21

21世纪大学课程辅导丛书

大学物理

学习指导 典型题解

新版

王小力 张孝林 徐忠锋

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪大学课程辅导丛书

大学物理

学习指导 典型题解

新版

王小力 张孝林 徐忠锋

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是作者根据教育部高等学校物理课程教学指导委员会2008年颁布的大学物理课程教学基本要求，结合教学重点、疑点和难点，针对学生学习中遇到的主要问题和困难，在总结和提炼多年教学实践经验和前期使用效果的基础上编写的。全书包括力学与狭义相对论、电磁学、振动与波（含波动光学）、热力学与气体分子动理论、量子物理基础等共5章。各章分有基本要求、基本知识点和典型例题分析三部分。本书从分析物理典型问题的模型、条件与方法之间的关系入手，力求重点突出、思路清晰、注重分析、推理严密、方法简练，精选和编制了符合大学物理教学要求的300余道题目，旨在启发读者学会和掌握大学物理各类问题的思路、方法和技巧，提高和增强读者分析和解决物理问题的能力。

本书既可作为理工科大学生，电大、函授等学生学习大学物理的参考书，也可供从事物理教学的教师参考和研究生使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导典型题解/王小力，张孝林，徐忠锋编著. —西安：西安交通大学出版社，2009.6

ISBN 978-7-5605-3135-9

Ⅰ.大… Ⅱ.①王…②张…③徐… Ⅲ.物理学-高等学校-解题 Ⅳ.O4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第085717号

书　　名　大学物理学习指导典型题解(新版)
编　　著　王小力　张孝林　徐忠锋
责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社
（西安市兴庆南路10号　邮政编码710049）
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安新视点印务有限责任公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　**印张**　16.125　**字数**　385千字
版次印次　2009年6月第1版　2009年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-3135-9/O·294
定　　价　24.80元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

版权所有　侵权必究

丛书总序

“21世纪大学课程辅导丛书”第一版出版已有十年时间，几经再版，深受广大读者的喜爱。为了满足读者朋友的需要，也为了适应高等教育改革的形势和新的教学要求，我们组织作者对本丛书进行了修订，以全新的面貌奉献给大家。

我们出版这套丛书的目的就是为普通高等学校理工类专业的大学生**提供一流的学习资源**，使大家**共享一流教师的教学经验和教学成果，更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识，为今后的学习和深造打下良好的基础。**

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府，是首批进入国家“211工程”建设的七所大学之一，1999年被国家确定为中西部地区惟一一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学，1996年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名，具有丰富的、一流的教学资源。

本丛书由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编，他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中，**深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在，对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究，并将成果体现于书中。**

本丛书**以普通高等学校的学生为主要对象，不拘泥于某一本教材，而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结，取其精华，自成一体。**书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路等进行了全面、系统的总结和提炼，按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排；书后附录了自我检测题参考答案和近年来一些院校的期末考试题、考研试题及相应题解。本丛书的指导思想是**帮助学生理清学习思路，总结并掌握各章节的要点；通过各类精选题的剖析、求解和示范，分析解题思路，示范解题过程，总结方法要略，展示题型变化；达到扩展知识视野，启迪创新思维，促进能力提高的目的。**

本丛书既可以单独使用，也可以与其他教材配合使用；既可以作为课程学习时的同步自学辅导教材，也可以作为考研复习时的主要参考资料。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国；也希望在考研冲刺时本丛书能助您一臂之力，使您一举成功！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们一定会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址： http://press.xjtu.edu.cn/

理工医事业部网址： http://lgny.xjtupress.com/

理工医事业部信箱： jdlgy@yahoo.cn

西安交通大学出版社

2008年6月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前 言

物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式、相互作用及其转化规律的自然科学。它的基本理论渗透在自然科学的各个领域，应用于生产技术的许多部门，是其他自然科学和工程技术的重要基础。

在人类追求真理、探索未知世界的过程中，物理学展现了一系列科学的世界观和方法论，深刻影响着人类对物理世界的基本认识、人类的思维方式和社会生活，是人类文明发展的基石，在人才的科学素质培养中具有重要的地位。因此，以物理学基础为内容的大学物理课程，是高等学校理工科各专业学生一门重要的通识性必修基础课程。

大学物理课程所教授的基本概念、基本理论和基本方法是构成学生科学素养的重要组成部分，是科学工作者和工程技术人员所必备的。由于培养分析问题和解决问题能力是大学物理课重要的任务，因此，除了课堂上的知识传授之外，需要结合教学要求，通过独立思考和一定数量的习题训练，才能巩固和深化所学的知识。我们根据教育部高等学校物理课程教学指导委员会 2008 年颁布的大学物理课程教学基本要求，结合教学重点、疑点和难点，针对学生学习中遇到的问题和困难，在总结多年教学实践经验和前期使用效果的基础上，并参考部分优秀中外教材中的典型例题，编写了这本旨在启发读者理解和掌握求解各种大学物理问题的方法与技巧的辅助教材。

做好习题是引导学生独立学习、检查学习效果、提高学习质量的重要环节。本书的目的就是引导读者通过对各类物理问题的分析，学会从基本概念和原理出发，经过一步一步的推理最终得到解答，为广大读者打下坚实的物理基础。我们力图从分析各种物理典型问题的模型、条件与方法之间的逻辑关系入手，建立物理图像，理清解题思路，掌握求解方法以及数学工具在解题过程中的灵活运用，并通过一些典型问题来拓展解题方法与技巧，达到触类旁通的目的。我们本着力求重点突出、思路清晰、推理严密、方法简练的指导思想，精选和编制了紧扣大学物理内容和教学要求的 300 余道典型题目，题目的选取注重基本概念，强调基本训练，贴近应用实际，激发学习兴趣，给出了较为详尽的解答与提示。同时，为便于读者归纳总结，部分题目提供了多种解法，供读者学习参考。希望读者在阅读本书时，能够边看边思考边练习，并能灵活运用这些典型方法和技巧，去思考和解答更多的物理问题，培养读者的探索精神和创新意识。

考虑到不同读者学习大学物理的个人要求，本书从深度和广度上，对内容和选题做了较全面的考虑。因此，本书既可作为理工科大学生，电大、函授等学生学习大学物理的参考书，也可供从事物理教学的教师参考和研究生使用，希望对各位读者有所启发和帮助。

本书第 1 章、第 5 章由徐忠锋编写，第 2 章由王小力编写，第 3 章、第 4 章由张孝林编写。王小力负责策划和统稿。李普选绘制了全书的插图。限于我们的水平和编写时间较为仓促，本书难免存在不少缺点甚至错误，欢迎广大读者批评和指正。

本书编写过程中，得到西安交通大学物理部各位同仁和西安交通大学出版社的大力支持，我们在此谨致以衷心感谢。

作 者

2009 年 3 月

目 录

第 1 章　力 学

1.1　质点运动学

1.1.1　基本要求

1. 建立质点运动学的基本概念和理想模型，掌握描述质点运动状态的方法：质点与质点系、位置矢量、位移、路程、速度、加速度等。

2. 掌握质点运动学的两类问题，即用微分法由已知的运动学方程求速度和加速度；用积分法由已知质点的运动速度或加速度求质点的运动学方程。

3. 掌握速度和加速度在常用坐标系（直角坐标系、自然坐标系、极坐标系等）中的表达形式，加深对速度与加速度的瞬时性、矢量性和独立性等基本特性的理解和应用。

4. 掌握质点圆周运动的角量表述及角量与线量之间的关系。

5. 掌握相对运动概念以及相应的速度合成和加速度合成公式，加深对物体运动相对性的理解。

1.1.2　知识点

1. 质点：当描述一个物体的运动，可以忽略它的大小、内部结构等时，该物体便可视为质点。一个物体能否看做质点，主要决定于所研究问题的性质。

2. 参照系：描述一个物体运动时用作参照的其他物体和一套同步钟。

3. 运动学方程：表示质点位置随时间的变化

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

用直角坐标表示：$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$

用自然坐标表示：　$s=s(t)$

位移矢量（如图 1－1）：$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$

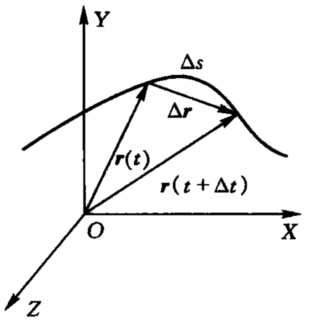


图 1－1

4. 速度和加速度：速度是描述物体运动状态的物理量，表示位置随时间的变化率。加速度是描述物体运动状态变化的物理量，表示速度随时间的变化率。

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},\quad \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中：$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$

$$a = a_x i + a_y j + a_z k = \frac{dv_x}{dt} i + \frac{dv_y}{dt} j + \frac{dv_z}{dt} k = \frac{d^2 x}{dt^2} i + \frac{d^2 y}{dt^2} j + \frac{d^2 z}{dt^2} k$$

在自然坐标系中：$v = v\tau = \frac{ds}{dt}\tau$

$$a = a_\tau \tau + a_n n = \frac{dv}{dt}\tau + \frac{v^2}{\rho} n = \frac{d^2 s}{dt^2}\tau + \frac{(\frac{ds}{dt})^2}{\rho} n$$

速率是速度的大小，即在言词上或代数符号上都没有指出方向的速度。

5. 圆周运动

运动学方程(角位置)：$\theta = \theta(t)$

角位移：$\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$

角速度：$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

角加速度：$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

角量与线量之间的关系：$v = r\omega$，　$a_\tau = r\beta$，　$a_n = r\omega^2$

质点完成一个圆周所用时间：$T = \frac{2\pi r}{v}$（r 为圆周半径）。

6. 相对运动：一质点相对于两个相对平动参照系的速度变换关系为

$$v_a = v_r + v_e$$

称为速度变换定理。式中，v_a 为质点相对于绝对坐标系(定坐标系)的运动速度，叫做绝对速度；v_e 为动坐标系相对于定坐标系平动的速度，叫做牵连速度；v_r 为质点相对于动坐标系的运动速度，叫做相对速度。

加速度间的变换关系为

$$a_a = a_r + a_e$$

式中，a_a 为绝对加速度，a_e 为牵连加速度，a_r 为相对加速度。

若两参照系之间以恒定速度相对运动时

$$a_a = a_e$$

1.1.3 典型例题

1-1 一只兔子奔跑过一个停车场，停车场上面正巧画有一个直角坐标系，兔子的位置坐标对时间的函数为

$$x = -0.31t^2 + 7.2t + 28, \qquad y = 0.22t^2 - 9.1t + 30$$

式中，t 的单位为 s，x 和 y 的单位为 m。试求：

(1) 用单位矢量表示兔子在 $t = 15$ s 时刻的位矢，并求出其大小和角度。

(2) 以单位矢量表示它在 $t = 15$ s 时刻的速度 v，并求其大小和角度。

(3) 以单位矢量表示它在 $t = 15$ s 时刻的加速度 a，并求其大小及角度。

解 (1) 兔子位置的 x、y 坐标正是它的位矢的标量分量，于是可写出

$$r(t) = x(t)i + y(t)j$$

在 $t = 15$ s 时，标量分量为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$x = (-0.31)(15)^2 + (7.2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

$$y = (0.22)(15)^2 - (9.1)(15) + 30 = -57 \text{ m}$$

所以，在 $t=15$ s 时，

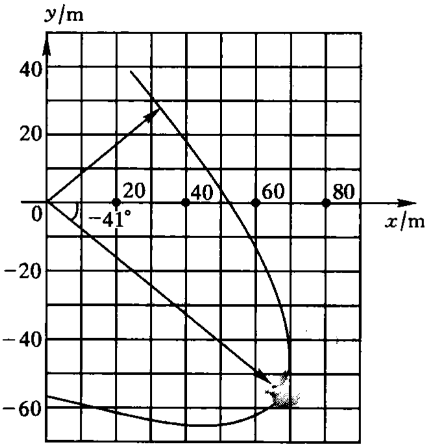
$$\boldsymbol{r} = 66\boldsymbol{i} - 57\boldsymbol{j} \quad (\text{m})$$

为求出 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向，应用矢量运算关系可得

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(66)^2+(-57)^2} = 87 \text{ m}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\left(\frac{-57}{66}\right) = -41^\circ$$

图中画出兔子从 $t=0$ 至 $t=25$ s 之间的路径。



题 1-1 图

(2) 可先求出兔子的速度分量，再求出速度 $\boldsymbol{v}$。

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0.31t^2 + 7.2t + 28)$$

$$= -0.62t + 7.2$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0.22t^2 - 9.1t + 30) = 0.44t - 9.1$$

在 $t=15$ s 时，$v_x = -2.1$ m/s，$v_y = -2.5$ m/s，因此，可得

$$\boldsymbol{v} = (-2.1 \text{ m/s})\boldsymbol{i} - (2.5 \text{ m/s})\boldsymbol{j}$$

注意，$\boldsymbol{v}$ 与兔子的路径相切。

(3) 先求兔子的加速度的分量，再求出加速度 $\boldsymbol{a}$。

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0.62t + 7.2) = -0.62 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0.44t - 9.1) = 0.44 \text{ m/s}^2$$

加速度两分量表达式中均不含时间 t，说明在整个兔子奔跑的过程中加速度不随时间发生变化，是一个恒量。

注释　兔子的奔跑过程被视为一个质点的运动。已知兔子的运动方程，通过微分法可求解出兔子运动的速度和加速度，但需要注意位矢、速度和加速度的矢量表示方法。由于 $\boldsymbol{a}$ 是一个恒量，故在整个兔子奔跑过程中，兔子的加速度都保持大小和方向不变。

1-2　一足球队中的球员能给足球以 25 m/s 的初速度，如果他要在球门前 50 m 处将足球踢进球门，已知球门上的水平杆离地 3.44 m。试求他应在什么倾角范围内将足球踢出？

解　设足球运动为抛物运动，则足球的运动方程为

$$x = v_0 \cos\theta t$$

$$y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

式中 θ 为足球的初速度方向与水平方向的夹角。消去 t 得足球的轨迹方程

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

根据题意有 $x=50$ m，$v_0=25$ m/s，$0 \leqslant y \leqslant 3.44$ m，代入上式，有

$$0 \leqslant 50\tan\theta - \frac{19.6}{\cos^2\theta} \leqslant 3.44$$

即

$$0 \leqslant 50\tan\theta - 19.6(\tan^2\theta + 1) \leqslant 3.44$$

解此不等式，得

$$0.4837 \leqslant \tan\theta \leqslant 2.0673$$

$$25.81° \leqslant \theta \leqslant 64.19° \tag{1}$$

和

$$\tan\theta \leqslant 0.6036 \quad 或 \quad \tan\theta \geqslant 1.9474$$

$$\theta \geqslant 62.82° \quad 或 \quad \theta \leqslant 31.12° \tag{2}$$

结合式(1)和式(2)，θ 角的范围为

$$25.81° \leqslant \theta \leqslant 31.12° \text{ 或 } 62.82° \leqslant \theta \leqslant 64.19°$$

注释 足球的运动可看成是水平方向上的质点匀速直线运动和竖直方向上的落体运动的合成，即抛体运动。应用抛体运动方程及 y 的取值范围解不等式，可求得 θ 的取值范围。

1-3 一质点沿半径为 R 的圆周，按 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ 的规律运动，式中 v_0，b 均为正常数。试求：(1) t 时刻质点加速度的大小；(2) t 为何值时加速度在数值上等于 b？(3) 当加速度达到 b 时，质点已沿圆周运行了多少圈？

解 (1) 根据题意，质点作圆周运动的速率为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - bt$$

在自然坐标系中，其加速度的切向分量和法向分量分别为

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -b$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

故加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \frac{\sqrt{R^2b^2 + (v_0 - bt)^4}}{R}$$

(2) 要使加速度 $a = b$，即

$$\frac{\sqrt{R^2b^2 + (v_0 - bt)^4}}{R} = b$$

由上式解得

$$t = \frac{v_0}{b}$$

(3) 由(2)知在时间 t 内质点运动的路程为

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2 = \frac{v_0^2}{2b}$$

所以，质点运行的总圈数为

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

注释 本题是自然坐标表示下的质点运动学第一类问题。即已知质点的运动学方程求速

度、加速度。须特别注意的是 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，也可写成 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t}$，而不是 $a_\tau=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$。

1-4　一质点作平面运动，已知其加速度为 $a_x=-A\omega^2\cos\omega t$，$a_y=-B\omega^2\sin\omega t$，其中 A，B，ω 均为正常数，且 $A\neq B$，$A\neq 0$，$B\neq 0$。运动的初始条件为 $t=0$ 时，$v_{0x}=0$，$v_{0y}=B\omega$，$x_0=A$，$y_0=0$。试求该质点的运动轨迹。

解　由加速度的定义

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

积分上两式，并代入初始条件，可得

$$v_x=v_{0x}+\int_0^t a_x\mathrm{d}t=0+\int_0^t -A\omega^2\cos\omega t\,\mathrm{d}t=-A\omega\sin\omega t \tag{1}$$

$$v_y=v_{0y}+\int_0^t a_y\mathrm{d}t=B\omega+\int_0^t -B\omega^2\sin\omega t\,\mathrm{d}t=B\omega\cos\omega t \tag{2}$$

再由速度的定义

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

分别积分上式，并代入初始条件和式(1)、式(2)，得

$$x=x_0+\int_0^t v_x\mathrm{d}t=A-A\int_0^t\omega\sin\omega t\,\mathrm{d}t=A\cos\omega t \tag{3}$$

$$y=y_0+\int_0^t v_y\mathrm{d}t=0+B\int_0^t\omega\cos\omega t\,\mathrm{d}t=B\sin\omega t \tag{4}$$

式(3)和式(4)为质点运动的运动学方程，消去参数 ωt，即得质点的轨迹方程

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

这一结果表明，该质点的运动轨迹为一个椭圆。

注释　这是一个典型的质点运动学第二类问题。质点运动的加速度是时间 t 的函数，问题的目的是求出运动学方程。因此由加速度、速度的定义以及初始条件直接积分即可求得结果。

1-5　已知一汽车（视为质点）由静止出发，它的加速度在 x 轴和 y 轴上的分量分别为 $a_x=10t$ 和 $a_y=15t^2$（SI 制）。试求 5 s 时质点的速度和位矢。

解　取质点的出发点为坐标原点。由题意知质点的加速度为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=10t,\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=15t^2 \tag{1}$$

由初始条件 $t=0$ 时 $v_{0x}=v_{0y}=0$，对式(1)进行积分，有

$$v_x=\int_0^t 10t\mathrm{d}t=5t^2,\quad v_y=\int_0^t 15t^2\mathrm{d}t=5t^3 \tag{2}$$

即

$$\boldsymbol{v}=5t^2\boldsymbol{i}+5t^3\boldsymbol{j} \tag{3}$$

将 $t=5$ s 代入式(3)有

$$\boldsymbol{v}=125\boldsymbol{i}+625\boldsymbol{j}\quad(\mathrm{m/s})$$

又由速度的定义 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$、$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 及初始条件 $t=0$ 时，$x_0=y_0=0$，对式(2)进行分离变量

并积分，有

$$x=\int_0^t 5t^2\mathrm{d}t=\frac{5}{3}t^3,\quad y=\int_0^t 5t^3\mathrm{d}t=\frac{5}{4}t^4$$

即

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=\frac{5t^3}{3}\boldsymbol{i}+\frac{5t^4}{4}\boldsymbol{j}\tag{4}$$

将 $t=5$ s 代入式(4)有

$$\boldsymbol{r}=\frac{625}{3}\boldsymbol{i}+\frac{3125}{4}\boldsymbol{j}\quad(\mathrm{m})$$

注释 本题属于已知质点运动的加速度(时间的函数)求解速度和位矢的运动学第二类问题。根据题意，要能够确定出初始条件。

1-6 一质点作一维运动，其加速度与位置的关系为 $a=-kx$，k 为正常数，已知 $t=0$ 时质点瞬时静止于 $x=x_0$ 处。试求质点的运动规律。

解 由加速度的定义和数学变换有

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kx$$

从而有

$$v\mathrm{d}v=-kx\,\mathrm{d}x\tag{1}$$

对式(1)进行积分，并代入初始条件 $x=x_0$ 时，$v=0$，

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^x -kx\,\mathrm{d}x$$

得

$$v^2=k(x_0^2-x^2)\tag{2}$$

由式(2)及速度的定义可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{(x_0-x^2)^{1/2}}=\pm\sqrt{k}\mathrm{d}t\tag{3}$$

对式(3)两边同时进行积分，并代入初始条件 $t=0$ 时，$x=x_0$，得

$$x=x_0\cos\sqrt{k}t\tag{4}$$

结果表明，质点作一个谐振动，振动振幅为 x_0，圆频率为$\sqrt{k}$。

注释 本题属于加速度与位置的函数关系的运动学第二类问题，此类问题一般不能直接积分，需作变量变换$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，然后进行求解。

1-7 一质点在半径为 0.10 m 的圆周上运动，其角位置变化关系为：$\theta=2+4t^3$(SI 制)。试求：(1) 在 $t=2$ s 时的法向加速度和切向加速度；(2) 当切向加速度的大小恰等于总加速度大小的一半时，θ 的值；(3) 切向加速度与法向加速度的值相等时，t 的值。

解 (1) 根据运动学方程，可得角速度和角加速度分别为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=12t^2,\qquad \beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=24t$$

法向加速度和切向加速度分别为

$$a_n=r\omega^2=0.1\times(12t^2)^2=0.1\times(12\times2^2)^2=2.30\times10^2\quad(\mathrm{m/s})$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r\beta = 2.4t = 2.4 \times 2 = 4.8\ (\mathrm{m/s})$$

（2）根据题意 $a_\tau = \frac{a}{2}$，有

$$4a_\tau^2 = a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$$

可得

$$3a_\tau^2 = a_n^2$$

即

$$3(24rt)^2 = r^2(12t^2)^4$$

由此可得

$$t^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

因此，此时刻质点的 θ 值为

$$\theta = 2 + 4t^3 = 2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 3.15\ (\mathrm{rad})$$

（3）由题意要求 $a_n = a_\tau$，即

$$r(12t^2)^2 = 24rt$$

解得

$$t = 0.55\ (\mathrm{s})$$

注释　本题为质点作圆周运动的角坐标表示下的运动学第一类问题。其运动学方程为角位置随时间变化关系式，求解中应用角量与线量之间的关系，即可求解出 a_τ，a_n。

1-8　有一条宽度均匀的小河，河宽为 d，已知靠岸边水流速度为零，水的流速按正比增大，河中心水流速度最快，流速为 v_0。现有一人以不变的划船速度 $\boldsymbol{u}$ 沿垂直于水流方向划一艘小船（视为质点）从河岸某点渡河。试求小船的运动轨迹。

解　取河岸为参照系，建立如图所示的直角坐标系，由题意可知，初始条件为

$$t = 0\ \text{时},\ x_0 = y_0 = 0,\ v_{0x} = 0,\ v_{0y} = u \qquad (1)$$

由题意，水流速度可表示为

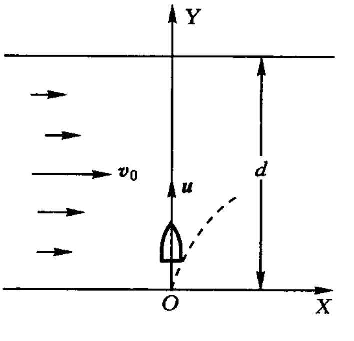
$$v_{水} = ky$$

又当 $y = \frac{d}{2}$ 时，$v_{水} = v_0$，故

$$k = \frac{2v_0}{d}$$

因此

$$v_{水} = \frac{2v_0}{d}y \qquad (2)$$



题1-8图

对小船有

$$v_x = v_{水} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = u = \frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

结合初始条件和式(1)、(2)，积分式(3)，得

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v_{水}\,\mathrm{d}t, \quad x = \frac{uv_0}{d}t^2$$
$$\int_0^\theta \mathrm{d}y = \int_0^t u\mathrm{d}t, \quad y = ut \tag{4}$$

对式(4)消去 t,得

$$x = \frac{v_0}{ud}y^2 \tag{5}$$

这就是小船渡河的运动轨迹方程,其为一条抛物线。需要注意的是,式(5)只适用于小船划至河中心之前,对于后半程小船的轨迹读者很容易从对称性获得

$$x = \frac{dv_0}{u} + 2\left(\frac{y}{u} - \frac{y^2}{2du}\right)v_0 \tag{6}$$

注释 本题首先要建立恰当的坐标系,以取得便于计算的初始条件。小船在河流中参与了两种运动,一是小船所具有的沿 Y 轴方向的运动,二是河流沿 X 轴运动对小船的影响。因此,确定式(3)是一个关键点。根据速度定义和初始条件,求解式(4),即可确定出小船的运动轨迹。

1-9 一质点以初速度 v_0 作一维运动,所受阻力与其速度成正比。试求当质点速度为 $\frac{v_0}{n}(n>1)$ 时,质点经过的距离与质点所能行经的总距离之比。

解 质点运动是一维的,故取一维坐标 OX,原点($x=0$)为质点在 $t=0$ 时刻以初速度 v_0 开始运动的位置。

由题意,质点的加速度可表示为

$$a = -kv \tag{1}$$

式中 k 为大于零的常数。

解法一 由加速度的定义,作变量替换有

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kv$$

即

$$\mathrm{d}v = -k\mathrm{d}x$$

由初始条件 $x=0$ 时 $v=v_0$,有

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = -k\int_0^x \mathrm{d}x$$

积分得

$$v = v_0 - kx \tag{2}$$

由速度的定义及式(2),有

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_0 - kx} = \mathrm{d}t$$

由初始条件 $t=0$ 时 $x=0$,积分得

$$\ln\frac{v_0 - kx}{v_0} = -kt$$

即

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \tag{3}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com