（内部发行）

高考辅导参考资料

（数 学 部 分）

广东省教育局教研室编印

1978年4月

前　言

十多年来，由于林彪、"四人帮"反党集团肆虐，致使教学的参考资料极缺，有鉴于此，广州市五十七中数学科教师，以很高的热情，收集整理了历届的全国高考数学试题，并一一做了解答，汇集成册。这对于提高教学质量，辅导广大青年参加高考，都是有益处的。

这本高考辅导参考资料由中山大[illegible]华南师院数学系部分教师细加校审；许多单位和领导，对[illegible]的编印，给予了热情的关怀和有力的支持。借此[illegible]谢意。

因时间仓促，试题和[illegible]，欢迎给予批评指正。

[illegible]研室

[illegible]八年四月

目　　录

第一部分

第二部分

一 九 四 九 年（清华大学）

一、证明若$(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$为含x的整平方式，则$9p^2-14pq+9q^2=0$。并证若$(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)$为含 x 的整平方式，则$a=b=c$。

证明① $(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)=2x^2+3(p+q)x+4pq$

二次三项式 ax^2+bx+c 为完全平方式的充要条件是 $\triangle=b^2-4ac=0$

∴ 由 $9(p+q)^2-32pq=0$ 得 $9p^2-14pq+9q^2=0$

而 ② $(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)=3x^2+2(a+b+c)x+ab+ac+bc$

由 $4(a+b+c)^2-12(ab+ac+bc)=0$ 得 $4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac-4bc=0$

∴ $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$

∴ $a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$

∴ $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$， ∵$a$，$b$，$c$ 均为实数。

∴ $a-b=0$， $a-c=0$， $b-c=0$

故 $a=b=c$

注：原题应说明 a,b,c 均为实数这一点。

二、求 1 的三次根（实根及虚根）并证明任一虚根的平方等于另一虚根且：

$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n=-1$（式中 n 可为任意整数，但不是 3 的倍数）

解 令 $x^3=1$

$$\therefore\quad x=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\quad(k=0,1,2).$$

故 1 的三次根为：1，$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，

$$\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}.$$

由 *De' Movre* 定理，

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

故任一虚根等于另一虚根，

因而 1 的三次根可写为 1，ω，ω^2，其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$.

因 $$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3k+1}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3k+1}=\omega^{3k+1}+(\omega^2)^{3k+1}=\omega+\omega^2$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3k+2}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3k+2}=\omega^{3k+2}+(\omega^2)^{3k+2}=\omega^2+\omega$$

但显然，$\omega+\omega^2=1$。

故当 n 为不是 3 的倍数的整数时，

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n=-1.$$

三、(1) 求适合下列方程的比例值：

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & ① \\ 2x-3y+4z=0 & ② \end{cases}$$

解　是齐次方程组，故可消去一元而立即得其它二元之比．例如，消去 x，立即得到 $y-2z=0$　即　$y:z=2:1$；消去 y 立即得 $x-z=0$。

即　$x:z=1:1$，　由此，　$x:y:z=1:2:1$。

(2) 求下列方程组的解

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & ① \\ 2x-3y+4z=0 & ② \\ 4x^3+3y^3+z^3-xyz=216 & ③ \end{cases}$$

解　由(1)，$x=z$，$y=2z$，④　代入　③　得 $27z^3=216$。

即　$z^3=8$；　　$z^3-8=0$。

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$。

∴　$z_1=2$，　　$z_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}\,i$。　　代入④。

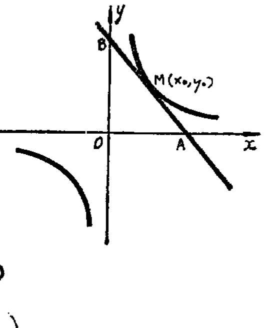
得原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=4 \\ z_1=2 \end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=-1+\sqrt{3}\,i \\ y_2=-2+2\sqrt{3}\,i \\ z_2=-1+\sqrt{3}\,i \end{cases}\qquad \begin{cases} x_3=-1-\sqrt{3}\,i \\ y_3=-2-2\sqrt{3}\,i \\ z_3=-1-\sqrt{3}\,i \end{cases}$$

四、曲线 $xy=a^2$ 上一切线与坐标轴成一个三角形，求此三角形的面积。

解　令　$M\left(x_0,\frac{a^2}{x_0}\right)$ 为 $xy=a^2$ 上的任意一点，则过此点的切线的斜率为

$$k=y'\Big|_{x=x_0}=-\frac{a^2}{x_0^{\,2}}$$



∴　过 M 点的切线方程为

$$y-\frac{a^2}{x_0}=-\frac{a^2}{x_0^{\,2}}(x-x_0)$$

可化简为　$y=-\frac{a^2}{x_0^{\,2}}x+\frac{2a^2}{x_0}$　　(1)

在(1)中　令 $y=0$，　得切线和 x 轴交点 A 的坐标为 $(2x_0,0)$

在(1)中　令 $x=0$，　得切线和 y 轴交点 B 的坐标为 $\left(0,\frac{2a^2}{x_0}\right)$

∴　$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\left|OB\right|\cdot\left|OA\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|\cdot\left|2x_0\right|=2a^2$

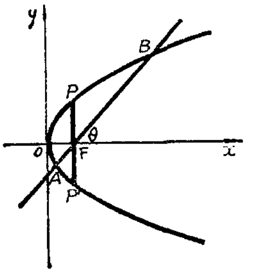
五、经过抛物线焦点的弦与抛物线的轴成θ角．证此弦在抛物线内的截线等于$L/sin^2\theta$。其中L为正焦弦的长。（经过焦点而又垂直于轴的弦称为正焦弦）

证　如图选取坐标系

如θ为直角，则此弦即为正焦弦．显然，结论是对的，故以下计算可设θ为锐角或钝角。

设抛物线方程为$y^2=2px$.

则焦点为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，正焦弦方程为$x=\frac{p}{2}$.



解联立方程　$\begin{cases} x=\frac{p}{2} \\ y^2=2px \end{cases}$

得正焦弦与抛物线的交点为$P\left(\frac{p}{2},\ p\right)$，$P'\left(\frac{p}{2},\ -p\right)$

故$L=|PP'|=2p$

设直线AB的方程为$y=(tg\theta)\left(x-\frac{p}{2}\right)$

它与抛物线的交点A、B的坐标为　$\begin{cases} y^2=2px & ① \\ y=(tg\theta)\left(x-\frac{p}{2}\right) & ② \end{cases}$　的公共解。

以下为其解法：

将②代入①，得$(tg^2\theta)\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=2px$

$$x^2(tg^2\theta)-xp(tg^2\theta+2)+\frac{p^2tg^2\theta}{4}=0$$

$$\therefore\quad x_{1,2}=\frac{p(2+tg^2\theta)\pm\sqrt{p^2(tg^2\theta+2)^2-p^2tg^4\theta}}{2tg^2\theta}$$

$$=\frac{2+tg^2\theta\pm 2sec\theta}{2tg^2\theta}p$$

即　$y_1=(tg\theta)\left(x_1-\frac{p}{2}\right)=\frac{1+sec\theta}{tg\theta}p$

$$y_2=tg\theta\left(x_2-\frac{p}{2}\right)=\frac{1-sec\theta}{tg\theta}p$$

$$|AB|=\sqrt{\left(\frac{2sec\theta}{tg^2\theta}p\right)^2+\left(\frac{2sec\theta}{tg\theta}p\right)^2}=2p.\frac{sec^2\theta}{tg^2\theta}=\frac{2p}{sin^2\theta}=\frac{L}{sin^2\theta}$$

θ为钝角时计算上与锐角时完全一样。

（因此时同样有$sec\theta>0$）

六、求证(1)　$3+4cos\theta+cos2\theta\geqslant 0$

证明　$3+4cos\theta+cos2\theta$

$$=3+4cos\theta+2cos^2\theta-1$$

$$=2(cos\theta+1)^2\geqslant 0$$

求证（2）$\dfrac{\sin(2^N x)}{2^N \sin x}=\cos x\cdot\cos 2x\cdots\cos(2^{N-1}x)$。

证　方法一　右端 $=\dfrac{2^N\sin x\cos x\cos 2x\cdots\cos(2^{N-1}x)}{2^N\sin x}$

$=\dfrac{2^{N-1}\sin 2x\cos 2x\cos 2x\cdots\cos(2^{N-1}x)}{2^N\sin x}$

$=\cdots\cdots$

$=\dfrac{\sin(2^N x)}{2^N\sin x}$

= 左端

方法二　由倍角公式，得

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$,

$\sin 2^2x=2\sin 2x\cdot\cos 2x$,

$\sin 2^3x=2\sin 2^2x\cdot\cos 2^2x$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\sin(2^{N-1}x)=2\sin(2^{N-2}x)\cdot\cos(2^{N-2}x)$,

$\sin(2^N x)=2\sin(2^{N-1}x)\cdot\cos(2^{N-1}x)$,

这 n 个等式两边相乘并约去共同因式，得

$\sin(2^N x)=2^N\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdots\cos(2^{N-1}x)$

故　$\dfrac{\sin(2^N x)}{2^N\sin x}=\cos x\cdot\cos 2x\cdots\cos(2^{N-1}x)$

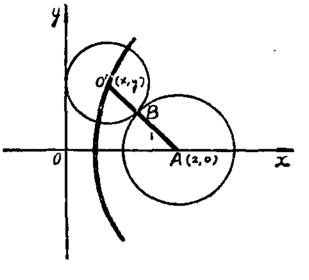
一 九 四 九 年（北京大学）

一、一动圆与 $(x-2)^2+y^2=1$ 及 y 轴皆相切．求动圆的圆心的轨迹方程。

解　定圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的圆心为 $A(2,0)$，半径为 $r=1$。

设动圆圆心为 $O'(x,y)$，

$|O'A|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$



而　$\odot O'$ 与 y 轴相切于 C。

设　$\odot O'$ 的半径为 r'，则 $r'=CO'=x$,

$|O'A|=r'+r=x+1$。

故　$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x+1$

化简得 $y^2-6x+3=0$，即为一抛物线

二、若 $kxy-8x+9y-12=0$ 表示两条直线，求 k 之值及两直线的夹角。

解　二次曲线 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

当　$\triangle=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=0$ 时表示的是退化曲线。

$$\therefore \text{由} \begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{2} & -4 \\ \frac{k}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ -4 & \frac{9}{2} & -12 \end{vmatrix} = 0$$

展开后，得$k^2-6k=0$。

$k(k-6)=0$。

$\therefore \quad k_1=0, \quad k_2=6$。

k不能为0，否则，原方程将成为二元一次方程，它只表示一条直线，而不表示两条直线了，故舍去。

当 $k=6$ 时，

由 $6xy-8x+9y-12=0$。

$(2x+3)(3y-4)=0$。

$\therefore \quad 2x+3=0, \quad 3y-4=0$。

这是两条分别与 y 轴，x 轴平行的直线。故两条直线互相垂直，夹角为90°。

三、若$A+B+C=n\pi$（n为整数）。

证明 $sin2A+sin2B+sin2C=(-1)^{n-1}4sinAsinBsinC$。

证：$\because \quad A+B+C=n\pi$。（$n$为整数）。

$\therefore \quad A+B=n\pi-C$。

今先证 $sin(n\pi-C)=(-1)^{n-1}sinC$。

事实上

若n为奇数，即$n=2k+1$，

则 $sin(n\pi-C)=sin(2k\pi+\pi-C)=sinC=(-1)^{n-1}sinC$。

若n为偶数，即$n=2k$。

则 $sin(n\pi-C)=sin(2k\pi-C)=-sinC=(-1)^{n-1}sinC$。

故 $sin2A+sin2B+sin2C=2sin(A+B)cos(A-B)+sin[2n\pi-2(A+B)]$

$=2sin(A+B)cos(A-B)-sin2(A+B)$

$=2sin(A+B)cos(A-B)-2sin(A+B)cos(A+B)$

$=2sin(A+B)[cos(A-B)-cos(A+B)]$

$=2sin(A+B)[-2sinAsin(-B)]$

$=4sin(A+B)sinAsinB$

$=4sin(n\pi-C)sinAsinB$

$=(-1)^{n-1}4sinAsinBsinC$。

四 在1、2、3、4、……99、100。这一百个数中，任选51个。证明在此51个数内恒可找到两数，其中一个为另一个的倍数。

证 设选出的51个数为a_1、a_2、a_3、……，a_{51}。每一个数 a_i 都可以写成$a_i=2^{z_i}t_i$（z_i是0或自然数）其中t_i是奇数

$\because$ 在100内具有50个奇数，因而t_i之中必有重复的，设$t_i=t_j=t(i\neq j)$

$\therefore$ $a_i=2^{zi}t$ $a_j=2^{zj}t$.

又$\because$ $a_i \doteqdot a_j$ $\therefore zi \doteqdot zj$

不妨令 $zi>zj$

则 $a_i=2^{zi}t$ 必是$a_j=2^{zj}t$的倍数

五、证明 $(x^{2^0}+1)(x^{2^1}+1)(x^{2^2}+1)\cdots\cdots(x^{2^n}+1)=\dfrac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$

证：左端乘以$(x-1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)\cdots\cdots(x^{2^n}+1)$

$$=(x^2-1)(x^2+1)\cdots\cdots(x^{2^n}+1)$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=(x^{2^n}-1)(x^{2^n}+1)$$
$$=x^{2^{n+1}}-1$$

命题得证。

六、在$\triangle ABC$的边AB、AC上各取一点D、E，且$AD=\dfrac{1}{3}AB$，$AE=\dfrac{1}{3}AC$，连接BE、CD相交于F，试证$\triangle FCB$的面积为$\triangle ABC$面积的一半。

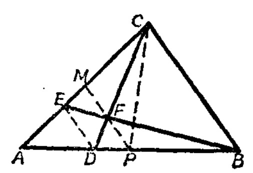
证明 方法一 连接DE，并过F作$MP\parallel CB$

$\because$ $AD=\dfrac{1}{3}AB$ $AE=\dfrac{1}{3}AC$

$\therefore$ $DE\parallel CB$（截三角形两边成比例的直线平行于三角形的第三边）

$DE=\dfrac{1}{3}BC$ $\therefore$ $EF=\dfrac{1}{3}BF=\dfrac{1}{4}BE$

又$\because$ $MP\parallel BC$ $\therefore EM=\dfrac{1}{4}CE=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}AC=\dfrac{1}{6}AC$



$\therefore$ $AM=AE+EM=\dfrac{1}{3}AC+\dfrac{1}{6}AC=\dfrac{1}{2}AC$

$\therefore$ M是AC的中点。

同理P是AB的中点。

再连接CP $\therefore S_{\triangle BCF}=S_{\triangle BCP}$（同底等高的两个三角形等积）

而 $S_{\triangle BCP}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$（三角形中线分原三角形为两个等积三角形）

$\therefore$ $S_{\triangle BCF}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

方法二：

连结DE。

$\because$ $AD=\dfrac{1}{3}AB$，$AE=\dfrac{1}{3}AC$，$\therefore DE\parallel BC$.

且 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$DE=\frac{1}{3}BC$．$\triangle DEF\backsim\triangle CBF$

∴ $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$， $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{9}S_{\triangle CBF}$．

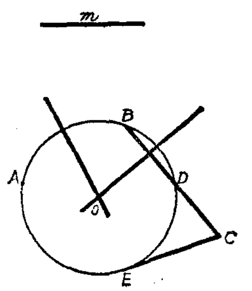
又 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$， $S_{\triangle DBC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$

但 $S_{\triangle ABE}-S_{\triangle ADE}-S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DBC}-S_{\triangle CBF}$，

∴ $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}-\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}-\frac{1}{9}S_{\triangle CBF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CBF}$．

整理得 $S_{\triangle CBF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．

七、A、B、C为三个定点，求作一个圆，通过A、B，且从C到此圆的切线等于一固定之长。



已知 A、B、C、m。

求作 $\odot O$过A、B点，且C到$\odot O$的切线长为m。

分析（略）

作法：在线段CB或其延长线上作D点，

使 $CD\cdot CB=m^2$，

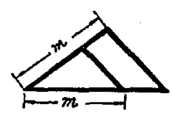
过 A、B、D三点作$\odot O$，

即为所求。

证明 作CE切$\odot O$于E

∴ $CE^2=CD\cdot CB=m^2$

∴ $CE=m$．



讨论：如$m<CB$，则D在CB上；

如$m>CB$，则D在CB的延长线上；

如$m=CB$，则D与B重合．此时作的$\odot O$应使过A、B两点，并切CB于B．

如 A、B、C在一直线上，则A、B、D亦在一直线上，此时本题无解．

如 A、B、C不在一直线上，则不论m之长短如何，本题均只有一解．

一九五〇年华北高校联合试题

甲组第一部分

（A）将下列各题正确的答案填入括号内

一、 $x^3-2x^2-2x+4=0$的一个根为2，其它两根应为（两个实根）。

（A） 二个0； （B） 一个0，一个实根；

（C） 两个实根； （D） 一实根，一虚根；

解 （E） 二虚根。

用综合除法：

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & -2 & +4 & \underline{2} \\ & 2 & +0 & -4 & \\ \hline 1 & +0 & -2 & +0 & \end{array}$$

$(x-2)(x^2-2)=0$ 除2外，尚有两个实根。

二、 已知$lgsin26°20'=9.6470-10$及$lgsin26°30'=9.6493-10$， 若 $lgsinx=9.6486-10$，则 x 的近似值为$(26°27')$。

(A) $26°23'$； (B) $26°24'$；

(C) $26°25'$； (D) $26°26'$；

(F) $26°27'$。

解

$$\begin{array}{r} \log\sin 26°30' = 9.6493-10 \\ \log\sin 26°20' = 9.6470-10 \\ \hline 10'\text{的表差} = 0.0023 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log\sin x = 9.6486-10 \\ \log\sin 26°20' = 9.6470-10 \\ \hline \text{正弦对数超过值} = 0.0016 \end{array}$$

$$0.0023 : 0.0016 = 10' : y \qquad \therefore y=\frac{10'\times 0.0016}{0.0023}=7'$$

∴ $x=26°20'+7'=26°27'$

三、 若(ρ, θ)为一点的极坐标，则$\rho=20cos\theta$的图形为(圆)。

(A) 圆； (B) 椭圆；

(C) 双曲线； (D) 抛物线；

(E) 两平行直线。

解 将$\rho=20cos\theta$两边同乘以ρ。

∴ $\rho^2=20\rho cos\theta$。 以 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho cos\theta=x$代入，

得 $x^2+y^2=20x$ 即 $(x-10)^2+y^2=10^2$。

这是一个以(10, 0)为圆心，半径 r 为10的圆。

四、$x^2+2xy+y^2+x+y-2=0$ 之图形为(二平行直线)。

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线 (E) 二平行直线

解 给出 $x^2+2xy+y^2+x+y-2=0$，

∴ $A=C=1$，$B=2$。 $B^2-4AC=2^2-4(1)(1)=0$。

∴ 为抛物线型方程，进一步地，原方程可写为

$(x+y)^2+(x+y)-2=0$ 即 $(x+y+2)(x+y-1)=0$。

这是退化的抛物线，它们表示两条∥直线 $x+y+2=0$，及$x+y-1=0$。

五、展开二项式 $(a+b)^{17}$ 之第 15 项为 $(680a^3b^{14})$。

(A) $2380a^{15}b^2$； (B) $680a^3b^{14}$； (C) $736a^{14}b^3$；

(D) $(a+b)^{15}$； (E) a^8b^7。

解 $(a+b)^{17}$ 之第 15 项为

$$T_{r+1}=c_n^ra^{n-r}b^r=T_{14+1}=c_{17}^{14}a^{17-14}b^{14}=c_{17}^3a^3b^{14}=\frac{17\cdot16\cdot15}{1\cdot2\cdot3}a^3b^{14}$$

$$=680a^3b^{14}。$$

B. 将正确的答案填在虚线上：

一、两直线 $x+y+4=0$，$5x-2y=10$ 相交锐角的正切为 $\underline{-\frac{7}{3}}$。

解　直线 $x+y+4=0$ 的斜率 $k_1=-1$。

直线 $5x-2y=10$ 的斜率 $k_2=\frac{5}{2}$。

∴　它们相交之锐角的正切为

$$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{\frac{5}{2}-(-1)}{1+\left(\frac{5}{2}\right)(-1)}=\frac{5+2}{2-5}=-\frac{7}{3}.$$

二、设 x，y 都是实数，$i=\sqrt{-1}$，且 $(x+iy)-(2+4i)=(x-iy)(1+i)$，则 $\underline{x=-8}$，$\underline{y=-2}$。

解　∵　$(x+yi)-(2+4i)=(x-yi)(1+i)$。展开后得

$(x-2)+(y-4)i=(x+y)+(x-y)i$。

比较系数　$x-2=x+y$。　$y-4=x-y$。

解之，得　$x=-8$。　$y=-2$。

三、$\begin{vmatrix} a & d & a+5d \\ b & e & b+5e \\ c & f & c+5f \end{vmatrix}=\underline{0}$。

解

$$\begin{vmatrix} a & d & a+5d \\ b & e & b+5e \\ c & f & c+5f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} a & d & d \\ b & e & e \\ c & f & f \end{vmatrix}=0+5\cdot 0=0.$$

四、已知 x 在第四象限内，而 $sin^2x=\frac{1}{9}$，则 $tg\,x$ 之值至第二位小数为 $\underline{-0.35}$。

解　∵　x 在第四象限内，　　∴　$sin\,x=-\frac{1}{3}$。

$$cos\,x=\sqrt{1-sin^2x}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$tg\,x=\frac{sin\,x}{cos\,x}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\approx-0.35$$

五、参数方程 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t(t+1) \end{cases}$ 之直角坐标方程为 $y=\underline{\frac{x^2-1}{4}}$。

解　由　$x=1+2t$。　解出　$t=\frac{x-1}{2}$。代入另一式。

$\therefore \quad y=t(t+1)=\frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2}+1\right)=\frac{x-1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x^2-1}{4}=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}.$

$\therefore$ 原参数方程的直角坐标方程为 $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}$.

甲组第二部分

一、证明 $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=(tg\,x+\sec x)^2$.

证 右 $=(tg\,x+\sec x)^2=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)^2=\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}$

$$=\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}=\frac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\text{左}.$$

$\therefore$ 原式得证

二、设方程 $x^3-5x^2+tx+s=0$，其中 t，s 为实数，已知此方程之一根为 $2-3i$，求 t，s 之值.

解 方程一根为 $2-3i$，另一根必为 $2+3i$，x^3-5x^2+tx+s 必定被 $x^2-4x+13$ 整除，而 $x^3-5x^2+tx+s=(x^2-4x+13)(x-1)+(t-17)x+(s+13)$

$\therefore$ 由 $t-17=0$，$s+13=0$，得 $t=17$，$s=-13$.

三、用数学归纳法证明公式

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

证明 1) 当 $n=1$ 时，左 $=1\cdot2=2$，右 $=\frac{1}{3}\cdot1\cdot(1+1)\cdot(1+2)=2$,

$\therefore$ 当 $n=1$ 时，原式正确.

2) 设当 $n=k$ 时，原式正确，即

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

那么，$n=k+1$ 时，有

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{3}(k+1)(k+1+1)(k+1+2)$$

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时原式也正确.

$\therefore$ 原式对一切自然数 n 都正确.

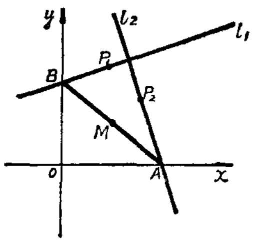
四、设 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 为二定点，过 P_1 作直线交 y 轴于 B，过 P_2 作直线与过 P_1 之直线垂直，交 x 轴于 A，求 AB 中点的轨迹。

解 设过 P_1 所作直线 l_1 的方程为

$$y-y_1=k(x-x_1),$$

那么 l_2 的方程为

$$y-y_2=-\frac{1}{k}(x-x_2),$$



由 $\begin{cases} y-y_1=k(x-x_1), \\ x=0. \end{cases}$

得B的坐标为$(0,\ y_1-kx_1)$，

由 $\begin{cases} y-y_2=-\dfrac{1}{k}(x-x_2) \\ y=0. \end{cases}$

得A的坐标为$(ky_2+x_2,\ 0)$。

$\therefore$ AB中点$M(x,\ y)$为$\left(\dfrac{ky_2+x_2}{2},\ \dfrac{y_1-kx_1}{2}\right)$，

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{ky_2+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1-kx_1}{2}. \end{cases}$$

可得

$$2x_1x+2y_1y-y_1y_2-x_1x_2=0.$$

故AB中点的轨迹为一直线。

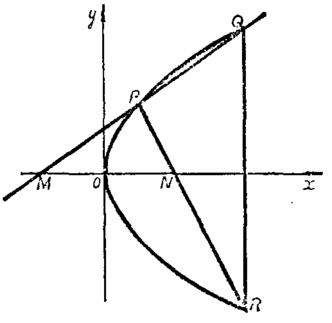
五、P为抛物线$y^2=4x$上一点，QR为抛物线上一弦并与其轴垂直。设PQ交抛物线之轴于M，PR交抛物线之轴于N，证明MN线段为抛物线之顶点平分。

证 设P点坐标为$\left(x_1,\ 2\sqrt{x_1}\right)$

Q点坐标为$\left(x_2,\ 2\sqrt{x_2}\right)$，$R$点坐标为$\left(x_2,\ -2\sqrt{x_2}\right)$。

(1) 直线PQ的方程为

$$\frac{y-2\sqrt{x_1}}{x-x_1}=\frac{2\sqrt{x_2}-2\sqrt{x_1}}{x_2-x_1},$$



与x轴（即$y=0$）之交点为

$M\left(-\sqrt{x_1x_2},\ 0\right)$。

(2) 直线PR的方程为

$$\frac{y-2\sqrt{x_1}}{x-x_1}=\frac{2\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_2}}{x_1-x_2},$$

它与x轴之交点为$N\left(\sqrt{x_1x_2},\ 0\right)$。$MN$中点的横坐标为$(0,\ 0)$

故 $(0,\ 0)$是MN的中点，即O点平分MN。

乙组丙组第一部分

(A) 将正确答案填入括号内：

一、设$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$，下列各式何者为正确：

(1) $\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b-d}$; (2) $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}$;

(3) $\frac{ad}{bc}=\frac{e}{f}$; (4) $\frac{ac}{bd}=\frac{e}{f}$;

(5) $\frac{a+c-e}{b-d+f}=\frac{e}{f}$.

$\left(\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}\right)$.

解 设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=r$

那么 $a=br$，$c=dr$，$e=fr$

$$\therefore \quad \frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{br+dr+fr}{b+d+f}=r$$

$$\frac{c+e}{d+f}=\frac{dr+fr}{d+f}=r$$

$$\therefore \quad \frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}$$

二、圆内接四边形$ABCD$内，若

$$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=1:2:3:4,$$

则A、B、C、D各角为(90°，126°，90°，54°)。

(1) 45°，135°，45°，135°； (2) 36°，72°，108°，144°；

(3) 72°，108°，72°，108°； (4) 90°，126°，90°，54°。

解 因圆心角与其所对弧成比例

$$1+2+3+4=10$$

$$\therefore \quad \overset{\frown}{AB}=360°\times\frac{1}{10}=36°，\ \overset{\frown}{BC}=360°\times\frac{2}{10}=72°$$

$$\overset{\frown}{CD}=360°\times\frac{3}{10}=108°，\ \overset{\frown}{DA}=360°\times\frac{4}{10}=144°$$

$$\overset{\frown}{AC}=36°+72°=108°，\ \overset{\frown}{BD}=72°+108°=180°$$

优 $\overset{\frown}{AC}=108°+144°=252°$

$\because$ 圆周角以其截弧之半度之.

$\therefore$ $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$的度数$=90°$，$\angle B=\frac{1}{2}$优$\overset{\frown}{CA}$的度数$=126°$

$\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$的度数$=90°$，$\angle D=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$的度数$=54°$

三、$\frac{1}{a}=\frac{1}{n}+k$，则 a 等于$\left(\frac{n}{1+nk}\right)$.

(1) $\frac{n}{1+nk}$； (2) $n-\frac{1}{k}$；

(3) $n-k$；　　(4) $n+\frac{1}{k}$；

(5) $\frac{1+nk}{n}$。

解　由 $\frac{1}{a}=\frac{1}{n}+k$。　$\therefore$ $\frac{1}{a}=\frac{1+nk}{n}$

即 $a=\frac{n}{1+nk}$。

四、若 $lg\,5.8=0.7634$，$lg\,2.19=0.3404$，则 $lg(580\times2190)$ 等于(6.1038)。

(1) 0.5770；　(2) 1.1038；

(3) 6.1038；　(4) 264.06；

(5) 416.74。

解　$log(580\times2190)=log\,580+log\,2190$

$$\begin{array}{r} log\ \ 580=2.7634 \\ log\,2190=3.3404 \\ \hline 6.1038 \end{array}\ (+$$

五、若 $sinA=\frac{2}{\sqrt{29}}$，$cosA=\frac{5}{\sqrt{29}}$，　$tgA=\frac{2}{5}$；$sinB=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$cosB=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$tgB=\frac{1}{2}$。则 $tg(A+B)$ 等于 $\left(1\frac{1}{8}\right)$。

(1) $-\frac{1}{12}$；　(2) $\frac{3}{4}$；

(3) $-\frac{1}{8}$；　(4) $1\frac{1}{8}$；

(5) $\frac{1}{8}$。

解　$$tg(A+B)=\frac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}=\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{4+5}{10-2}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}.$$

(*B*) 将正确答案填在虚线上：

1. $sin\,330°$ 之值为 $-\frac{1}{2}$。

解　(1) $sin\,330°=sin(360°-30°)=-sin\,30°=-\frac{1}{2}$。

2. x^3-4x^2+5x-2 的因子是 $(x-2)(x-1)^2$。

解　用综合除法：
$$\begin{array}{r|l} 1-4+5-2 & 1 \\ 1-3+2 & \\ \hline 1-3+2\quad 0 & \end{array}$$

$\therefore$　原式 $=(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)(x-1)(x-2)$