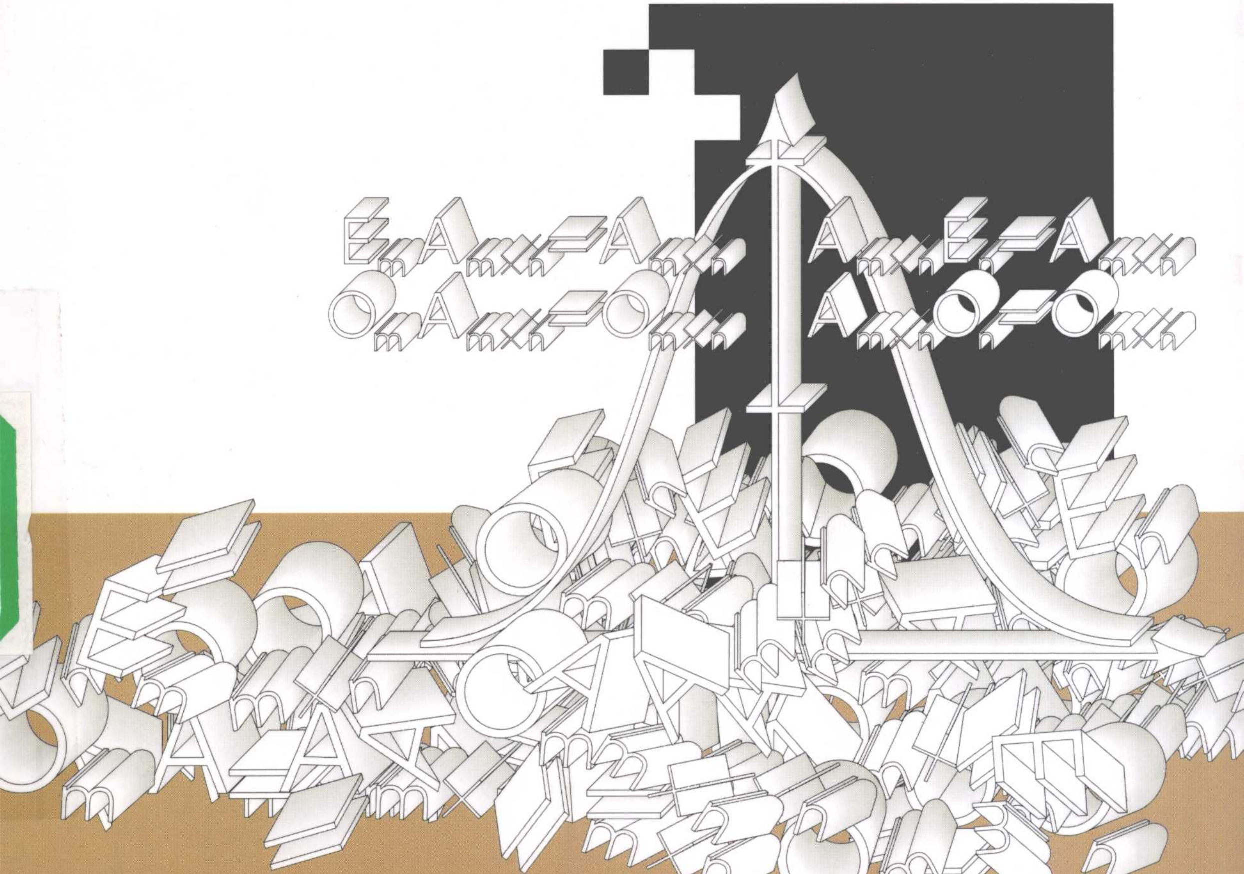
线性代数与概率论

LINEAR ALGEBRA AND PROBABILITY

主编 王国政 张现强 刘念平

西南财经大学出版社

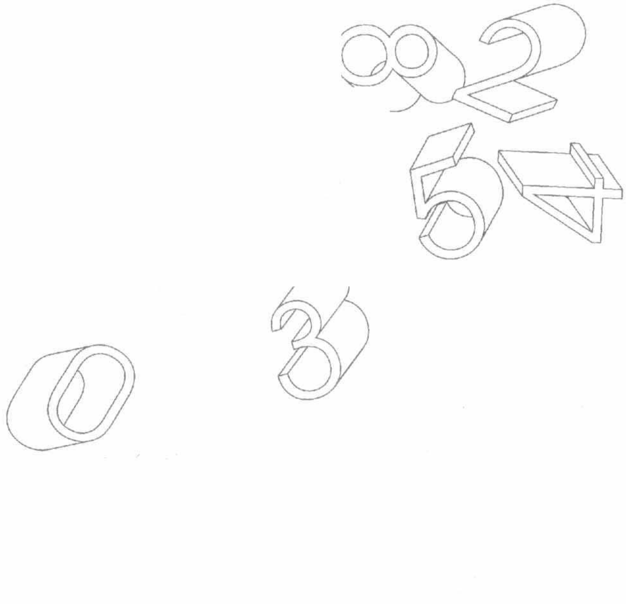


线性代数与概率论

LINEAR ALGEBRA AND PROBABILITY

主编 王国政 张现强 刘念平

西南财经大学出版社



图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率论/王国政,张现强,刘念平主编. 成都:西南财经大学出版社,2009. 1

ISBN 978-7-81138-175-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①王…②张…③刘… Ⅲ.①线性代数—高等学校:技术学校—教材②概率论—高等学校:技术学术—教材 Ⅳ.0151.2 0211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 198806 号

线性代数与概率论

主编:王国政 张现强 刘念平

责任编辑:邓克虎

封面设计:穆志坚

责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785 87352368
印　　刷:	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸:	170mm × 240mm
印　　张:	11
字　　数:	225 千字
版　　次:	2009 年 1 月第 1 版
印　　次:	2009 年 1 月第 1 次印刷
印　　数:	1— 3000 册
书　　号:	ISBN 978-7-81138-175-7
定　　价:	23.00 元

前　言

21 世纪是知识经济的时代，数学的重要性已更显突出。线性代数与概率论是高等院校本、专科各专业普遍开设的公共基础课，对理工类、经管类学生都非常重要。本书是根据教育部颁发的《经济数学基础教学大纲》编写的，浅显适中、适用性强，适合普通高等院校经济与管理类学生使用，亦可供有志学习本课程的读者选用。

数学思想是数学的灵魂，因此在介绍基本概念、基本理论、基本方法时，除了结合它们的产生背景、几何应用、经济应用给学生直观的理解之外，我们还注意从数学理论的发现、发展直至应用等多角度来讲，让数学思想贯穿始终，使学生从总体上把握对数学思维、数学语言、数学方法的宏观认识，让学生体会到数学的美妙与严谨。

本书在编写过程中，从教学实际出发，始终注意把握财经类专业对数学的需求和财经类学生的特点。教材内容上结合中外相关论著，文字叙述简明扼要、深入浅出，力求做到难度适中、结构合理、条理清晰、循序渐进。注意理论联系实际，增加了大量数学在经济等方面应用的例题、习题，以便更好地培养学生解决实际问题的能力。书中部分内容用 * 号标出，读者可根据实际进行选择性学习。

线性代数部分的内容安排上，避开了行列式这一抽象概念，直接由线性方程组系数引入矩阵概念，使线性方程组的理论与矩阵的理论前后呼应。行列式内容以附录形式给出，以供读者参考。在处理传统教学与现代技术手段方面，我们增加了与教材紧密结合的数学实验的内容，通过实验培养学生数值处理的能力。同时，应用计算机展示了数学中抽象性、严谨性的一面，培养了学生的应用能力和创新精神。

本书的编者都是长期工作在教学一线的专业老师，具有丰富的教学经验。书中线性代数部分由张现强、钱茜、武慧敏老师编写，概率统计部分由乔高秀、张艳粉、刘念平老师编写。王国政老师负责全书的策划和审稿工作。

由于编者学识有限，加上时间仓促，书中难免有疏漏与错误之处，恳请广大读者给以宝贵意见。

编者

2008 年 10 月

目 录

1 线性方程组与矩阵

线性方程组解的理论和求解方法，是线性代数的核心内容. 现实世界中的许多问题，其数学模型均可归结为对线性方程组的讨论. 矩阵既是线性代数的一个重要基本概念，也是研究线性方程组的一个非常有效的工具，同时在其他自然科学、工程技术以及经济领域中也都是一个十分重要的工具. 本章我们介绍一种求解方程组的非常实用的方法——高斯消元法，以及矩阵的概念.

1.1 线性方程组

在平面几何中，形如 $ax+by=c$(其中 a、b 不全为零)的二元一次方程表示一条直线，因此称它为关于变量 x,y 的线性方程. 在三维空间中，关于三个变量 x,y,z 的线性方程 $ax+by+cz=d$(其中 a、b、c 不全为零)对应的是一个平面. 一般地，关于 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程称为 n 元线性方程，记作 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个未知数，由 m 个 n 元线性方程构成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

称为一个 n **元线性方程组**. 方程组中，未知量的个数 n 与方程的个数 m 不一定相等. $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 称为方程组的**系数**，$b_j(j=1,2,\cdots,n)$ 称为**常数项**. 系数 a_{ij} 的第一个下标 i 表示它在第 i 个方程，第二个下标 j 表示它是第 j 个未知数 x_j 的系数.

所谓方程组(1.1)式的一个**解**就是指由 n 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 组成的有序数组$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 代入后，(1.1)式中每个等式都变成恒等式. 方程组(1.1)式的解的全体称为它的**解集合**，简称**解集**. 解方程组就是找出它全部的解，或者说求出它的解集合，这是线性代数的核心内容之一.

定义 1.1 如果一个线性方程组有解，则称其为相容的方程组，否则称为不相容的方程组.

例如，考虑下列线性方程组及其图像(如图 1-1、图 1-2、图 1-3).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

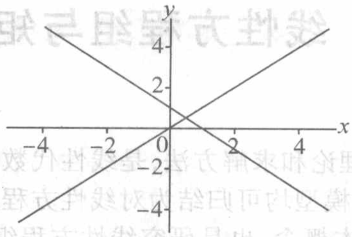


图 1－1

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

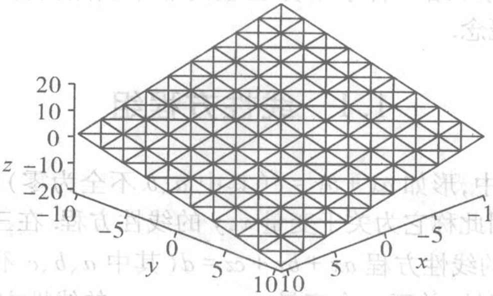


图 1－2

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

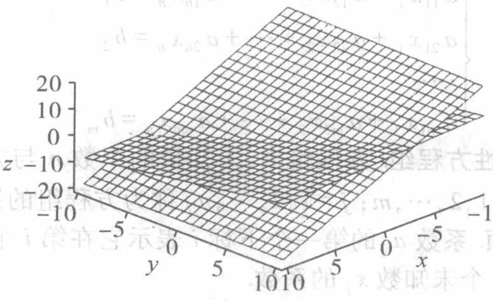


图 1－3

以上三个线性方程组都是相容的. 从图形上来看,第一个方程组对应平面上两条相交直线,交点就是此方程组的解;第二个方程组对应空间中一张平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$,此平面上每个点对应方程组的一个解;第三个方程组的解是空间中两个平面 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$ 与 $2x_1 + x_3 = 0$ 交线上的点. 显然,后面两个方程组都有无穷多个解.

而线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$$

对应平面上三条直线（见图1-4），且没有公共点，从而此方程组无解.

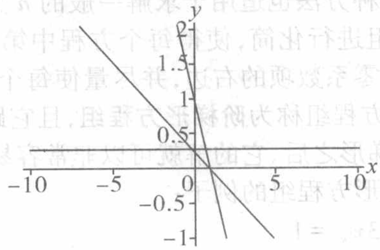


图1-4

更进一步，因为任何两条平行直线或两张平行平面均没有交点，所以形如 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 35 \end{cases}$ 的线性方程组都是不相容的.（见图1-5、图1-6）

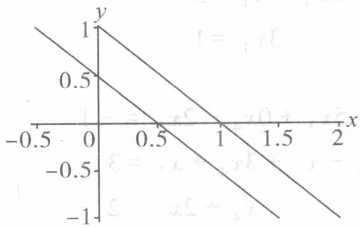


图1-5

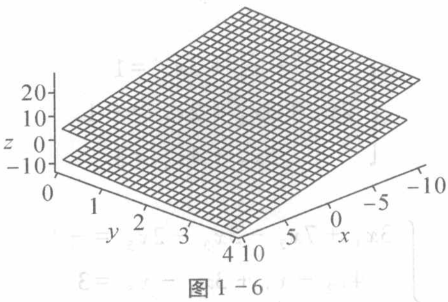


图1-6

定义 1.2 如果两个方程组有相同的解集合，则称它们为同解的方程组.

对于一般的 n 元线性方程组，我们主要解决以下两个问题：

(1)判定方程组是否有解；

(2)在有解的情况下，如何给出它的全部解.

1.2 初等变换与高斯消元法

在中学代数中,我们学过求解二元线性方程组和三元线性方程组的高斯(Gauss)消元法,这种方法也适用于求解一般的 n 元线性方程组. 利用消元法,我们可对方程组进行化简,使得每个方程中第一个非零系数项位于上一个方程第一个非零系数项的右边,并尽量使每个方程第一个非零系数为 1. 这样,化简后的方程组称为**阶梯形方程组**,且它跟原方程组是同解的. 显然,方程组化为阶梯形之后,它的解就可以非常容易地写出了.

如下是三个阶梯形方程组的例子:

1.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_3 = 3 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 7 \\ 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_4 = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 0x_4 - 2x_5 = -1 \\ 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_5 = -2 \end{cases}$$

而方程组

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 5x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 2x_5 = -1 \\ 4x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 3 \\ x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

均不是阶梯形方程组.

下面就来介绍如何用消元法求解一般的线性方程组.

例如,解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

第一个方程的 -2 倍加到第二个方程,第一个方程的 -1 倍加到第三个方程,原方程组就变成

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

再在上面方程组中,用第三个方程的 -4 倍加到第二个方程,把第二、第三两个方程的次序互换,即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_3 = -18 \end{cases}$$

此时,方程组已化为阶梯形,容易求出方程组的解为$(9, -1, -6)$.

分析一下以上的消元过程,不难看出,它实际上是反复地对方程组进行变换,而所作的变换也只是由以下三种变化所构成.

(1)互换两个方程的位置. 例如互换第 i 个方程与第 j 个方程,记作$R_i \leftrightarrow R_j$.

(2)用一个非零的常数乘某一方程. 例如第 i 个方程乘以非零常数 k,记作 kR_i.

(3)把一个方程的倍数加到另一个方程. 例如第 i 个方程的 k 倍加到第 j 个方程,记作 $R_j + kR_i$(第 i 个方程保持不变).

定义 1.3 上述变换(1)、(2)、(3)称为线性方程组的**初等变换**.

对方程组消元的过程就是反复施行初等变换的过程,而且不难验证,初等变换总是把方程组变成同解方程组.

下面我们介绍,如何利用初等变换,将一般的线性方程组化为阶梯形方程组,进而求出方程组的解.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 元线性方程组(1.1)式的未知数.

第一步:检查 x_1 的系数. 如果 x_1 的系数 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}$ 全为零,那么方程组(1.1)式对 x_1 没有任何限制,x_1 可以取任意值,而方程组(1.1)式可以看作是关于 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的方程组来求解. 如果 x_1 的系数不全为零,比如说是第 i 个方程,若 $i=1$,则不作任何变换;否则,利用变换 $R_1 \leftrightarrow R_i$,交换第 1 个方程与第 i 个方程的位置.

第二步:利用变换 kR_1 使得 x_1 的系数等于 1.

第三步:利用变换 $R_i + kR_1$, $i>1$,消去其余方程中的未知数 x_1.

第四步:保持第一个方程不变,对其余方程重复上面的变换,直至得到

一个阶梯形方程组.

第五步:从最后一个方程开始依次解出所有的未知数,得到方程组的解.

例1 求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x+y+z=4 \\ -x+y-2z=-15 \\ -2x+2y+z=-5 \end{cases}$$

分析:此方程组中的三个方程,第一个未知量 x 的系数均不为 0. 为使第一个方程中 x 的系数变为 1,我们有几种方法,可使用变换$\frac{1}{3}R_1$ 或者 R_1+R_3,为了避免出现分数,我们采用后者.

解 对原方程组使用变换 R_1+R_3,得

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ -x+y-2z=-15 \\ -2x+2y+z=-5 \end{cases}$$

对此方程组再使用变换 R_2+R_1 及 R_3+2R_1,得

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 4y=-16 \\ 8y+5z=-7 \end{cases}$$

再由变换 $R_3+(-2)R_2$,得

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 4y=-16 \\ 5z=25 \end{cases}$$

从而得到方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}$$

例2 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-6x_3+x_4=2 \\ x_1-x_2+4x_3+x_4=1 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

解 交换前两个方程的位置,即由变换 $R_1 \leftrightarrow R_2$,得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

再由变换 $R_2+(-2)R_1$ 及 R_3+R_1，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 6x_2 - 14x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

现在可由上述方程组中最后一个方程开始求解此方程组，因为最后一个方程中有两个未知数，可以让其中某一个任意未知数取值. 不妨设 $x_4 = t$，则 $3x_3+2t=1$，从而 $x_3=\frac{1}{3}(1-2t)$，代入上述方程组第二个方程可得 $x_2 = \frac{1}{18}(14-25t)$，再代回第一个方程得 $x_1=\frac{4}{9}-\frac{5}{18}t$.

从而此方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{9}-\frac{5}{18}t \\ x_2 = \frac{1}{18}(14-25t) \\ x_3 = \frac{1}{3}(1-2t) \\ x_4 = t \end{cases}$$

因为 t 可取任意值，所以此方程组有无穷多个解. 上述方程组的解 (x_1, x_2, x_3, x_4) 中，x_1, x_2, x_3 最终都由 x_4 表示出来. 任给 t（也就是 x_4）一个值就得到 x_1, x_2, x_3 的值，也就确定了方程组的一个解. 一般地，如 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 可通过 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 表示出来，这样一组表达式就称为方程组(1.1)式的**一般解**，而 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 称为一组**自由未知量**. 从而上述方程组的一般解也可以写成

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{9}-\frac{5}{18}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{18}(14-25x_4) \quad x_4 \text{ 为自由未知量} \\ x_3 = \frac{1}{3}(1-2x_4) \end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{9} - \dfrac{5}{18}x_4 \\ x_2 = \dfrac{1}{18}(14 - 25x_4) \\ x_3 = \dfrac{1}{3}(1 - 2x_4) \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

例 3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 9 \end{cases}$$

解 由变换 $R_2 + (-5)R_1$ 及 $R_3 + (-4)R_1$，得

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 6x_2 - 16x_3 = -15 \\ 6x_2 - 16x_3 = -7 \end{cases}$$

再由 $R_3 + (-1)R_2$，得

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 6x_2 - 16x_3 = -15 \\ 0 = 8 \end{cases}$$

显然，上面第三个方程是矛盾的，故原方程组无解.

例 4 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 4x_5 = 7 \end{cases}$$

解 由变换 $R_2 + (-2)R_1$、$R_3 + R_1$ 及 $R_4 - R_1$，得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ -3x_3 + 6x_4 - 4x_5 = -1 \\ 3x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 7 \\ 3x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases}$$

再由变换 $R_3 + R_2$ 及 $R_4 + R_2$，得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ -3x_3 + 6x_4 - 4x_5 = -1 \\ -2x_5 = 6 \\ -x_5 = 3 \end{cases}$$

再化简为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ \qquad\quad - 3x_3 + 6x_4 - 4x_5 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_5 = -3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

去掉最后一个方程 0 = 0，把 x_2, x_4 移到等式右边，得

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 3 - 2x_2 + 2x_4 \\ \quad 3x_3 + 4x_5 = 1 + 6x_4 \\ \qquad\qquad x_5 = -3 \end{cases}$$

求得一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{3} - 2x_2 \\ x_3 = \dfrac{1}{3}3 + 2x_4 \\ x_5 = -3 \end{cases}$$，其中 x_2, x_4 为自由未知量

下面来总结一下阶梯形方程组解的情况.

把阶梯形方程组中后面“0 = 0”的方程（如果有的话）去掉，剩余的方程可能有以下两种情况：

（1）最后一个方程是 0 = c（非零常数），此时方程组无解. 如例 3.

（2）最后一个方程左边不等于 0，那么方程组有解，此时又可分成两种情形. 设阶梯形方程组有 r 个系数不全等于 0 的方程.

如果 r = n，则方程组有唯一解. 如例 1.

如果 r < n，则方程组有无穷多解. 如例 2、例 4.

1.3 齐次线性方程组

定义 1.4 如果线性方程组（1.1）式中的常数项 $b_j(j=1,2,\cdots,m)$ 均为零，则此方程组称为**齐次线性方程组**.

n 元齐次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

显然，任何 n 元齐次线性方程组必有解 $(0,0,\cdots,0)$，称为该方程组的**零解**，即未知数全取零值的解. 相应地，未知数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零的解，称为**非零解**. 因此，对齐次线性方程组而言，需要讨论的问题不是有

没有解,而是有没有非零解. 这个问题与齐次线性方程组解的个数也是密切相关的. 如果一个齐次线性方程组只有零解,那么这个方程组就有唯一解;反之,如果某个齐次方程组有唯一解,由于零解是一个解,那么这个方程组就不可能有非零解. 事实上,齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是这个方程组有无穷多解. 特别在平面或空间几何中,齐次线性方程组表示的就是通过原点的一组直线或一组平面.

例 1 求解二元齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

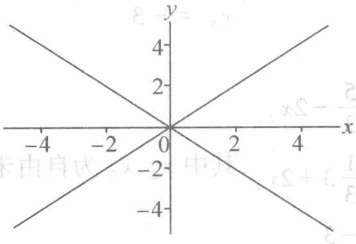


图 1-7

解 由变换 $R_2 + (-1)R_1$,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

因而,此方程组的解为(0,0).

此方程组只有零解,没有非零解,从图 1-7 上也可看出来.

例 2 求解三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

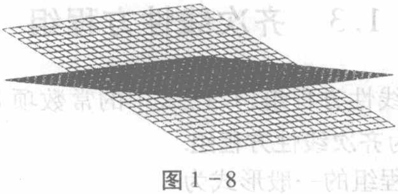


图 1-8

解 由变换 $R_2 + (-1)R_1$,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

显然,此方程组有无穷多个解. 令 $x_1 = t$,则此方程组的解可表示为$(t,0,t)$,其中 t 为任意实数. 从图 1-8 上看,此方程组的解对应两平面的交线.

上述齐次线性方程组有无穷多个解,那么这些解之间有什么关系呢?以方程组为例来看一下.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0 \end{cases}$$

设 $x_1 = c_1, x_2 = c_2$ 与 $x_1 = d_1, x_2 = d_2$ 为此方程组的两个解，则不难验证以下性质：

(1) 两个解的和，即 $x_1 = c_1 + d_1, x_2 = c_2 + d_2$ 仍为此方程组的解；

(2) 任一个解的倍数也是方程组的解，即 $x_1 = kc_1, x_2 = kc_2$（其中 k 为任意实数）也是方程组的解.

例 3 当 c 取何值时，齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ cx_1 + x_2 = 0 \end{cases}$有非零解？

从几何角度来讲，此题也就是问当 c 取何值时，方程所表示直线有除原点之外的其他交点. 考虑到如果两条直线有两个公共点，那么它们一定重合，此题便可迎刃而解.

解 首先由第一个方程得

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1$$

第二个方程也可写成

$$x_2 = -cx_1$$

从而

$$-\frac{2}{3}x_1 = -cx_1$$

所以，$x_1 = 0$ 或 $c = \frac{2}{3}$，且 $c \neq \frac{2}{3}$ 时，$x_1 = 0$.

因此，要使原方程组有非零解，只有 $c = \frac{2}{3}$.

下面再给出齐次线性方程组有非零解的一个条件.

定理 1.1 对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

如果 $m < n$，那么它必有非零解.

证明 显然，此方程组在化成阶梯形方程组之后，方程的个数 r 不会超过原方程组中方程的个数，即 $r \leqslant m < n$.

由 $r < n$ 得知，它的解不是唯一的，因而必有非零解.

此定理并没有给出 $m \geqslant n$ 时有非零解的条件. 一般来说，当 $m \geqslant n$ 时，以上的齐次线性方程组的非零解可能存在，也可能不存在.