策　划　邓建烈
主　编　梁开华

攻克高复14道难关

【数学】

文匯出版社

攻克高复14道难关

【数学】

策　　划　邓建烈
主　　编　梁开华
参编人员　梁开华
田　平
徐　杰
马超群
高朋中
祝海峰
唐艺綝

文匯出版社

图书在版编目(CIP)数据

攻克高复14道难关. 数学 / 梁开华主编. —上海：文汇出版社，2009.7

ISBN 978-7-80741-572-5

Ⅰ.攻… Ⅱ.梁… Ⅲ.数学课—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第090329号

攻克高复14道难关——数学

主　　编 / 梁开华

责任编辑 / 竺振榕
特约编辑 / 林晓峰
封面装帧 / 郭天容

出版发行 / 文匯出版社
　　　　　上海市威海路755号
　　　　　(邮政编码200041)
经　　销 / 全国新华书店
照　　排 / 南京展望文化发展有限公司
印刷装订 / 上海市北印刷(集团)有限公司
版　　次 / 2009年7月第1版
印　　次 / 2009年7月第1次印刷
开　　本 / 787×1092　1/16
字　　数 / 505千
印　　张 / 20.25
印　　数 / 1-5000

ISBN 978-7-80741-572-5
定　　价 / 30.00元

前　言

高考复习是高中学习的一个关键时段。自恢复高考以来，为使每年一度的高考全过程更加科学化，更有利于选拔人才，以及更充分地给考生一个全面稳固所学知识，尽量展现能力才智的机会，全国及各省、各重要城市都设有考试院；区县级的教育部门，对毕业班往往都有两次模拟考试的操练。从教育学院的管理层到学校的教导处，对高考问题的研究不乏其人。高考动向确实是广大师生看不见却现实存在的指挥棒。笔者以为，从全国到各地的高考，包括复习过程，长年以来运行总体是健康的。高中阶段是极其重要的人生求学阶段，高考复习对长知识、长才干的积极作用不言而喻。怎样使高考复习更为理想化，笔者以为，作为教的一方，要解决好**方法**与**效率**问题，不能拼时间，赶进度；要有条不紊、扎扎实实，举其一争取反其三，讲究授之可渔方为上策。作为学的一方，要解决好**到位**与**及时**问题，学得不深不透等于没学；打不好基础，巩固与提高就会落空。因此，基本的、重要的、关键的、典型的知识内容与思想方法必须认知、理解、掌握到位，不清楚的地方解决应及时。人生求学时期，有四个字相当重要，这就是**勤**、**准**、**熟**、**细**。问题在于，在每一个具体环节中，落实的自觉性、持久性的效果怎样。

教学不可无书，教材以外，必要的参考读物确应开卷有益。高考复习阶段的又好又精、针对性强的参考书当然备受欢迎。**本书的特点是，以解题方法为主线，以问题解决为脉络，梳理高中阶段十四个重点难点问题，攻克可能形成的障碍与难关。**参加本书的编写人员，基本上都是长年勤勉耕耘于教学一线的骨干中坚，大半为特级教师、高级教师，多在高三把关；不乏教材、教参编写者，数学教研组长，区模拟考试命题组成员。他们既有丰富的实践经验，又有严谨的探究精

神。所选的例、习题自编、改编的占相当比重;同时又非常注重源于课本,高于课本。许多问题可谓源头活水,新颖、实在,且有很好的应用与开拓前景。

本书还特邀《中学数学》编辑部提供了3套高考最新模拟试卷。湖北是全国的数学之乡,《中学数学》是备受师生青睐的杂志。相信模拟卷能进一步为本书增色。笔者欢迎广大读者及同仁与笔者及本书参与编写人员交流、探索数学问题,如果能指出本书可能存在的欠缺与不足,更是不胜感激。本人的联系方式是:

个人网站:http://www.liangma.org

电子信箱:liangkaihua1946@126.com

梁开华

2009.3.11 于上海

目　　录

数 学 小 品

（一）浅议方法解题

解题是要讲究方法的。要使解题能力令人满意，必须克服盲目性，培养理智意识。重视方法当然十分重要。然而，应用恰当的方法解题，往往并没有形成共识。有些教师和学生，甚至越是具有不错的基础和能力者，越是易于走入一味追求方法，致使形成的方法太怪异，步入技巧性过强的误区。因此，有必要谈谈解题方法的理念、思考和选择问题。请先看一例及其解法。

题目：已知 $\alpha,\ \beta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$。求证 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$。

［分析］ 本题虽然对应于等式，但实质上是通过不等式解决问题。然而，问题的难度在于，应用的方法不易聚焦，具体解决时有说不清楚之虞。试看笔者的论证。

证明：用比较法。

由对称性，不妨设 $\alpha\geqslant\beta,\ \alpha+\beta\geqslant\dfrac{\pi}{2}$。则

$$0=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)+\sin\beta(\sin\beta-\cos\alpha)$$

$$\geqslant\sin\beta\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$=2\sin\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0。必须$$

① $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0,\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$（舍去）；或

② $\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$。

多么简明干脆呀！

在基础、能力大致定格的条件下，怎么理解应用方法解题呢？

从理念上来讲，要使解题有好方法，应该先对题目的条件和要求，有比较深刻地认知和理解。比如本例，角度是锐角，关系式与和角公式等三角比知识相关，与正、余弦的增减性相关。此外还应注意，力求把 $\alpha+\beta$ 与 $\dfrac{\pi}{2}$ 关联起来。

从思考上来讲，怎样避免方法不怪，推演简单呢？要用上不等式的知识范畴，与 0 比较往往最实惠。把 $\sin\alpha$ 或 $\sin\beta$ 化掉一个以使提取公因式，要考察的式子越规整越好。$(\sin\alpha+$

$\sin\beta) - (\cos\alpha + \cos\beta)$ 是相当清爽的。特别是全部式子可以**化积**，这将多么有利于论证。

从选择上来讲，与其对关系式化来变去，不如对关系式直接推算；与其零散结构对比，不如整体结构分析；与其考虑复杂的技巧，不如"就近下篙"，尽量用常理通法。

在现代科技上，人们常说，没有做不到的，只有想不到的；在克服困难时，人们又常说，办法总比障碍多。其实一般来说，典型题目的问题解决，往往总有相对更理想的好方法。因此，多理解，多思考，经过一定的探索，好方法就能渐渐清晰起来，浮出水面。解题总能找到相对好的方法，当然绝非一日之工。但有了追求简明、直接、大路的解题思想，渐而渐之，解题的好方法就能产生。

简单的归纳是，形成一个问题解法的理念，必须搞清楚三个方面的思考：

① 这样的解法是不是可以想到；

② 这样的解法好在哪里；

③ 这样的解法有怎样的意义和启迪。

(二) 题组研究与数学探究

先看一道编者编拟的数学题。

题目： 六根细棒搭成单位正方体，一个单位线段的两端在棱上滑动。说明线段中点形成的轨迹。

解： 很显然，线段中点到正方形最近顶点的距离为 $\frac{1}{2}$，因此，其轨迹在各个面内的图形如图 1。

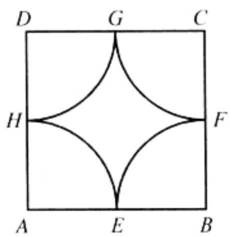


图 1

应该说，解这个题并不困难。问题在于，这样的题目有相当好的发散空间。条件(及结论)相同，试看拟成不同的命题：

1. 如图 1，以 A 为原点，AB、AD 为坐标轴，且写出这个面内轨迹的方程；

2. 如果每个面内的轨迹能被一正方形所覆盖，且求这个正方形的面积；

3. 改变面内轨迹的位置，证明它们恰能拼接成一个圆；且求这个圆的面积；

4. 画出线段中点轨迹的三视图(注意：带不带正方形的棱，还会形成图形的不同)；

5. 求线段中点轨迹围成的表面积(不含正方体的棱)；

6. 把线段中点形成的轨迹用实线搭建于正方体，如果有圆柱体还能穿过这个正方体，则这个圆柱底面半径的最大值是多少？

7. 如果一个圆恰内切于这个线段中点轨迹形成的图形。给出四个以这样的圆形成的高等于 1 的圆柱，设你想把这样的圆柱加工成什么形状，就能加工成什么形状；加工成的形体只要对接面完全吻合，就能互相粘接。请设计一种简易的加工方法，把这四个圆柱结构成"口"字形，且边长仍是 1；

8. 这个正方体截去以各定点为球心，$\frac{1}{2}$ 为半径的球体与正方体的重叠部分，求剩余几何体的体积；

9. 画出如图 3(a)所截剩余几何体的实物图。

……

这就是题组研究的组题系列。每道题都能独立给出，以适合不同的检测需求。

上述的一些问题，除了题 7、题 9 有点麻烦，其他都不难解决。关于题 7，可先考虑两个圆柱怎么拼接成“七字形”，如图 2，把两个圆柱的一端用倾角 45°的平面剖开，形成的对接截面叫做“截口”或“相贯线”(注意：截口形状是椭圆。如果圆柱是中空的，沿着母线“剪”开“摊平”，则截口呈余弦曲线形状)，所有两个圆柱的截面粘在一起即可。

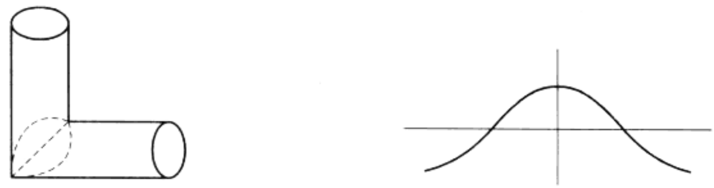
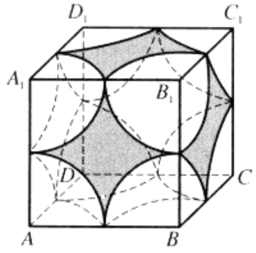
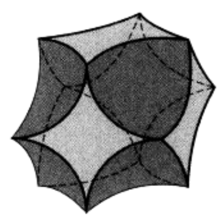


图 2

关于题 9，图 3(a)着色部分表示**正面、上面、右侧面**的轨迹可视域；图 3(b)深色部分表明点 A、B、B_1、A_1 所在点被截后凹进去的可视部分。这个图的具体形状是比较抽象的，只有通过图 3(a)一步步操作才能正确作出。如图 4，三维直角坐标系把空间分为八个部分。xOy 平面上方的四个部分从着色的部位起逆时针旋转，分别叫做**第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限**，xOy 平面的下方相同部位叫做**第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限**。如果把图 3(b)按原正方体复位于图 4 的坐标系中，第二卦限的部分顺时针旋转，第三卦限的部分逆时针旋转，使 xOy 平面上方的四个小方块在一条直线上；然后右边两个小方块一起顺时针旋转，左边两个小方块一起逆时针旋转，四个小方块合于一处，即得形态如图 5。可见题 8 要求计算的图 3(b)的体积应该是一个正



(a)



(b)

图 3

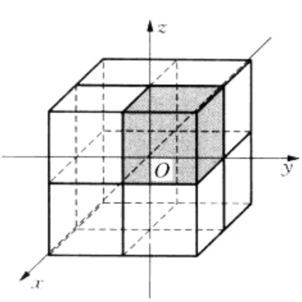


图 4

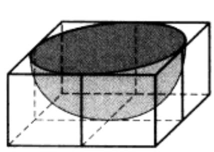


图 5

方体的体积去掉一个球的体积。题 7、题 9 及相关叙述，未必教学，但颇具趣味；弄个实物做一做，**注重实验与动手能力**的培养，不无意义。且如求相关体积等，应该是很好的题目。

由上述过程可以体会，这样题组的空间是相当充分的。也许你也能拟出几道。

我们解过一道题，往往满足于会做和做对，其中不少看似一般的题，特别是课本中的原题，往往都有探究余地。这也正是数学的魅力所在。比如这个题目，原始问题就是从长是 1 的线段两端在平面坐标轴的正方向上滑动，求线段中点的轨迹（平常到不能再平常），到加个正方形的外框，再拓展到正方体的吗？师生进行数学的教与学，就应光扬数学的探究精神。数学的题组研究，其实也折射了数学试题的设计过程。由此给我们的启示，对有着典型的、关键的、重要的、相关特点的数学问题，教学与复习时一定要重视思考其深度与广度方面的拓展与挖掘。换句话说，研究性问题的探索与实践，其实对应课题是相当丰富的。

一、不等式求解、证明问题

不等问题是客观世界最基本的存在形态，不等比相等更常见、更广泛、更普遍。不等式是高中数学最基本的工具性知识之一。对高考应考理解的定位是，每年的数学高考题不可避免地会遇到与不等式相关的问题求解或证明，当然有时还会直接表达为题目。因此，不等式的基本性质必须熟知，重要的不等式结论应该清楚，各类不等式的求解问题不能不掌握。也就是说，凡不等式的求解问题一定会做，能做出正确结果。此外，不等式的应用是更为重要的知识环节，不言而喻，求相关数学问题的(极)最值，求参变量的取值范围，是高中数学最重要的问题环节之一，这正是对不等式知识域理解与应用的检验。不等式的证明有相当多的可行方法，要求把握最基本最常用的一般方法，不必追求太特殊太技巧的方法。

学生存在较普遍的问题是，在各类不等式的求解问题中，总有些不等式问题(比如绝对值不等式)求解并未过关，尤其是准确解出最终的结果。严重之处还在于对此不够重视，易于忽略；基本不等式的掌握与应用还不够自如；不等式的证明不能很快找到理想简明的方法。这些只有通过不等式工具知识必须充分掌握到位的认知理念来解决。

(一) 怎样掌握各类不等式的解法

由于高次方程已淡出高中数学，解不等式的问题当然主要对应于变量的二次结构，二次函数及其抛物线的图像、二次不等式经常联系在一起分析讨论。解二次不等式最基本的方法：配方法，使不等式左边形成 $a(x-m)^2+k$ 的样式，是高复阶段频见不鲜的解题“操作”，配方时一般常数项不参与变换，先对二次项、一次项提取二次项系数，再配上此时 $\pm$ 一次项系数一半的平方；公式法对于不易因式分解的结构先作方程看，待解出两根，再由 $a(x-x_1)(x-x_2)$ 样式确定解。因式分解法往往是实用的解法首选。本节的方法分析先由此开始，再相继给出。

1. 因式分解法

例 1 解不等式 $4x^3-21x+10>0$。 (＊)

［分析］ 按理说，应不出现三次的问题。但也不尽然。最新的高考试题，三次函数等问题结构已不乏见，尤其是导数的引入教材；另外，高中数学也会偶尔见到类似练习。对于略施举措就能解决的问题，似应知晓而不应成为解题的拦路虎。对下面的知识环节有所了解，也许对你解题促发灵感与能力有利：

(1) 高次方程根的特点

方程的根就是对应函数图像的零点。n 个方程有且仅有 n 个复数根(其中如果有虚数根，一定共轭出现)。以四次方程为例(更高次不难类推)：

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0。$$

一般意义上的韦达定理(即根与系数的关系)是:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a_1}{a_0},\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{a_3}{a_0},\ x_1x_2x_3x_4=\frac{a_4}{a_0}。$$

整系数时,其有理根 $x_i=\frac{p}{q}$ $(i\in\mathbf{N}^*,\ p,\ q\in\mathbf{Z})$ 一定满足 p 是常数项 a_4 的因数,q 是最高项 a_0 的因数。比如(*)的有理根可能是 $\pm1,\ \pm2,\ \pm5,\ \pm10,\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{5}{4},\ \pm\frac{5}{2}$。其中 $x=2$ 是根可很快试验出来(题目一般总很简单)。

(2) 比如 $\frac{(x+2)(x-1)^3}{(x-3)}>0$ 的解

图 1-1

由 $(x-1)^2\geqslant0$ 以及 $x-3\neq0$,原不等式等价于 $(x+2)(x-1)(x-3)>0$。如图 1-1,先在序轴(只给出大小位置,不计较准确值的数轴)上标出 3 个根的位置,再在最大根的右边从 x 轴上方("龙头")画一条"龙舟"曲线穿过每一个根。则(半)封闭于 x 轴(水面)上方的就是大于 0 的解;在 x 轴下方的就是小于 0 的解。

想一想: $\frac{(x+2)(x-1)^2}{x-3}\geqslant0$ 的解呢?(等价于 $x=1$ 且 $\begin{cases}(x+2)(x-3)\geqslant0,\\ x-3\neq0。\end{cases}$)

[注意] 不能表达成 $\begin{cases}x=1,\\ (x+2)(x-3)\geqslant0,\\ x-3\neq0。\end{cases}$ 因为大括号的上、下是交集关系,左、右才是并集关系;大括号与大括号之间也是并集关系。

解: 由验根知 $x=2$ 是方程 $4x^3-21x+10=0$ 的根。

$\therefore\ 4x^2(x-2)+8x^2-21x+10=0,\ 4x^2(x-2)+(x-2)(8x-5)=0,$

$(x-2)(4x^2+8x-5)=0,\ (x-2)(2x-1)(2x+5)=0。$

$\therefore$ (*)的解是 $x\in\left(-\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)\cup(2,\ +\infty)$。

[简评] 分式不等式先由分母不等于 0 化除法为乘法改变为整式不等式。能用因式分解法的,当然比用公式法省事。

2. 分类讨论法

例 2 函数 $f(x)=(m-1)x^2-(m+2)x+4$ 的图像与 x 轴横坐标的集合 A 满足 $A\cap R^-=\varnothing$。求实数 m 的取值范围。

[分析] 与解相关的各种情况必须都讨论到。

解: ① $A=\varnothing\Rightarrow\begin{cases}m\neq1\\ (m+2)^2-16(m-1)<0\end{cases}\Rightarrow2<m<10。$

② $m=1$, $f(x)=-3x+4$, $A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$ 符合题意。

③ A 之元素为非负数但 $\neq 0$, $\therefore \begin{cases} m\neq 1 \\ \Delta\geqslant 0 \\ x_1+x_2=\dfrac{m+2}{m-1}>0 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4}{m-1}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\geqslant 10 \text{ 或 } m\leqslant 2 \\ m>1 \text{ 或 } m<-2 \\ m>1 \end{cases} \Rightarrow$

$m\geqslant 10$。或 $1<m\leqslant 2$

综合 ①、②、③, $m\in[1,+\infty)$

[简评] 注意解的正确综合。

3. 代换法

怎样代换全凭对问题结构敏锐的直觉。最通常的代换方法之一是三角代换。

例 3 (改编于 2008·江西)求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\dfrac{ax}{ax+8}}$, $x\in(0,+\infty)$, $a=8$ 时的值域及单调区间。

[分析] 注意 $a=8$, $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{3}$ 根号内的结构以及适当的三角代换以利简化。

解: $a=8$ 代入, $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{3}$。令 $x=\tan^2\alpha$, 则

$$g(\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{\sec\alpha}+\frac{1}{3}, \text{且 } \tan\alpha>0,\ \sec\alpha>0。$$

$$g(\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{1}{3}=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{3}。$$

其中 $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, α 在第一象限。

$\therefore \alpha+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, 即 $\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $\tan^2\alpha=x=1$ 时, $g(x)_{\max}=\sqrt{2}+\dfrac{1}{3}$。

且 $2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $g(\alpha)$是增函数; $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $g(\alpha)$是减函数。

即对于 $f(x)$, $x\in(0,1]$ 时, 是增函数; $x\in[1,+\infty)$ 时, 是减函数。

$x\to 0$, $f(x)\to 1\dfrac{1}{3}$; $x\to+\infty$, $\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\to 0+1$, $f(x)\to 1\dfrac{1}{3}$。

$\therefore f(x)\subseteq\left(1\dfrac{1}{3},\sqrt{2}+\dfrac{1}{3}\right]$。

[简评] 由此代换, 解法显得何其轻松。按 $f(x)$ 硬解, 别扭不顺可以想见。对函数求导的方法略。

4. 数形结合法

数形结合法就是利用已知曲线的形态或已知函数的图像的位置特点、位置变化，尤其是其中相关点的位置特点、位置变化来达到使问题顺利解决的一种有效可行的解题方法。

例 4 （改编于 2008 · 上海）若使关于 x 的方程 $x^4+ax-4=0$ 中的参变量 a 始终满足 $(-\infty,\ -6)\cup(6,\ +\infty)$，求证这个方程 $x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ k\leqslant 4,\ k\in\mathbf{N}^*)$ 所对应的点 $\left(x_i,\ \dfrac{4}{x_i}\right)$ 一定都在 $y=x$ 的同侧。

提示： 方程 $x^2+\sqrt{2}x-1=0$ 的解可视为函数 $y=x+\sqrt{2}$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$ 两图像交点的横坐标。

［分析］ 由提示揭示了明确解题的思路与方向。由此先找到**图像法**解方程的突破口，在给出相关函数草图及其位置变化的基础上，使问题较顺利地解决。

证明： 由 $x\neq 0$，对提示方程两边同除以 x，可得 $x+\sqrt{2}=\dfrac{1}{x}$。

由此，对方程 $x^4+ax-4=0$ 两边同除以 x，得 $x^3+a=\dfrac{4}{x}$。

令
$$\begin{cases} y=x^3+a, & ① \\ y=\dfrac{4}{x}。 & ② \end{cases}$$

且结合 $y=x$，先令 $a=0$，在同一坐标系中作出它们的图像（如图 1－2）。很显然，①、②的交点有且只有两个。

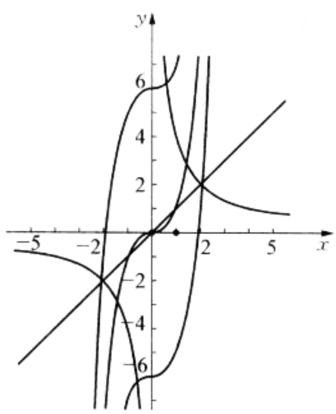


图 1－2

当 $a=6$ 时，位置在下的交点为 $(-2,\ -2)$，$\therefore a>6$ 时，即 $y=x^3+a$ 的图像继续上移，两个交点都在 $y=x$ 上方；

当 $a=-6$ 时，位置在上的交点为 $(2,\ 2)$，$\therefore a<-6$ 时，即 $y=x^3+a$ 的图像继续下移，两个交点都在 $y=x$ 下方。

$\therefore$ 当 $a\in(-\infty,\ -6)\cup(6,\ +\infty)$ 时，$\left(x_1,\ \dfrac{4}{x_1}\right)$，$\left(x_2,\ \dfrac{4}{x_2}\right)$ 都在 $y=x$ 同侧。

［简评］ ① 题目中的，或题目中与正题无关的引入部分，一定要注意往往与解题的思路与方向有关，先进行理解且应用；② 图像法解方程在方程代数解法中的地位并不低。如前已述，不等关系是大量的。能够顺利用代数解法求得方程（组）的解，其实实际情况并不多。确立图像法解方程的理念，尤其是求近似值，应该是实用的通常选择。尤其是计算机“几何画板”已可普遍使用的今天；③ 三次函数的图像应该熟知。它仅有一个拐点（即这一点的两边同为增（减）函数，但凸凹性相反）。$y=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$ 的图像，$a>0$ 时，与 $y=x^3$ 相仿；$a<0$ 时，与 $y=-x^3$ 相仿。只是一个拐点的两边可能多出两个极值点。试想如对三次函数的图像一无所知，对本例解题的感觉将会是怎样？④ 对数学问题理解的动态化意识相当

重要。

5. 基本不等式法

基本不等式 1：a，$b \in \mathbf{R}$，$a^2+b^2 \geqslant 2ab$；

$ab>0$，$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ 或 $\frac{a+b}{2} \leqslant -\sqrt{ab}$。

都在 $a=b$ 时取等号。

基本不等式 1 还可向 n 维推广。比如

a，b，$c \in \mathbf{R}^+$，$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$；

$x_i \in \mathbf{R}^+$，$i \in \mathbf{N}^*$，$i=1, 2, \cdots, n$，$\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$。

都在变量相等时取等号。

基本不等式 2：$ab>0$，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2$。$a=b=1$ 时取等号。

或 $m>0$，$m+\frac{1}{m} \geqslant 2$。$m=1$ 时取等号；$m<0$，$m+\frac{1}{m} \leqslant -2$。$m=-1$ 时取等号。

因此，p，$q>0$ 时，$x>0$，$px+\frac{q}{x} \geqslant 2\sqrt{pq}$；$x<0$，$px+\frac{q}{x} \leqslant -2\sqrt{pq}$。等号由 $px=\frac{q}{x}$，$x^2=\frac{q}{p}$ 确定。

例 5　(2008 · 全国 Ⅱ)设函数 $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；◎(2) 如果对于任何 $f(x) \leqslant ax$，求 a 的取值范围。

[分析]　对于(1)，似不及自变量直接为 x 便于讨论。由此可考虑用万能公式代换；对于(2)，如果不用求导的方法，可考虑分析 $\frac{\sin x}{x}$ 的变化特点。

解：(1) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$，则 $g(t)=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2t}{3+t^2}$。

$t=0$ 时，$g(t)=0$，即 $f(x)=0$；$t \neq 0$，$g(t)=\frac{2}{t+\frac{3}{t}}$。

$t>0$ 时，$g(t) \leqslant \frac{2}{2\sqrt{3}}$。当且仅当 $t=\frac{3}{t}$，$t=\sqrt{3}$ 时，$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{3}$。

$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k \in \mathbf{Z})$ 时，$f(x)_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

$t<0$ 时，$g(t) \geqslant -\frac{2}{2\sqrt{3}}$。当且仅当 $t=-\sqrt{3}$ 时，$\tan\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$。

$\frac{x}{2}=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$。

可见 $x\in\left[2k\pi-\frac{2\pi}{3},\ 2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$是增函数；

$x\in\left[2k\pi+\frac{2\pi}{3},\ 2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$是减函数。

$f(x)\subseteq\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$。

(2) $x=0$ 时，$a\in\mathbf{R}$；$x\neq0$ 时，$a\geqslant\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2+\cos x}$。

设 $g(x)=\frac{\sin x}{x}$，$\varphi(x)=\frac{1}{2+\cos x}$。$\varphi(x)\subseteq\left[\frac{1}{3},\ 1\right]$。

即求出 $g(x)\cdot\varphi(x)$的最大值。且仅考虑 $g(x)>0$。

如图 1－3，射线 OM、ON 交 $y=\sin x$ 于 P、S，过 P、S 作 $PQ\perp x$ 轴于 Q，$ST\perp x$ 轴于 T。x_1、x_2 分别对应于 PQ、ST。$\angle POQ=\theta_1$，$\angle SOT=\theta_2$。

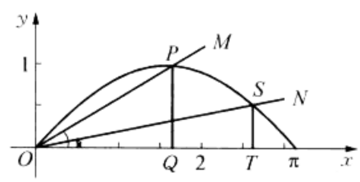


图 1－3

则 $\frac{\sin x_1}{x_1}=\tan\theta_1$，$\frac{\sin x_2}{x_2}=\tan\theta_2$。$\tan\theta$ 随角度变小而变小。即$\frac{\sin x}{x}$为减函数。

$x\to0$ 时，$\frac{\sin x}{x}\to1$；$x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{\pi}$；$x=\pi$，$\frac{\sin x}{x}=0$。又 $x\to+\infty$，$\frac{1}{x}\to0$。

对 $g(x)\cdot\varphi(x)$最大值的考察，$x\in(0,\ \pi)$ 即可说明问题。

由极限知，$0.\dot{9}=1$。$\therefore$ $g(x)_{\max}=1$；即 $x=0$，$\frac{\sin x}{x}=1$。

$x\in(0,\ \pi)$，$g(x)$下降较快，$\varphi(x)$上升较慢。不妨考察图 1－4，y_2'，y_2 关于 $y=\frac{1}{3}$ 对称，

$\therefore$ $x=0$时，$(g(x)\cdot\varphi(x))_{\max}=\frac{1}{3}$。$\therefore$ $a\geqslant\frac{1}{3}$。

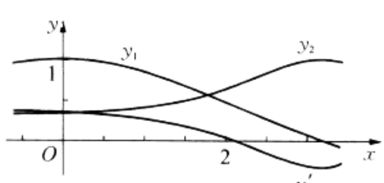


图 1－4

[简评] ① 偶函数 $y_1=\frac{\sin x}{x}$ 的图像与偶函数 $y_2=\frac{1}{2+\cos x}$ 的图像约在$\frac{9\pi}{16}$处交汇。作 y_2 关于 $y=\frac{1}{3}$ 的对称曲线 y_2'，可看得很清楚，y_1 与 y_2'之间的上下距离越接近，乘积越小。② 求导法分析(2)也很麻烦。③ 类此题号前加“◎”表示其难度已不相宜。

[拓展] 函数的极限是高等数学的知识内容，但在导数进入高中数学以后，对个别知识点的了解相当有助于有关数学题的思路启发与问题解决。比如 $x\to0$ 或 $x\to\infty$时，不难遇到分式值出现$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的结构。应用洛必达法则往往能轻松得解。这就是

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\cos x\mid_{x=0}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{1+x}}=0+1=1。$$

（二）不等式证明的主要方法分析

不等式证明的**综合法**直接由命题结构推至结论；**分析法**则反之：即先假设要证明的不等式成立，通过一系列的等价递推（即“$\Leftrightarrow$”），得到明显的或用上条件一定成立的不等式，从而表明原命题成立。不等式证明主要针对于理科。试题一旦出现，往往较有难度。但近年来，尤其是全国及各省高考，不等式证明出现频仍，不可忽视。不等式证明方法又极其丰富多彩，巧妙精到，可谓五花八门。具体怎么做，基础积累以及直感判断相当重要。

1. 构造法

例 1 已知 $a_i,\ b_i\in\mathbf{R},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。

求证 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$。

［分析］ 结构与判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 相类，由此可构造二次不等式，形成特殊判断。

证明： 构造二次函数 $f_1(x)=a_1^2x^2+2a_1b_1x+b_1^2$，$f_2(x)=a_2^2x^2+2a_2b_2x+b_2^2$，$\cdots$，$f_n(x)=a_n^2x^2+2a_nb_nx+b_n^2$，都是完全平方式。不全为 0。

$\therefore f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\geqslant 0$ 一定成立。

即 $2^2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant 0$ 一定成立。

$\therefore$ 例 1 之不等式成立。

［简评］ 这个不等式，就是著名的“柯西定理”。有趣的是，令

$$x_1=\sqrt{a_1^2},\ x_2=\sqrt{a_2^2},\ \cdots,\ x_n=\sqrt{a_n^2},\ b_1^2=\frac{1}{a_1^2},\ b_2^2=\frac{1}{a_2^2},\ \cdots,\ b_n^2=\frac{1}{a_n^2},$$

则成立 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2$。

这是相当简明且有用的。

2. 基本不等式法

例 2 已知 $a,\ b,\ c>0$，且 $a+b+c=1$。

求证(1) $\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}\geqslant 9$；(2) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant 1$。

［分析］ 争取把条件及相关可用结论用起来。

证明：(1) $\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\geqslant\frac{ab+bc+ca}{abc}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+$