○ 高等学校教材

概率论与数理统计

○ 徐 伟 师义民 秦超英 孙 浩

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论与数理统计

徐 伟 师义民 秦超英 孙 浩

高等教育出版社

内容简介

本书共分 11 章，前 4 章介绍了概率论的基本内容，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征和极限定理。接下来的 4 章介绍了数理统计的基本内容，主要介绍了数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验和方差分析与回归分析。第 9 章和第 10 章介绍了随机过程的相关内容，主要包括随机过程及其分类，平稳过程。最后一章介绍了常用统计软件及其应用。各章均配有习题，书后给出了习题答案和附表。

本书可作为高等学校工科本科学生概率论与数理统计课程的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论与数理统计/徐伟等. — 北京: 高等教育出版社, 2008. 10

ISBN 978-7-04-024898-2

I. 概··· Ⅱ. 徐··· Ⅲ. ① 概率论 - 高等学校 - 教材 ② 数理统计 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 140398 号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 丁鹤龄 **封面设计** 张志奇
责任绘图 黄建英 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 杨雪莲
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京鑫海金澳胶印有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787 × 960 1/16	版 次	2008 年 10 月第 1 版
印 张	21.25	印 次	2008 年 10 月第 1 次印刷
字 数	390 000	定 价	26.60 元

物料号 24898 - 00

前　言

随着科学技术的发展，概率论与数理统计得到了越来越广泛的应用，已成为高等学校大部分专业必修的一门基础课。通过本课程的学习，要使学生掌握研究随机现象的基本思想和方法，并且具备一定的分析问题和解决问题的能力。

本书是根据教育部“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并考虑到 21 世纪教学改革和实际教学的需要，本着注重学生能力的培养，精选教材内容，适当增加知识面，几经修改而编写成的。本教材以介绍概率论、数理统计以及随机过程的基本知识和方法为主，同时注意它的直观背景和实际意义，力求做到理论与实际相结合，为读者进行理论研究和实际应用打下扎实的基础。

在编写过程中，考虑到随机数学的特点，力求做到深入浅出，易懂易学。全书由 11 章组成：第 1 章至第 4 章是概率论的基础知识；第 5 章至第 8 章是数理统计基本内容；第 9 章至第 10 章是随机过程初步；第 11 章是常用统计软件及其应用。每章之后配有一定数量的习题，学生可以在教师的指导下选做，以帮助学生加深对所学知识的理解，提高学习能力。

本书的编写得到了我系广大师生的帮助，编写者均为从事概率论与数理统计教学 10 余年的教师。书中第 1 章、第 2 章和第 10 章由徐伟编写；第 3 章、第 7 章和第 8 章由师义民编写；第 4 章、第 5 章和第 6 章由秦超英编写；第 9 章和第 11 章由孙浩编写。周小莉、刘华平、肖华勇和唐亚宁参加了部分工作和习题编写。全书由徐伟统稿和定稿。

限于编者的经验和水平，书中不足之处恳请读者指正。

编　者

2008 年 6 月于西安市西北工业大学

目 录

第 1 章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件的概念

在自然界和人类的活动中, 经常遇到各种各样的现象, 这些现象大体可以分为两类: 必然现象和随机现象. 必然现象指在一定条件下可以准确预言结果的现象, 这类现象亦称为确定性现象或非随机现象. 在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为随机现象. 随机现象又有个别随机现象和大量性随机现象之分. 大量性随机现象所具有的规律性称为统计规律, 概率论和数理统计研究的就是这种规律. 所谓大量性随机现象是指在相同的条件下可以重复出现的随机现象, 如掷硬币, 观察某交通要道早晨 7:30~8:30 时段内的交通流量等, 都可以在相同的条件下重复进行. 有些随机现象则不然, 尽管它们的发生带有偶然性, 但原则上不能在相同的条件下重复出现, 称这样的现象为个别随机现象.

概率论和数理统计是研究大量随机现象的统计规律性的学科. 概率论的特点是先提出数学模型, 然后去研究其性质、特点和规律; 数理统计则是以概率论的理论为基础, 利用对随机现象的观测所取得的数据, 来研究数学模型, 在此基础上做出推断.

对随机现象的观测总是在一定条件下进行的, 若把一次观测视为一次试验, 观测的结果就是试验结果, 概率论中把满足下列两个条件的试验称为随机试验:

(1) 允许在相同的条件下重复进行;

(2) 试验结果具有随机性, 即结果不一定相同, 事先不知道出现哪个结果.

本书以后所指的试验如无特别声明, 均指随机试验. 例如:

(1) 在一定条件下进行射击, 考虑命中的环数;

(2) 掷一颗均匀的骰子, 考虑出现的点数;

(3) 记录某电话交换台某时段内接到的电话呼唤次数.

我们把随机现象的表现, 即随机试验的结果数学模型化, 可用集合的概念描述. 例如, 在掷硬币试验中, 试验结果有两个: “正面”, “反面”, 如果用 ω_1 表示结果为正面, ω_2 表示结果为反面, 则可以用 $A_1=\{\omega_1\}, A_2=\{\omega_2\}$ 来表示试验结果. A_1 是一个仅含一个元素 ω_1 的集合, A_2 是一个仅含另一个元素 ω_2 的集合; 再考虑掷骰子, 若以 ω_i 表示出现点数为 $i, i=1,2,\cdots,6$, 则 $A_i=\{\omega_i\}$ 可以表示出现点数为 i 的结果, $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}, B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ 可以分别表示试验结果为奇

数和偶数. 如果把随机试验的结果叫做随机事件, 则对随机事件给出如下定义.

定义 1.1　对于随机试验, 把每一个可能的结果称为**样本点**, 把某些样本点构成的集合称为**随机事件**, 简称**事件**. 把单个样本点构成的集合称为**基本事件**, 把所有样本点构成的集合称为**必然事件**或称为**样本空间**, 记为 Ω.

为了以后运算封闭, 规定不含任何元素的空集也为事件, 称为不可能事件, 记为 $\varnothing$.

例 1.1　写出掷骰子试验的样本点, 样本空间, 基本事件, 事件 A—— 出现偶数, 事件 B—— 出现奇数.

解　ω_i—— 掷骰子出现点数为 $i, i=1,\cdots,6; \Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$; 基本事件 $A_i=\{\omega_i\}, i=1,2,\cdots,6; A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}; B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$.

§1.2　事件的关系和运算

在概率论中, 往往不仅研究随机试验的一个事件, 还要研究很多事件, 而这些事件之间又有一定的联系, 为了表述这些事件之间的联系. 下面定义事件之间的各种关系和运算.

(1) 事件的包含和相等: 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 称 "事件 B **包含**事件 A", 记作 $A \subset B$. 这里 A"发生" 一词是指, A 所含的任一样本点出现, 例如掷骰子, 称事件 A—— 出现偶数发生, 指在一次观测 (一次投掷) 中, 出现点数为 2 或 4 或 6.

如果事件 B 包含事件 A, 同时事件 A 包含事件 B, 则称事件 A 与事件 B **相等**, 记作 $A=B$. 显然对任一事件 A, 有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

事件 A 包含事件 B, 即 $A \supset B$, 亦称为 B 是 A 的子事件.

(2) 事件的和 (并): "二事件 A, B 至少发生一个" 也是一个事件, 称为 A 与 B 的**和** (或并), 记作 $A \bigcup B$. 一般地, "事件 $A_1,\cdots,A_n$ 中至少发生一个" 也是一个事件, 称为事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的和 (或并), 记作 $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n$; 而 "可列多个事件 $A_1, A_2,\cdots,A_n\cdots$ 至少有一个出现" 也是一个事件, 叫做**可列多个事件** $A_1, A_2,\cdots,A_n,\cdots$ **的和** (或并), 记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. 因此, 二事件 A, B 的和, 就是 "或 A 发生, 或 B 发生, 或者 A 和 B 同时发生". 在事件运算的讨论中, 应特别注意一些关键词语, 如 "或者", "同时" 等, 它们表述了不同的运算. 显然, 对于任意事件 A, 有 $A \bigcup \varnothing = A; A \bigcup \Omega = \Omega$; 若 $A \subset B$, 则 $A \bigcup B = B$.

(3) 事件的积 (交):"二事件 A, B 同时发生" 也是一个事件, 称为 A 与 B 的**积** (或交), 记作 $A \bigcap B$. 类似于事件的和, 亦有 n 个事件 $A_1, A_2,\cdots,A_n$ 的积

(交)$A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n$ (简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$) 和可列多个事件 $A_1,\cdots,$ $A_n,\cdots$ 的积 (交) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 显然, $A\bigcap \Omega=A, A\bigcap\varnothing=\varnothing$.

若 $A\bigcap B=\varnothing$, 则称 A,B 为**互不相容事件**, 任意事件 A 与不可能事件 $\varnothing$ 为互不相容事件. 当 $A\bigcap B=\varnothing$ 时, 可将 $A\bigcup B$ 记为 "直和" 形式 $A+B$.

(4) 事件的差与逆:"事件 A 发生而事件 B 不发生" 是一个事件, 称为事件 A 与事件 B 的**差**, 记作 $A-B$.$\Omega-A$ 称为事件 A 的**逆事件**, 记作 $\overline{A}$.

图 1.1 把事件间的关系及其运算用图形示意出来, 易于直观理解, 这种图称为文氏 (Venn) 图.

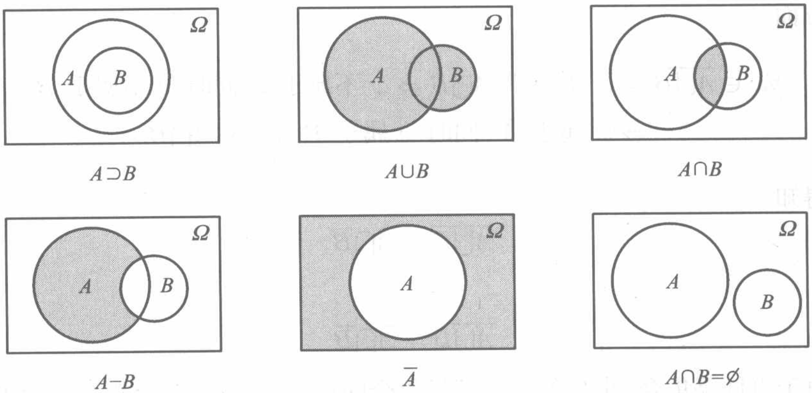

图 1.1 文氏 (Venn) 图

假设 A,B,C 是三个任意事件, 则它们满足:

(1) 交换律 $A\bigcup B=B\bigcup A, A\bigcap B=B\bigcap A$.

(2) 结合律 $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C, A(BC)=(AB)C$.

(3) 分配律 $A(B\bigcup C)=(AB)\bigcup(AC)$,

$$A(B-C)=(AB)-(AC).$$

(4) 对偶律 $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}, \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

一般地, 对偶律可表述为

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

注意, 文氏图仅是一种直观示意, 不能作为证明工具, 对于上述运算律的证明, 须用严格的集合论证明手法, 下面给出一例.

例 1.2　证明对偶律 $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$.

证明　在集合关系证明中, 要证明 $A\subset B$, 需且只需证明对于 A 中的任意一元素 ω, ω 亦为 B 中的元素即可. 用符号可表述为 $\forall\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$. 这里符号 "$\forall$" 读作 "对于任意的", "$\in$" 读作 "属于", "$\Rightarrow$" 读作 "推出". 现在给出证明:

$$\begin{aligned}\forall\omega\in\overline{A}\bigcap\overline{B}&\Rightarrow\omega\text{ 不属于 }A\text{ 同时 }\omega\text{ 不属于 }B\\&\Rightarrow\omega\text{ 不属于 }A\bigcup B\Rightarrow\omega\in\overline{A\bigcup B},\end{aligned}$$

从而知

$$\overline{A}\bigcap\overline{B}\subset\overline{A\bigcup B};$$

另一方面

$$\begin{aligned}\forall\omega\in\overline{A\bigcup B}&\Rightarrow\omega\text{ 不属于 }A\bigcup B\Rightarrow\omega\text{ 不属于 }A\text{ 同时 }\omega\text{ 不属于 }B\\&\Rightarrow\omega\text{ 属于 }\overline{A},\text{ 同时 }\omega\text{ 属于 }\overline{B}\Rightarrow\omega\in\overline{A}\bigcap\overline{B}.\end{aligned}$$

从而得知

$$\overline{A\bigcup B}\subset\overline{A}\bigcap\overline{B},$$

因而

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}.$$

由于事件是集合, 事件的运算即是集合的运算, 表 1.1 给出概率论中事件及其运算与集合论中集合及其运算的术语对照.

表 1.1　术语对照表

符　号	概　率　论	集　合　论
ω	样本点	元素
Ω	必然事件 (基本事件空间)	空间 (全集)
$\varnothing$	不可能事件	空集
A	事件	子集
$\omega\in A$	事件 A 发生	ω 是 A 中的元素
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 一定发生	A 是 B 的子集
$A=B$	二事件 A,B 相等	二集合元素完全相同
$A\bigcup B$	二事件 A,B 至少发生一个	二集合的并集
$A\bigcap B$	二事件 A,B 同时发生	二集合的交集
$A-B$	事件 A 发生而同时 B 不发生	二集合的差集
$\overline{A}$	A 的逆事件	A 对 Ω 的补集
$A\bigcap B=\varnothing$	二事件 A,B 互不相容	二集合 A,B 不相交

例 1.3 设 A, B, C 为三个事件, 则:

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生可表示为

$$A\overline{B}\,\overline{C};$$

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生可表示为

$$AB\overline{C};$$

(3) 所有这三个事件同时发生可表示为

$$ABC;$$

(4) 这三个事件恰好发生一个可表示为

$$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C;$$

(5) 这三个事件恰好发生两个可表示为

$$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC;$$

(6) 这三个事件至少发生一个可表示为

$$A\bigcup B\bigcup C$$

或

$$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC.$$

例 1.4 从一只黑箱依次取 2 只球, 箱中装有 2 只白球 (标号 1,2), 2 只黑球 (标号 3,4), 则可能的结果是

$$(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)$$
$$(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3).$$

若以事件 A 表示第一次取黑球, 以事件 B 表示第二次取黑球, 则

$$A=\{(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\},$$
$$B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),(4,3)\},$$
$$AB=\{(3,4),(4,3)\}.$$
$$A-B=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}.$$
$$\overline{A}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)\}.$$

§1.3 随机事件的概率

在一次随机试验中, 随机事件可能出现也可能不出现, 但它出现的可能性的大小是客观存在的. 例如, 掷一枚均匀的硬币, 由对称性知,"正面" 和 "反面" 这两个事件出现的可能性都是 1/2. 又如掷一枚均匀的骰子, 出现点数 "1", "2", $\cdots$, "6" 这 6 个事件可能性都是 1/6. 可见, 事件发生的可能性是客观存在, 并且可以用一个数字来度量, 概率就是度量这种可能性大小的数字特征, 它是概率论中最基本的概念.

本节先从频率的概念出发, 引入概率的统计定义, 然后给出特定范围内, 即古典概型以及几何概型场合概率的定义, 最后给出概率的公理化定义并讨论这一定义下概率的一些常用性质.

1.3.1 概率的统计定义

历史上有许多人做过掷硬币这一随机试验, 表 1.2 给出了统计学家德莫根、浦丰以及皮尔逊等人的试验结果.

表 1.2 掷 "硬币" 的试验结果

实 验 者	掷次数 n	出现 "正面" 次数 m	频 率 $\frac{m}{n}$
德莫根	2 048	1 061	0.518
浦 丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1.2 可以看出, 随着试验次数的增加, 描述出现 "正面" 可能性大小的量 —— 频率 —— 明显地趋于 0.5. 大量试验表明, 这一结果具有一般性, 即在随机试验中, 随着试验次数 n 的增加, 事件 A 出现的频率趋于某一确定的数字 $p, 0 \leqslant p \leqslant 1$. 由此引出如下概率的统计定义.

定义 1.2 在随机试验中, 若随机事件 A 出现的频率 m/n 随着试验次数 n 的增加, 趋于某一常数 $p, 0 \leqslant p \leqslant 1$, 则定义事件 A 的**概率**为 p, 记作 $P(A) = p$.

由定义 1.2 可以证明概率的统计定义具有如下性质.

性质 1.1 (概率统计定义的性质)

(1) 对任一事件 A, 有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$;

(3) 对于两两互斥的有限多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$,

$$P(A_1 + \cdots + A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m).$$

证明 (1) 此结论是显然的;

(2) 由于 Ω 是必然事件, 每次试验中均发生, 则其频率恒等于 1, 自然 $p=1$; 对于 $\varnothing$, 由于它表示不可能事件, 在每次试验中均不可能发生, 则其频率恒等于 $0, p=0$;

(3) 根据 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互斥, 所以 $A=A_1+A_2+\cdots+A_m$ 的频率 $\dfrac{r}{n}$, 与 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的频率 $\dfrac{r_1}{n}, \dfrac{r_2}{n}, \cdots, \dfrac{r_m}{n}$ 满足等式

$$\frac{r}{n}=\frac{r_1}{n}+\frac{r_2}{n}+\cdots+\frac{r_m}{n}.$$

根据定义 1.2 知

$$P(A_1+\cdots+A_m)=P(A_1)+\cdots+P(A_m).$$

概率的统计定义直观地描述了事件发生的可能性大小, 反映了概率的本质内容. 但也有明显的不足, 即无法根据此定义计算某事件的概率. 例如, 投掷硬币的例子中, 当硬币很均匀时, 随着试验次数的增加, 出现正面的频率趋于 1/2, 而且当试验次数越大时, 频率离概率的近似程度越近. 然而实际试验次数总是有限的, n 要多大, 准确到什么程度, 定义中没有确定表述. 为此, 将研究范围缩小, 给出可计算的概率定义.

1.3.2 概率的古典概型定义

古典概型是古典概率模型的简称, 它是指这样一类随机试验:

(1) 样本空间中仅含有限个样本点;

(2) 每个样本点出现的可能性是一样的.

其一表述的是样本点的有穷性; 其二表述的是样本点出现的等可能性. 例如, 在一黑箱中放置 n 个完全相同的球, 每个球上标记号码 $1,2,\cdots,n$, 现从箱中随机地取出一球, 那么, 这 n 个球中每个球被取出的可能性都是 $1/n$.

对于古典概型, 以 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 表示样本空间, $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示样本点. 对于任一随机事件 $A=\{\omega_{i_1},\cdots,\omega_{i_m}\}$, 下面给出概率的古典概型定义.

定义 1.3 假设 Ω 共含 n 个样本点, 对于任意事件 A, 它含 m 个样本点, 则定义 A 的**概率**为 m/n, 记作

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含样本点的个数}}. \tag{1.1}$$

式 (1.1) 给出的古典概型场合的概率定义是符合实际的. 例如, 掷硬币, 如果硬币均匀, 即出现“正面”、“反面”是相等可能的, 则由式 (1.1) 可知, 出现“正面”的概率等于 1/2; 掷均匀骰子, 出现点数 1 的概率为 1/6; 从放有 n 个相同球的黑箱中取球, 每个球被取出的概率为 $1/n$.

式 (1.1) 的定义虽然简单, 但对于一给定的随机试验, 要计算某一事件 A 的概率不是一个简单的问题, 有些问题具有相当的难度, 下面给出一些古典概型概率计算的例子.

例 1.5　取球问题.　箱中有 α 个白球, β 个黑球, 从中任取 $a+b$ 个球, 试求所取的球恰好含 a 个白球, b 个黑球的概率 $(a \leqslant \alpha, b \leqslant \beta)$.

解　此例的随机试验是从箱中随机地取出 $a+b$ 个球, 取后不返回, 属于排列组合计算中的组合问题. 样本空间中所含的样本点个数为 $n = \mathrm{C}_{\alpha+\beta}^{a+b}$, 这里记号 "$\mathrm{C}_l^k$" 表示从 l 中取出 k 个组合的所有可能组合数. 事件 A"有 a 个白球, b 个黑球", 所含的样本点个数为 $m = \mathrm{C}_\alpha^a \mathrm{C}_\beta^b$, 因而事件 A 的概率为

$$P(A) = \mathrm{C}_\alpha^a \mathrm{C}_\beta^b / \mathrm{C}_{\alpha+\beta}^{a+b}.$$

例 1.6　分房问题. 有 n 个人, 每个人都以同样的概率 $1/N$ 被分配在 $N(n \leqslant N)$ 间房的每一间中, 试求下列各事件的概率.

(1) 某指定 n 间房中各有 1 人;

(2) 恰有 n 间房, 其中各有 1 人;

(3) 某指定房中恰有 $m(m \leqslant n)$ 人.

解　先求样本空间中所含样本点的个数.

首先, 把 n 个人分配到 N 间房中去共有 N^n 种分法; 其次, 求每种情形事件所含的样本点个数.

(1) 某指定 n 间房中各有 1 人, 所含样本点的个数, 即可能的分法为 $n!$;

(2) 恰有 n 间房中各有 1 人, 所有可能的分法为 $\mathrm{C}_N^n n!$;

(3) 某指定房中恰有 m 人, 可能的分法为

$$\mathrm{C}_n^m (N-1)^{n-m}.$$

进而我们可以得到三种情形下事件的概率分别为

(1) $n!/N^n$; (2) $\mathrm{C}_N^n n!/N^n$; (3) $\mathrm{C}_n^m (N-1)^{n-m}/N^n$.

上述分房问题中, 若令 $N = 365, n = 30, m = 2$, 则可演化为生日问题, 全班学生 30 人, 求:

(1) 某指定 30 天, 每位学生生日各占 1 天的概率;

(2) 全班学生生日各不相同的概率;

(3) 全年某天恰有 2 人在这一天同生日的概率.

利用上述结论可得概率分别为

(1) $30!/365^{30}$;

(2) $\mathrm{C}_{365}^{30} \times 30!/365^{30} \approx 0.294$;

(3) $C_{30}^2 \times 364^{28}/365^{30}$.

由 (2) 立刻得出, 全班 30 人至少有 2 个人生日相同的概率大于 70%.

例 1.7 随机取数问题. 从 $1, 2, \cdots, 10$ 共 10 个数字中任取一个, 假定每个数字都以 1/10 的概率被取中, 取后还原, 先后取出 7 个数字, 试求下列各事件 $A_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 的概率.

(1) 7 个数字全不相同;

(2) 不含 10 与 1;

(3) 10 恰好出现 2 次;

(4) 至少出现 2 次 10.

解 样本空间中所含的样本点个数为 10^7, 各事件的概率分别为

(1) $P(A_1) = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{10^7} = \dfrac{10!}{10^7 \times 3!}$;

(2) $P(A_2) = \dfrac{8^7}{10^7}$;

(3) $P(A_3) = \dfrac{C_7^2 9^5}{10^7} = C_7^2 \times 9^{7-2} \times 10^{-7} = C_7^2 \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^{7-2} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^2$.

可将 (3) 的结果推广到 "10 恰好出现 k 次 $(k \leqslant 7)$", 其概率为

$$P(A_3^*) = C_7^k 9^{7-k}/10^7 \quad (k \leqslant 7).$$

(4) 由 $P(A_3^*)$ 易得

$$P(A_4) = \sum_{k=2}^{7} C_7^k 9^{7-k}/10^7.$$

例 1.8 中彩问题. 从 $1, 2, \cdots, 33$ 共 33 个数字中任取一个, 假定每个数字都以 1/33 的概率被取中, 取后不还原, 先后取出 7 个数字, 求取中一组特定号码 A 为一等奖的概率.

解 $P(A) = \dfrac{1}{C_{33}^7} = \dfrac{1}{4\ 272\ 048} \approx 2.340\ 7 \times 10^{-7}$.

即中一等奖的概率约为 0.000 000 234 07, 是一个接近零的很小的小概率事件, 约为 $\dfrac{1}{4\ 270\ 000}$.

性质 1.2 对古典概型的概率具有如下性质:

(1) 对于任意事件 $A, 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) $P(\Omega) = 1; P(\varnothing) = 0$;

(3) 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容, 则

$$P(A_1 + \cdots + A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m).$$

证明　根据定义,(1),(2) 显然成立, 设 $A_i=\{\omega_1^{(i)},\cdots,\omega_{k_i}^{(i)}\}$, 根据互不相容性知

$$A_1+\cdots+A_m=\{\omega_1^{(1)},\cdots,\omega_{k_1}^{(1)};\omega_1^{(2)},\cdots,\omega_{k_2}^{(2)};\cdots;\omega_1^{(m)},\cdots,\omega_{k_m}^{(m)}\},$$

共含 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i$ 个样本点, 若设 Ω 中所含样本点数为 n, 则

$$P(A_1+\cdots+A_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}k_i=\frac{k_1}{n}+\cdots+\frac{k_m}{n}=P(A_1)+\cdots+P(A_m).$$

1.3.3　概率的几何概型定义

相对于统计定义, 概率的古典定义具有可计算性的明显优点, 但它也有显明的局限性, 要求样本有限, 如果样本空间中所含的样本点个数是无限的, 古典概型的概率定义就不适用了. 如果保留样本点等可能出现的要求, 将样本点有限放宽到无限, 这便引入了几何概型的定义.

定义 1.4　若对于一随机试验, 每个样本点的出现是等可能的, 样本空间 Ω 所含的样本点个数为无穷多个, 且具有非零的、有限的几何度量, 即 $0<m(\Omega)<\infty$, 则称这一随机试验是一**几何概型**的.

注意这里几何度量, 直观地说, 对一维区间它是长度, 对二维区域是面积, 对三维则是体积 …… 对于几何概型引入概率的定义如下:

定义 1.5　对于一随机试验, 以 $m(A)$ 表示任一事件 A 的几何度量, 若 $0<m(\Omega)<\infty$, 则对任一事件 A, 定义其**概率**为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

几何概型的概率定义具有如下性质.

性质 1.3　对于几何概型的概率具有性质:

(1) 对于任意事件 $A, 0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$;

(3) 设可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相交, 则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots.$$

证明　由定义 1.5,(1),(2) 显然成立. 对 (3) 利用几何度量的完全可加性

$$m(A_1+\cdots+A_n+\cdots)=m(A_1)+m(A_2)+\cdots+m(A_n)+\cdots$$