号的滤波处理。

本书可作为相关专业本科生、研究生学习数字滤波技术的专业教材,也可作为对数字滤波技术感兴趣的科研与工程技术人员的参考用书。

本书的先修课程为高等数学、工程数学、信号与系统及数字信号处理。

图书在版编目(CIP)数据

数字滤波器设计及工程应用/宋寿鹏编著. —镇江:江苏大学出版社,2009.6

ISBN 978-7-81130-062-8

I. 数… II. 宋… III. 数字滤波器 IV. TN713

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 088732 号

数字滤波器设计及工程应用

编 著/宋寿鹏

责任编辑/徐云峰

出版发行/江苏大学出版社

地 址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编:212003)

电 话/0511-84446464

排 版/镇江文苑制版印刷有限责任公司

印 刷/丹阳市兴华印刷厂

经 销/江苏省新华书店

开 本/787 mm×1 092 mm 1/16

印 张/14

字 数/340 千字

版 次/2009 年 6 月第 1 版 2009 年 6 月第 1 次印刷

书 号/ISBN 978-7-81130-062-8

定 价/32.00 元

本书如有印装错误请与本社发行部联系调换

滤波含有过滤之意,运用于信号处理就是将信号中无用部分滤除,得到想要的部分。滤波概念的内涵非常丰富,凡是信号经过的系统,不论是硬件系统,还是算法、程序等软件系统,都会起到滤波的作用,只不过当人们把滤除信号中某些特定组成部分作为明确的追求目标时,才冠之以滤波器的称谓。滤波有多种称谓,如去噪、降噪、信号恢复、信号重构、信号分离及信号增强等。实现这些目的的技术手段和方法多种多样,它是信号处理的重要内容之一。

从信号处理的角度而言,滤波就是恢复噪声背景下的有用信号,进而对信号中有用信息进行检测与参数估计。噪声与有用信号是相对的,由于噪声的形式及规律多种多样,可以认为凡是影响或阻碍信号中有用信息提取的成分,都是噪声。

对于滤波,需要澄清一个概念,即滤波并不是将噪声完全滤除,只不过是对其进行衰减。

人们往往熟知模拟滤波器,即通过不同的电子元器件组成模拟电路,构成有源或是无源滤波器来实现滤波功能。随着计算机技术、数字电路技术和大规模集成电路技术的发展,数字滤波技术越来越受到人们的重视,这主要是因为数字滤波器具有性能可靠、精度高、设计简单、性能参数易变等特点。只要信号处理芯片的速度能够得到进一步的提高,达到或接近模拟电路的水平,数字滤波技术将取代现有的模拟滤波技术。

数字滤波技术是数字信号处理的重要内容之一,它涉及的内容非常之广,主要有经典滤波方法和现代滤波方法。经典滤波方法主要有低通、高通、带通、带阻滤波,相关滤波,限幅滤波,中值滤波,基于拉依达准则的奇异数据滤波,基于中值数绝对偏差的决策滤波,算术平均滤波,滑动平均滤波,加权滑动平均滤波,一阶滞后滤波,加权递推平均滤波,消抖滤波,限幅消抖滤波,维纳滤波及卡尔曼滤波等。现代滤波方法主要有小波滤波、自适应滤波、匹配滤波、最优滤波、卷积滤波、追踪滤波、粒子滤波、相空间滤波、信号盲分离滤波、独立分量滤波、混沌滤波、支持向量机滤波、基于人工智能信号处理的滤波及复合多项技术的滤波等。每一种滤波方法都有各自的特点和适用场合。经典滤波方法在理论上相对成熟,应用较多,许多现代滤波技术在理论上还不很完善,应用场合也有待进一步开发。

经典数字滤波器明确地将滤波器分为低通、高通、带通、带阻及多频带数字滤波器。在工程信号滤波处理中,最适用于有用信号与噪声频带可分离的场合,但实际工程信号中这种情况很少。不过,只要设计和应用得当,它们的作用可以在以下三类信号滤波中得到充分发挥:一是有用信号与噪声频带分布均已知;二是已知噪声频带,而不清楚有用信号频带;三是

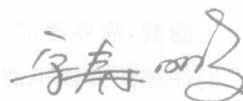
有用信号频带已知,而噪声频带未知。

对于经典滤波技术,尽管理论上较成熟,应用也非常多,但是仍有很多潜力可挖。这主要是由于工程信号和噪声种类繁多,且作用方式也不唯一。每一种信号滤波的指标、实时性各不相同,要实现它,有许多不同的原理和方法,特别是有些参数的选择会对滤波器的性能产生很大的影响。这就会出现以同样的技术指标设计出的数字滤波器性能差异较大。因此,充分了解和掌握这些滤波器的原理、设计方法、性能差异无疑会对这种滤波技术的正确使用提供帮助,为工程信号滤波提供既可靠又经济的滤波方法。

本书主要以经典滤波方法中的低通、高通、带通、带阻、多频带数字滤波器及工程中简易数字滤波器为研究对象,对其工作原理、设计方法、工程实现及性能进行较全面的分析和阐述,为其在工程信号处理中更好地应用打下基础。

本书在编写过程中得到了许多老师和学生的帮助,在此一并表示感谢。特别要感谢李萍萍教授对本书的大力支持,才使本书得以出版。感谢我的硕士研究生马晓昆同学对书稿进行了核对。本书得到国家科学技术支撑计划项目(No. 2006BAD11A03)、中国博士后基金项目(20080431070)及江苏省博士后基金项目(0701007C)的资助。

由于作者水平有限,书中错误和遗漏在所难免,恳请读者批评指正。



2009年3月

1 噪声的基础知识	
1.1 随机噪声及其统计规律	(1)
1.1.1 随机噪声的概率分布	(1)
1.1.2 噪声的统计特征	(1)
1.2 噪声的相关函数	(2)
1.2.1 噪声自相关函数	(2)
1.2.2 噪声互相关函数	(3)
1.3 噪声的功率谱密度	(3)
1.4 工程中常见的噪声	(4)
1.4.1 白噪声	(4)
1.4.2 高斯噪声	(6)
1.4.3 限带白噪声	(7)
1.4.4 窄带噪声	(8)
1.4.5 色噪声	(8)
1.5 工程中其他的噪声	(11)
1.5.1 差模噪声和共模噪声	(11)
1.5.2 分形噪声	(11)
1.5.3 椒盐噪声	(11)
1.5.4 量化噪声	(12)
1.6 噪声与信道作用方式	(12)
1.7 信噪比	(13)
1.8 噪声响应	(13)
2 数字滤波器的基础知识	
2.1 数字滤波器的传递函数	(14)
2.1.1 DF 传递函数的定义	(14)
2.1.2 DF 传递函数与单位冲激响应	(15)

2.2	数字滤波器的频率响应分析	(16)
2.3	数字滤波器的构成	(18)
2.3.1	直接构成法	(19)
2.3.2	间接构成法	(20)
2.4	数字滤波器的分类	(21)
2.4.1	按频率分布特性分类	(21)
2.4.2	按实现方式分类	(21)
2.4.3	按对冲激励响应特性分类	(22)
3	低通数字滤波器的设计及性能分析	
3.1	有限冲激响应数字滤波器和无限冲激响应数字滤波器	(23)
3.1.1	FIR DF	(23)
3.1.2	IIR DF	(24)
3.2	数字滤波器的递归与非递归实现	(25)
3.3	数字滤波器的技术要求及指标	(26)
3.4	数字滤波器设计方法概述	(28)
3.5	IIR DF 设计	(28)
3.5.1	由 AF 到 DF	(28)
3.5.2	对给定技术指标的逼近方法概述	(29)
3.5.3	巴特沃斯模拟低通滤波器设计方法	(30)
3.5.4	切比雪夫模拟低通滤波器设计方法	(36)
3.5.5	巴特沃斯与切比雪夫模拟低通滤波器性能比较	(40)
3.5.6	冲激不变法设计 IIR DF	(41)
3.5.7	双线性 z 变换法设计 IIR DF	(44)
3.6	FIR DF 设计	(49)
3.6.1	FIR DF 的线性相位特性	(50)
3.6.2	傅里叶级数法设计 FIR DF	(51)
3.6.3	频率抽样法设计 FIR DF	(54)
3.6.4	切比雪夫逼近法设计 FIR DF	(57)
3.7	IIR DF 和 FIR DF 设计比较	(61)
4	高通、带通及带阻数字滤波器的设计	
4.1	设计中符号的约定	(63)
4.2	高通、带通及带阻模拟滤波器设计	(65)
4.2.1	LP AF 到 HP AF	(65)
4.2.2	LP AF 到 BP AF	(67)
4.2.3	LP AF 到 BS AF	(70)

4.3 采用第二条途径设计高通、带通及带阻数字滤波器	(72)
4.3.1 BP DF 设计	(73)
4.3.2 其他形式 DF 设计	(74)
4.4 高通、带通及带阻数字滤波器直接设计	(75)
4.4.1 HP DF 直接设计	(76)
4.4.2 BP DF 直接设计	(77)
4.4.3 BS DF 直接设计	(79)
5 数字滤波器的 MATLAB 实现及应用	
5.1 MATLAB 简介	(80)
5.2 MATLAB 常用命令	(81)
5.3 MATLAB 使用技巧	(97)
5.4 MATLAB 信号处理常用函数	(102)
5.5 IIR 滤波器阶数估计	(105)
5.5.1 巴特沃斯滤波器阶数估计	(105)
5.5.2 切比雪夫 I 型滤波器阶数估计	(107)
5.5.3 切比雪夫 II 型滤波器阶数估计	(108)
5.5.4 椭圆滤波器阶数估计	(108)
5.6 低通原型模拟滤波器设计	(108)
5.6.1 巴特沃斯低通原型模拟滤波器设计	(108)
5.6.2 贝塞尔低通原型模拟滤波器设计	(110)
5.6.3 切比雪夫 I 型低通原型模拟滤波器设计	(111)
5.6.4 切比雪夫 II 型低通原型模拟滤波器设计	(113)
5.6.5 椭圆低通原型模拟滤波器设计	(114)
5.7 IIR DF 设计	(116)
5.7.1 经典设计法设计 IIR DF	(116)
5.7.2 直接设计法设计 IIR DF	(128)
5.7.3 最大平滑法设计 IIR DF	(129)
5.8 FIR DF 设计	(130)
5.8.1 窗函数法设计 FIR DF	(130)
5.8.2 频率采样法设计 FIR DF	(137)
5.8.3 最小二乘法设计 FIR DF	(142)
5.8.4 内插法设计 FIR DF	(143)
5.8.5 最优化法设计 FIR DF	(146)
5.8.6 升余弦法设计 FIR DF	(148)
5.9 数字滤波器的应用	(149)
5.9.1 IIR DF 的应用	(152)

5.9.2 FIR DF 的应用	(166)
6 工程中简易滤波方法	
6.1 算术平均滤波法	(174)
6.2 限幅滤波法	(178)
6.3 中值(或中位值)滤波法	(180)
6.4 滑动平均滤波法	(182)
6.5 中值平均滤波法	(185)
6.6 限幅平均滤波法	(187)
6.7 一阶滞后滤波法	(189)
6.8 加权滑动(递推)平均滤波法	(191)
6.9 消抖滤波法	(191)
6.10 限幅消抖滤波法	(191)
附录 A 数字滤波的分析工具	(193)
附录 B 常用窗函数	(200)
参考文献	(216)

1 噪声的基础知识

噪声是无处不在的,它贯穿于信号的获取、传输及处理等各个环节。噪声的存在使信号中信息的获取难度增加,严重时噪声可以完全淹没信号。噪声与信号的区分是相对的,一般来说,对观测者无用的部分就可以认为是噪声。绝大多数的噪声是随机分布的,对信号的影响有加性、乘性、加性与乘性混合及其他形式。对于非随机类噪声,比如市电产生的噪声等,相对容易抑制;对于随机噪声,分析其产生原因和统计规律是进行噪声抑制的前提。为此,充分了解和掌握噪声的特性是滤波的首要环节。

1.1 随机噪声及其统计规律

1.1.1 随机噪声的概率分布

绝大多数噪声是随机的,即噪声的量值在某一时刻可取任意值,因此一般用概率分布密度函数 $p(n)$ 来表示,简称概率密度(PDF),它反映了噪声量值 $n(t)$ 在时刻 t 取值为 n 的概率大小,即取该值的可能性大小。

同样,可以得到噪声量值在某一区间取值的可能性,即概率分布函数

$$P(n_1 \leq n \leq n_2) = \int_{n_1}^{n_2} p(n) dn \quad (1-1)$$

不同种类的噪声具有不同的概率密度函数,在工程实践中经常采用高斯正态分布来分析噪声。

1.1.2 噪声的统计特征

噪声属于随机过程,根据随机过程理论,具有代表性的统计特征有数学期望、方差和矩。

1.1.2.1 数学期望 $E[n]$

$$E[n] = \int_{-\infty}^{\infty} np(n) dn \quad (1-2)$$

在工程中,数学期望一般又称为均值,以在随机变量 n 的上方加一杠表示,如

$$\bar{n} = E[n] = \int_{-\infty}^{\infty} np(n) dn \quad (1-3)$$

对于离散随机变量 n ,均值定义为

$$\bar{n} = E[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} n_i p(n_i) \quad (1-4)$$

上述计算公式只有理论研究意义,在实际中无法应用,故在工程实践中一般采用近似方法,即取有限时间段进行计算。

对于连续随机变量, t_1, t_2 为分析连续随机变量起止时刻,如果每个随机值等概率出现,则

$$\bar{n} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} n(t) dt \quad (1-5)$$

对于离散随机变量, N_1, N_2 为离散变量起止点序号数, 则

$$\bar{n} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{i=N_1}^{N_2} n(i) \quad (1-6)$$

注: 由于上述算法是近似算法, 实际上可以看作是一种均值估计量, 所以有的参考资料上记为 $\hat{n}$ 。

1.1.2.2 方差 $D[n]$ (或记为 $\text{Var}(n)$)

方差反映随机变量与均值的偏离程度。方差愈大, 则随机变量偏离均值就愈大, 幅值振荡幅度也愈大。方差可用下式计算:

$$D[n] = \int_{-\infty}^{\infty} (n - E[n])^2 p(n) dn \quad (1-7)$$

方差与数学期望存在以下关系:

$$D[n] = E[n^2] - E^2[n] \quad (1-8)$$

用计算数学期望同样的方法, 可以得到方差的工程计算公式, 这里不再赘述。与方差相联系的统计量 $\sqrt{D[n]}$, 称为均方差或标准差。

1.1.2.3 矩

在对随机过程进行分析时, 有时会用到高阶统计量。为了与低阶统计量统一分析, 简化分析与书写过程, 使其具有更高的概括性, 提出了“矩”的概念。

m 阶原点矩

$$E[n^m] = \int_{-\infty}^{\infty} n^m p(n) dn \quad (1-9)$$

m 阶中心矩

$$E[(n - E[n])^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (n - E[n])^m p(n) dn \quad (1-10)$$

从上面的公式可以看出, 数学期望实际上是一阶原点矩, 方差是二阶中心矩。

1.2 噪声的相关函数

噪声是随机过程, 即各时刻取值是随机的, 但研究两个不同时刻的噪声有无关系, 有怎样的关系, 也是研究噪声特征的一种途径和方法。

1.2.1 噪声自相关函数

噪声自相关函数就是研究同一噪声信号在不同时刻 t_1, t_2 的相关性, 也可以近似认为是相似性。它是时域描述噪声信号特征的一种方法。定义为

$$R_n(t_1, t_2) = E[n(t_1)n(t_2)] \quad (1-11)$$

对于各态历经的平衡随机噪声, 由于统计特征量与时间起点无关, 故可以将两个不同时刻表示为 $t_1 = t, t_2 = t + \tau$, 则 $R_n(t_1, t_2) = R_n(t, t + \tau)$, 简记为 $R_n(\tau)$ 。于是, 各态历经平衡随机过程的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_n(\tau) &= E[n(t)n(t + \tau)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t)n(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (1-12)$$

由于各态历经平衡随机过程具有统计平均等于时间平均的性质,故式(1-12)比较简便,易于计算。

有时,将 $t+\tau$ 用 $t-\tau$ 来替代,即将式(1-12)中的对应项替换即可,不影响计算结果。

噪声自相关函数同样具有普通自相关函数的性质,特别当 $\tau=0$ 时,自相关函数具有最大值,且 $R_n(0)=E[n^2]$,如果 $E[n]=0$,则 $R_n(0)=D[n]=\sigma_n^2$ 。

工程中,大多数的噪声信号被近似认为是各态历经的、平稳的。

1.2.2 噪声互相关函数

与自相关函数类似,两个不同的随机噪声信号 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 在不同时刻也可能存在相关性,即某种相似性。为此,用互相关函数来描述这种相关性,其定义为

$$R_{n_1 n_2}(t_1, t_2) = E[n_1(t_1) n_2(t_2)] \quad (1-13)$$

对于各态历经的平稳随机噪声信号,其互相关函数可表示为

$$R_{n_1 n_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n_1(t) n_2(t + \tau) dt \quad (1-14)$$

关于自相关函数和互相关函数,应注意以下几点:

(1) 这两个函数都是时延 τ 的函数,即反映噪声在不同时刻的相关性。其值越大,说明这一时刻噪声间的相关性越大,反之越小。当函数值为 0 时,说明它们是不相关的。相关函数在实际使用时,有时采用归一化处理,即除以最大值,使其取值在 $[0, 1]$ 上,便于分析。

(2) 自相关函数是偶函数,即 $R_n(\tau) = R_n(-\tau)$ 。互相关函数不是偶函数,但 $R_{n_1 n_2}(\tau) = R_{n_2 n_1}(-\tau)$ 。注意: $R_{n_1 n_2}(\tau) \neq R_{n_2 n_1}(\tau)$ 。

(3) 两噪声信号互不相关,即互相关函数值为 0。统计独立的两个噪声信号必然是不相关的,但不相关的两个噪声信号不一定是统计独立的。

(4) 在工程中,对于不同的噪声源,其间可能不存在相关性,即互相关函数值为 0,因此采用互相关方法能抑制噪声。

1.3 噪声的功率谱密度

噪声功率是实际中人们主要关心的一个问题。因为噪声中包含多种频率成分,所以噪声功率谱密度也是一个重要的统计特征量。

设噪声 $n(t)$ 的功率为 P_n ,在某一频率区间 ω 与 $\omega + \Delta\omega$ 之间的功率为 ΔP_n ,则噪声的功率谱密度定义为

$$S_n(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta\omega} \quad (1-15)$$

反之,由噪声功率谱密度可求得噪声功率

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega \quad (1-16)$$

在实际中,由于面临的系统都不可能是无带限的,积分上下限一般为一个有限区间 (ω_1, ω_2) 。功率谱密度常常用相关函数的傅里叶变换来计算,即

$$S_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_n e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1-17)$$

$$S_{n_1 n_2}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{n_1 n_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1-18)$$

功率谱密度实际上反映的是噪声信号在单位频率上能量的大小,它与噪声信号的频谱有一定的区别(噪声的频谱可由其时间历程直接进行傅里叶变换求得),噪声的频谱反映的是单位频率上噪声强度(或幅值)的大小。

1.4 工程中常见的噪声

噪声是一种随机过程,其统计特征种类很多,下面分析一些常见的噪声种类及其统计特征。

1.4.1 白噪声

白噪声(White Noise)是一种常见的噪声。比如,电阻的热噪声、半导体器件通过PN结的电流散弹噪声等。白色包含了所有的颜色,因此白噪声的特点就是包含各种噪声。白噪声定义为在无限频率范围内($-\infty < \omega < \infty$)功率谱密度为常数的噪声信号,相应地也有其他色噪声的存在。白噪声功率谱密度

$$S_n(\omega) = \frac{n_0}{2} \quad (-\infty < \omega < \infty) \quad (1-19)$$

其中, n_0 为白噪声的单边功率谱密度,为一常数。若采用单边频谱,即频率在($0 < \omega < \infty$)范围内,则白噪声功率谱密度

$$S_n(\omega) = n_0 \quad (0 < \omega < \infty) \quad (1-20)$$

严格来说,白噪声是随机的,它的概念是从其功率谱密度的角度定义的,而与其分布无关,即在白噪声概念中不考虑其幅值的概率密度函数。白噪声功率谱密度如图1-1所示。

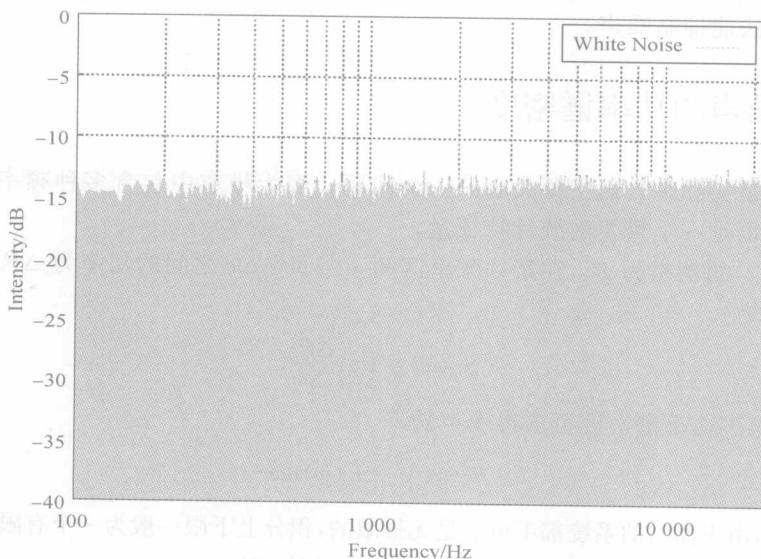


图 1-1 白噪声功率谱密度

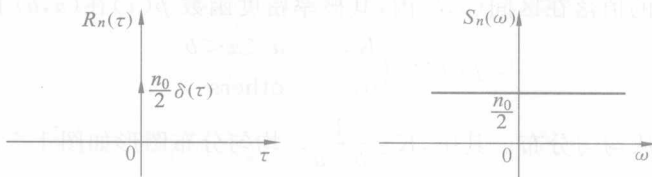
由信号相关理论可知,功率信号的功率谱与其自相关函数 $R_n(\tau)$ 是一对傅里叶变换对,即

$$S_n(\omega) \Leftrightarrow R_n(\tau) \quad (1-21)$$

白噪声的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_n(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{n_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{n_0}{2} \delta(\tau) \end{aligned} \quad (1-22)$$

由此可见,白噪声有一个显著的特征,即白噪声的自相关函数为冲击函数。它表明,白噪声在不同时刻是互不相关的,点与点之间没有任何关联。换言之,当 $\tau \neq 0$ 时, $R_n(\tau) = 0$ 。如图 1-2a 所示。



(a) 白噪声自相关函数

(b) 白噪声功率谱密度

图 1-2 白噪声的特征

实际上完全理想的白噪声是不存在的,通常只要噪声功率谱密度函数均匀分布的频率范围远远超过系统工作频率范围时,该噪声就可近似认为是白噪声。

利用白噪声的这一特性可以在工程中去噪声或从噪声中检测出微弱信号。过程如下:设检测信号 $x(t)$ 中含有加性白噪声 $n(t)$, $s(t)$ 为有用信号,即 $x(t) = s(t) + n(t)$,则检测信号的自相关函数为

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t-\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [s(t) + n(t)][s(t-\tau) + n(t-\tau)] dt \\ &= R_s(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau) + R_n(\tau) \end{aligned}$$

因信号与噪声互不相关,故 $R_{sn}(\tau) = R_{ns}(\tau) = 0$ 。又因 $n(t)$ 为白噪声,所以,在 $\tau \neq 0$ 时, $R_n(\tau) = 0$,故

$$R(\tau) = R_s(\tau) \quad (1-23)$$

由此可以看出,检测信号 $x(t)$ 的自相关函数只与有用信号 $s(t)$ 有关,而与噪声 $n(t)$ 无关,其自相关函数中包含了有用信号 $s(t)$ 的信息。这一方法可用于弱信号的检测与参数估计。

要实现上述自相关,可以利用硬件电路或算法来实现。分别如图 1-3 和图 1-4 所示。

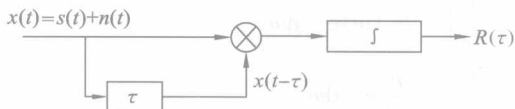


图 1-3 自相关硬件实现框图

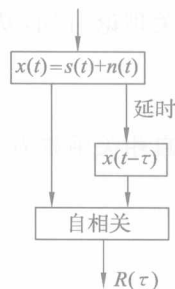


图 1-4 自相关算法流程

白噪声是按其功率谱来定义的,而不是按照其频谱定义的。这一点在初学者中易引起混淆。白噪声按其幅值概率密度函数不同,即按其分布不同,又分均匀白噪声、高斯白噪声等。

1.4.1.1 均匀白噪声

均匀白噪声是指噪声的概率密度函数满足均匀分布的统计特征,同时它的功率谱密度函数为常数的一类噪声。

设噪声变量 x 的值落在区间 (a, b) 内,其概率密度函数 $p(x)$ 在 (a, b) 上为常数 K ,即

$$p(x) = \begin{cases} K, & a < x < b \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (1-24)$$

则噪声随机变量服从均匀分布。其中, $K = \frac{1}{b-a}$ 。均匀分布图形如图 1-5 所示。

1.4.1.2 高斯白噪声

高斯白噪声是指噪声的概率密度函数满足正态分布统计特性(如图 1-6 所示),同时它的功率谱密度函数是常数的一类噪声。值得注意的是,高斯型白噪声同时涉及噪声的两个不同方面,即概率密度函数的正态分布性和功率谱密度函数的均匀性,二者缺一不可。

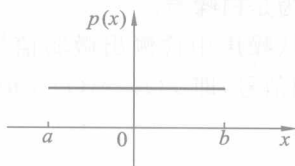


图 1-5 均匀分布概率密度函数

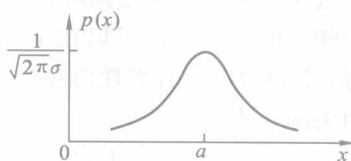


图 1-6 正态分布概率密度函数

其一维概率密度函数可用数学公式表示为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (1-25)$$

其中, a 为噪声的数学期望值,即均值; σ^2 为噪声方差。

高斯白噪声兼有白噪声和高斯噪声的特性。

1.4.2 高斯噪声

在实际中,另一种常见噪声是高斯噪声。所谓高斯噪声是指它的概率密度函数服从高斯分布(即正态分布)的一类噪声。其一维概率密度函数数学表达式如式(1-25)。

关于高斯噪声,有一个重要的结论:当噪声均值为 0 时,其平均功率等于噪声方差。证明如下:

噪声平均功率为

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\omega) d\omega \quad (1-26)$$

可知, $P_n = R(0)$ 。

噪声方差为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= D[n(t)] = E[n(t) - E(n(t))]^2 \\ &= E[n^2(t)] - [E(n(t))]^2 = R(0) - a^2 = R(0) \end{aligned} \quad (1-27)$$

故有

$$P_n = \sigma^2 = R(0) \quad (1-28)$$

在信号分析中,常常通过求自相关函数或方差的方法来计算噪声的功率。

关于高斯噪声,其概率密度函数有以下特性:

(1) $p(x)$ 对称于直线 $x=a$, 即 $p(a-x) = p(a+x)$ 。

(2) $p(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 内单调上升, 在 $(a, +\infty)$ 内单调下降, 且在 a 点处达到最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $p(x) \rightarrow 0$ 。

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$, 且有 $\int_{-\infty}^a p(x) dx = \int_a^{+\infty} p(x) dx = \frac{1}{2}$ 。

(4) a 表示分布中心, σ 表示集中的程度。对不同的 a , 表现为 $p(x)$ 的图形左右平移; 对不同的 σ , $p(x)$ 的图形将随 σ 的变化而变高或变低。

(5) 当 $a=0, \sigma=1$ 时, 相应的正态分布称为标准化正态分布, 这时有

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1.4.3 限带白噪声

限带白噪声是指白噪声经滤波器输出的噪声, 其噪声功率谱密度占据一定的带宽。设带宽为 B , 根据维纳-辛钦定理, 其自相关函数为

$$R_n(\tau) = \frac{n_0}{4\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{j\omega\tau} d\omega = n_0 B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} = n_0 B \text{sinc}(2\pi B\tau) \quad (1-29)$$

其中, $\text{sinc}(2\pi B\tau) = \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}$ 。当 $\tau=0$ 时, $R_n(0) = n_0 B$ 。

带宽 B 愈大, 噪声就愈接近理想白噪声, 当 $B \rightarrow \infty$ 时, 即为白噪声。

例如, 白噪声通过一理想低通滤波器, 则功率谱和自相关函数分别如图 1-7 所示。

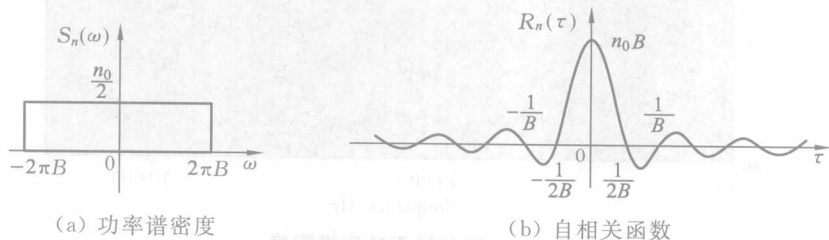


图 1-7 限带白噪声

1.4.4 窄带噪声

窄带噪声是指通过带通滤波器输出的噪声。它在通信系统中比较常见。因为,通信系统中信号传输一般有一定的带宽,在通带内要最大限度地让信号通过,并尽量抑制带外噪声。与此同时,与通带一致的噪声也会通过系统,形成窄带噪声。一般情况下,其中心频率 ω_0 远大于通带宽度 $\Delta\omega$,即 $\omega_0 \gg \Delta\omega$ 。以高斯分布为例,窄带高斯噪声的功率谱与其自相关函数是一对傅里叶变换对。

窄带高斯噪声是在中心频率 ω_0 附近的频带很窄的随机信号,可近似表示为

$$n(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (1-30)$$

其中, $A(t)$ 为噪声 $n(t)$ 的随机包络,与频率 ω_0 相比,一般较低,是一个变化缓慢的包络; $\varphi(t)$ 为噪声 $n(t)$ 的随机相位。

1.4.5 色噪声

白色包含了所有的颜色,因此白噪声就是包含所有频率成分的噪声。白噪声定义为在无限频率范围内功率密度为常数的信号,这就意味着还存在其他“颜色”的噪声。下面是常见的色噪声(Color Noise)及其定义。

1.4.5.1 粉红噪声

粉红噪声(Pink Noise)在给定的频率范围内(不含直流成分),幅值从低频向高频不断衰减,其幅度与频率成反比($1/f$)。在对数坐标中其幅度每倍频程下降 3 dB。噪声功率在每倍频程内是相等的,如 100~200 Hz 与 1 000~2 000 Hz 范围内的噪声能量是相同的。但要产生每倍频程 3 dB 的衰减非常困难,因此,没有纹波的粉红噪声在现实中很难找到。粉红噪声的频率覆盖范围很宽。粉红噪声有时也称 $1/f$ 噪声。其功率谱密度如图 1-8 所示。

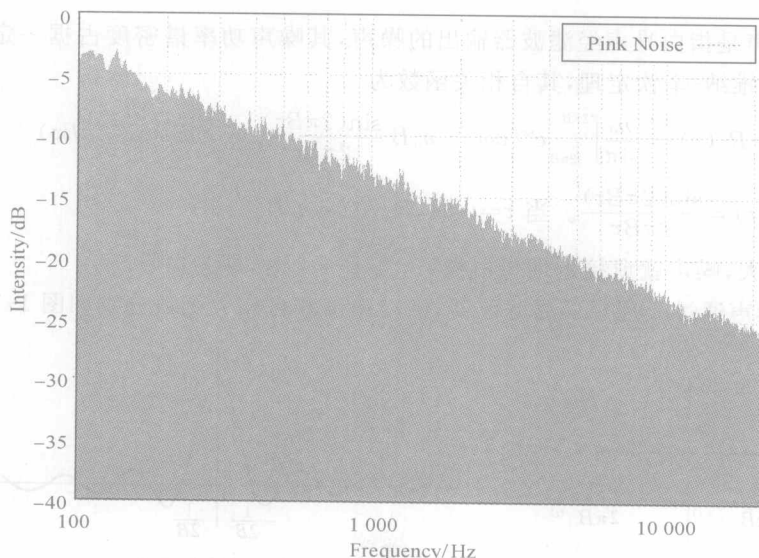


图 1-8 粉红噪声功率谱密度