应用泛函分析

陈连昌 武俊德 吴继周

大连理工大学出版社

应用泛函分析

陈连昌　武俊德　吴继周

大连理工大学出版社

（辽）新登字16号

内 容 简 介

本书共分两章：基础泛函；应用泛函。

第一章论述了泛函分析的基础知识，包括线性空间，度量空间，线性赋范空间，内积空间，线性算子与线性泛函，广义函数，Banach空间上的微分学等。

第二章论述了应用中常用的十种方法，包括正交函数展开法，变分方法，Ritz方法，区间方法，不动点方法，Newton方法，逼近论方法，同伦连续方法等。

本书可作为高等工科院校学生选修课程或者研究生应用泛函分析课程的教材，也可供工程技术人员参考。

应用泛函分析

Yingyong Fanhan Fenxi

陈连昌　武俊德　吴继刚

大连理工大学出版社出版发行　　（邮政编码：116024）

安达市印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　　印张：8　5/16　　字数：186千字

1993年1月第1版　　1993年1月第1次印刷

印数：1—2000册

责任编辑：张亚军　李鸽　　封面设计：姜玉坤

责任校对：邓廷权

ISBN 7—5611—0688—2/O·97　　定价：4·50元

前　言

随着科学技术的发展，工程技术中的许多问题需要用泛函分析的方法来处理。因此，对于具有普通微积分基础的大多数工程技术人员和大学生来说，迫切需要一本应用泛函分析方面的专著。

目前国内流行的几种应用泛函分析方面的专著，一是叙述偏重于理论，二是应用过少，这对工程技术人员和大学生来说，既不能满足他们应用上的需要，又不便于他们阅读和自学。

为此，我们编写的这本书具有下述的明显特点：

1、泛函分析基础知识的叙述简明扼要，既使读者能够掌握泛函分析的基本思想、基本理论、基本方法，又不追求对数学本身是十分需要的某些论述，因为这些论述对于非数学专业人员是难于接受而又不十分必要的。

2、泛函分析的应用部分是本书异于其它同类专著的显著特点。我们用一半以上的篇幅较详尽地论述了应用泛函方面的十种方法，内容之广，方法之多，是其它同类专著所没有的。这也正是当前工程技术人员所急需的。就是对于数学工作者而言，这些内容也颇值一读。

3、本书的有些内容是相当新颖的。例如第二章的关于区间分析方法的论述等等；本书的有些问题在叙述上是具有相当特色的，例如第一章关于 Lebesgue 积分的引入，采用了全新

的方法，等等。这里含有笔者在泛函分析的学习和研究中的点滴体会。

4、本书第一章为基础泛函，第二章为应用泛函。在行文中，笔者力求做到条理清晰，思路明确。第二章的各节具有相对的独立性，有些读者可直接阅读其中的感兴趣的内容，也不会有太大的困难。

5、本书应是工程技术人员的良师益友，也可作为高等工业院校学生选修课程或者研究生应用泛函分析课程的教材。

如上各条，是笔者成书的初衷，相信读者在阅读中也可见其端倪。一言以蔽之，我们是想在数学工作者和工程技术人员之间，搭一座小桥，尽一点绵薄之力。但是，限于笔者的水平，加之完稿仓促，疏漏之处尚祈读者见谅。

最后，笔者谨对刘业厚付院长的指导与鼓励表示诚挚的谢意。

作　者

1991年12月于大庆石油学院

目　录

第一章 基础泛函

本章讲述泛函分析的一些基本知识，主要是空间理论、算子理论、Lebesgue 积分、Frechet 微分和 Gâteaux 微分．我们的叙述虽然简要，但是不难从这里了解泛函分析的基本思想和基本方法．同时，对于我们后一章以及工程技术上的应用也可打下必要的基础．

§1 线性空间

线性空间是一个代数系统．当我们讨论的对象之间具有某种代数关系，即元素之间具有加法运算以及数与元素的乘法运算时，就必须引入线性空间（或向量空间）的概念．从泛函分析的观点来看，线性算子是线性空间到线性空间的一种线性映射，正如同研究函数时必须研究直线上的点集一样，我们必须讨论线性算子的定义域，即线性空间．

1° 线性空间的概念

定义 1.1 设 E 是一个非空集合，R 为实数域．如果在 E 中规定了线性运算，即元素的加法运算以及实数与 E 中元素的乘法运算，满足下述条件：

Ⅰ. E 关于加法成为交换群．就是说对于任一对 $x, y \in E$，存在 $u \in E$—— 记作 $u = x + y$，称它是 x, y 的和 —— 这个运

算适合

(1) $y+x=x+y$

(2) $(x+y)+z=x+(y+z) \quad x,y,z\in E$

(3) E 中存在唯一的元素 θ(称为零元素),使得对于任何 $x\in E$ 成立着 $x+\theta=x$

(4) 对于 E 中每一元素 x,存在唯一的元素 $x'\in E$(对应于 x)满足 $x+x'=\theta$,称 x' 是 x 的负元素,记作 $-x$.

Ⅱ. 对任何 $x\in E$ 及任何实数 a,存在元素 $ax\in E$,称 ax 是 a 和 x 的数积,适合

(5) $1\cdot x=x$

(6) $a(bx)=(ab)x \quad a,b\in R$

(7) $(a+b)x=ax+bx, a(x+y)=ax+ay.$

那么称 E 为实数域上的线性空间或向量空间,其中的元素称为向量.

如果数积运算对复数有意义,称 E 是复线性空间.在本书中如无特别说明,我们都是讨论上述定义中的实线性空间.

例 1 n 元实有序数组的全体记为 R^n,其中的元素为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,线性运算按通常的定义方法,分别对相应的每个坐标进行运算:

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$
$$a(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(ax_1,ax_2,\cdots,ax_n)$$

则 R^n 是线性空间.

例 2 定义在 R 上的连续实值函数的全体记作 $C(-\infty,+\infty)$,按通常的函数加法和与数相乘的运算,即

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t) \qquad t\in R,$$

则 $C(-\infty,+\infty)$ 为线性空间.

例 3 正实数的全体记作 R^+,在其中分别规定加法和数乘如下:

$$x\oplus y=xy$$

$$\alpha\cdot x=x^\alpha \qquad x,y\in R^+,\alpha\in R.$$

容易验证,R^+ 是线性空间.

2° 线性相关和线性无关

定义 1.2 设 E 是线性空间,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 E 中的一组元素,如果存在不全为 0 的 n 个实数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,使得

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\theta$$

则称元素组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的. 一组元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 如果不是线性相关的,则称为线性无关的.

显然,如果元素组 $x_1,\cdots,x_n$ 中含有零元素,那么它必是线性相关的. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的充分必要条件是:如果常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\theta$,必定 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.

定义 1.3 设 E 是线性空间,如果

$$y=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$$

则称 y 可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示,其中 $y,x_1,\cdots,x_n\in E,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in R$. 如果 $A\subseteq E$,且 A 中任何有限个元素都是线性无关的,就称 A 是线性无关的,否则称 A 是线性相关的.

定义 1.4 设 A 是线性空间 E 中的一个线性无关元素组. 如果对于每一个元素 $x\in E$,都可由 A 中的元素线性表示,则称 A 是线性空间 E 的一组线性基. 如果线性空间 E 中存在一组由有限个元素 $x_1,\cdots,x_n$ 组成的基,则称 E 是有限维(n 维)

的，否则就称为无限维的.

可以证明，线性空间的维数是确定的，不因选取不同的基而改变.

例 4　在线性空间 R^n 中，元素组

$$e_1 = (1,0,\cdots,0)$$
$$e_2 = (0,1,\cdots,0)$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$e_n = (0,0,\cdots,1)$$

是线性无关的，任意元素 $x \in R^n$，均可由 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示，而且表示式是唯一的. 因此，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 R^n 的一组线性基.

3°　子空间

定义 1.5　设 L 是线性空间 E 的一个非空子集. 如果 L 对 E 中的线性运算是封闭的，就是说，当 $x,y \in L$ 时，$x+y \in L$，而且对任何数 a，$ax \in L$，则称 L 是 E 的一个线性子空间，简称子空间.

显然，E 的任何线性子空间本身也是一个线性空间. 验证 E 的一个非空子集 L 是线性子空间，只要证明 L 对 E 中的线性运算是封闭的. 线性空间 E 本身和只含零元素的集 $\{\theta\}$ 都是 E 的子空间.

例 5　$R^1 = \{(x,0,\cdots,0) \mid x \in R\}$ 是 R^n 的一个子空间.

例 6　设 P 表示实系数多项式的全体，则 P 是 $C(-\infty,+\infty)$ 的一个子空间，取

$$A = \{x_n(t) = t^n \mid t \in (-\infty,+\infty); n = 0,1,2,\cdots\}$$

则 A 是 P 的一组基，而且容易知道，P 是 $C(-\infty,+\infty)$ 的一个无限维子空间.

4°　同构与等价关系

定义1.6 设E、F是两个线性空间. 如果在E和F之间存在一对一的映射T,使对任何$x,y\in E,\alpha\in R$都成立着

$$T(x+y)=T(x)+T(y)$$

$$T(\alpha x)=\alpha T(x)$$

则称E和F是线性同构的,简称同构. 而映射T称为E和F之间的同构映射.

显然,线性无关元素组经同构映射仍变为线性无关元素组. 这是因为同构映射T的逆映射T^{-1}也是同构映射.

例7 设E_n是任意的n维线性空间,$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是E_n中的一组基,则E_n中每个元素x可以唯一地用$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性表示

$$x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

数$a_1,\cdots,a_n$称为x关于基$x_1,\cdots,x_n$的坐标. 如果我们把E_n的元素x关于一组基的坐标记为$(a_1,\cdots,a_n)$,它是R^n的元素,令

$$T:x\to(a_1,\cdots,a_n)$$

这是E_n与R^n之间的一一对应. 显然,如果在R^n中按通常方法规定线性运算,这个映射T保持线性运算,所以E_n与R^n是线性同构的. 因此,任意的n维线性空间与R^n线性同构.

定义1.7 设E是一个集合,在E的元素之间有一种关系"$\sim$",适合以下的条件:

(1) 自反性:对于一切$x\in E,x\sim x$

(2) 对称性:如果$x\sim y$,则$y\sim x,x,y\in E$

(3) 传递性:如果$x\sim y$,并且$y\sim z$,则$x\sim z$.

这时我们说"$\sim$"是E中的等价关系. 设"$\sim$"是集E中的一个等价关系,任取$x\in E$,令$\tilde{x}=\{y|y\sim x\}$表示和x等价的元素全体,称作E中的一个等价类.

例 8 在平面 R^2 中我们规定 $(x,y)\sim(x,y')$，换句话说，平面上横坐标相同的两点具有关系"$\sim$"，这是一个等价关系，平面上任意平行于 y 轴的直线上的所有点构成 R^2 中的一个等价类.

显然，E 中的任意两个等价类 $\tilde{x},\tilde{y}$ 或是相同（这时 $x\sim y$），或是互不相交，而且集 E 就是这些互不相交的等价类的并集.

5° 积空间和商空间

定义 1.8 设 E,F 是两个线性空间，记 $E\times F=\{(x,y)\mid x\in E,y\in F\}$，并在 $E\times F$ 中规定线性运算如下：

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$a(x_1,y_1)=(ax_1,ay_1)$$

则 $E\times F$ 构成一个线性空间，称为 E 和 F 的积空间.

例 9 平面 R^2 可以看成实数直线 R^1 和 R^1 的积空间，$R^2=R^1\times R^1$.

当 E 是一个线性空间，L 是 E 的一个线性子空间时，我们在 E 中规定：当 $x-y\in L$ 时，$x\sim y$，容易证明"$\sim$"是 E 中的一个等价关系，记所有等价类全体为 E/L. 在 E/L 中规定线性运算如下：

$$\tilde{x}+\tilde{y}=\widetilde{(x+y)}$$

$$a\tilde{x}=\widetilde{(ax)}$$

这样的线性运算是有确定意义的，例如我们讨论加法：如果 $\tilde{x}=\tilde{x}_1,\tilde{y}=\tilde{y}_1$，那么 $x-x_1\in L,y-y_1\in L$，因此 $x+y-(x_1+y_1)\in L$，也就是

$$\widetilde{(x+y)}=\widetilde{(x_1+y_1)}$$

类似地可讨论数乘，容易看出 E/L 按上述线性运算是一个线

性空间,称为 E 关于 L 的商空间,也容易看出 $\tilde{\theta}=L$.

例 10 设 $E=\{x(t)\,|\,t\in[a,b],x(t)$ 是$[a,b]$上的实值连续函数$\}$,$L=\{x(t)\,|\,x(t)\in E,x(a)=x(b)=0\}$,那么 L 是 E 的线性子空间,并且 $\tilde{x}=\{y(t)\,|\,y(t)\in E$,在 a,b 两点处 $y(t)$ 的值与 $x(t)$ 的值相同$\}\in E/L$ 为商空间中相应于 E 中的 $x(t)$ 的元素.

§2 度量空间

在实际问题中,有些集合具有如前节所述的代数结构,有些则只具有相应的分析结构.通常的数学方法,最自然地是在一个集合内给出元素间的一个抽象的距离定义,即引入度量空间的概念,并将通过距离定义收敛问题.从而我们可以将实数列的收敛、连续函数列的一致收敛等统一在按距离收敛的概念中.

1° 度量空间的概念

定义 2.1 设 E 是一个非空集合.如果对于 E 中任意一对元素 x,y,都给定一个实数 $d(x,y)$ 与它们对应,并且满足如下条件:

(1) $d(x,y)\geqslant 0$,且 $d(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$

(2) $d(x,y)=d(y,x)$

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)\quad z\in E$

则称 d 为 E 上的一个度量或距离,此时我们称 E 是一个度量空间或距离空间,记为(E,d).

例 1 R^1 按 $d(x,y)=|x-y|$ 构成度量空间.

例 2　设 $C[a,b]$ 表示定义在 $[a,b]$ 上的连续实值函数的全体，在 $C[a,b]$ 定义距离如下：

$$d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

那么易验证 $C[a,b]$ 是一个度量空间.

例 3　在 R^1 上规定另一种距离 d_1 如下，当 $x,y \in R^1$ 时

$$d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

显然 d_1 满足定义 2.1 中的(1) 和(2)，为证明满足(3)，我们只要证明对任意 $x,y \in R^1$ 成立着不等式

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

事实上，由于在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ 是单调增加的，由不等式 $|x+y| \leqslant |x| + |y|$，我们得出

$$\begin{aligned}\frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leqslant \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}\\ &= \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|}\\ &\leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned}$$

所以 R^1 按 d_1 是一个度量空间且与例 1 中所定义的距离不同，这时我们应将 (R^1,d) 与 (R^1,d_1) 看成是不同的度量空间.

2°　极限的概念

定义 2.2　设 (E,d) 是一个度量空间，$x_n(n=1,2,\cdots)$，$x \in E$，假如当 $n\to+\infty$ 时数列 $d(x_n,x)\to 0$，就说点列 $\{x_n\}$ 按照距离 d 收敛于 x，记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

或 $x_n \to x$. 这时称 $\{x_n\}$ 为收敛点列, x 为 $\{x_n\}$ 的极限.

容易证明在度量空间中，任何一个点列最多只有一个极限点，即收敛点列的极限是唯一的.

定理 2.1 如果 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$，那么 $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$.

证明 因为 $d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y_n)$，类似地有

$$d(x_0, y_0) \leqslant d(x_0, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_0)$$

由这两个不等式得到

$$|d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \leqslant d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0)$$

令 $n \to +\infty$，就得到所要证明的结论.

定义 2.3 设 M 是度量空间 (E, d) 中的非空子集，如果存在 $x_0 \in E$ 及 $r > 0$，当 $x \in M$ 时，

$$d(x, x_0) \leqslant r$$

那么称 M 是有界的.

易于证明收敛点列是有界的.

3° 开集与闭集

定义 2.4 设 (E, d) 是一个度量空间，$G \subseteq E$，$x_0 \in G$，如果存在一个 $r(x_0) > 0$，使得集合 $\{x \mid d(x, x_0) < r(x_0)\} \subseteq G$，则称 x_0 是 G 的一个内点. 如果 G 中每一点均是内点，则称 G 是开集.

例 4 设 (E, d) 是一个度量空间，对于任何 $x_0 \in E$，$r > 0$，那么

$$S(x_0, r) = \{x \mid d(x_0, x) < r\}$$

是一个开集.

证明 任取 $x \in S(x_0, r)$，则 $d(x_0, x) < r$，取正数 $0 < \varepsilon \leqslant r - d(x_0, x)$，下证 $S(x, \varepsilon) \subset S(x_0, r)$，因为 $y \in S(x, \varepsilon)$，则 $d(y, x) < \varepsilon$，由距离空间性质(3)有

$$d(y,x_0) \leqslant d(y,x) + d(x,x_0) < \varepsilon + d(x,x_0)$$
$$\leqslant r - d(x_0,x) + d(x_0,x) = r$$

所以 $y \in S(x_0,r)$，从而任一点 $x \in S(x_0,r)$ 都是内点，故 $S(x_0,r)$ 是开集.

定义 2.5 设(E,d)是一个度量空间，F是E的非空子集，$x_0 \in E$，$x_0 \bar{\in} F$，如果存在$\{x_n\} \subseteq F$，$(n=1,2,\cdots)$，使得$x_n \to x_0$，那么称x_0是F的聚点. F的所有聚点全体记为F'，并称$F \cup F'$为F的闭包，记作$\bar{F}$.

定义 2.6 设(E,d)是一个度量空间，$F \subseteq E$，如果$F=\bar{F}$，那么称F是一个闭集.

注 我们规定$\varnothing$及全空间E既为开集又为闭集，其中$\varnothing$是空集.

例 5 $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\} \subseteq R^1$，则$A'=\{0\}$，$A$不是闭集也不是开集，其中$R^1$的距离按通常意义理解.

我们易验证下列性质：

(a) G是度量空间的开集的充要条件是它的补集G^c是闭集.

(b) 任意多个开集的并是开集.

(c) 有限个开集的交是开集.

(d) 任意多个闭集的交是闭集.

(e) 有限多个闭集的并是闭集.

4° 连续映射

定义 2.7 设(E,d_1)，(K,d_2)是两个度量空间，$T:E \to K$是二个空间之间的一个映射，$x_0 \in E$，如果对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$d_1(x,x_0)<\delta$时，$d_2(Tx,Tx_0)<\varepsilon$.