有序集中序列的极限 Zorn引理集合的基数

吕通庆　编著

对外贸易教育出版社

有序集中序列的极限
Zorn引理　集合的基数

吕通庆　编著

对外贸易教育出版社

内 容 简 介

本书共分五节，前两节叙述集合论的基础知识，第三节讨论一般有序集中序列的上、下极限，第四节给出Zorn引理的可接受性论证，第五节叙述集合的基数，并给出集合的基数的可比较性论证。

本书概念清楚，推理严谨，语言准确，叙述详细。可作为集合论选修课教材，也可作为有关课程的教学参考书，还可作为自学者用书。

有序集中序列的极限

Zorn引理 集合的基数

吕通庆 编著

*

对外贸易教育出版社出版

（北京和平街北口北土城）

沈阳市新民印刷厂印刷

锦州教材图书发行公司发行

*

开本 787×1092 1/32 印张 3.75 字数 84千字

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数1—1，500册

ISBN 7—81000—033—0/O·002

统一书号：13321·08 定价：1.20元

序

众所周知，集合理论是近代数学的理论基础。但是，由于教学时数的限制，许多以集合理论为基础的课程不得不忍痛割爱，把集合论中的一些重要内容，如Zorn引理的可接性论证，任何两个集合的基数的可比较性论证，以及集列的上（或下）极限与数列的上（或下）极限之间的关系等略去。为了使学生在不长的时间内比较顺利地获得这些知识，我认为开一门有关集合理论的选修课是必要的和可行的，并在多年教学实践与研究的基础上编写了这本书。它可以做为选修课的教材，也可以做为有关课程的教学参考书。

由于水平有限和时间仓促，错漏之处定会存在，请同志们批评指正。

吕 通 庆

于一九八五年二月

目 录

第一节　集合及其运算

一　集合

集合是数学中最基本的概念之一，它是无法用其它概念定义的。一般说来，我们称具有某种特定性质的事物的全体为“集合”，其中的事物称为这个集合的“元素”。这里所谓的特定性质，乃是判别一个事物是否为这个集合的元素的条件。例如，全体自然数构成一个集合，这里所谓的事物具有某种特定性质，就是指它是自然数。再如，甲、乙、丙三样东西也可以组成一个集合，这里所谓的事物具有某种特定性质，指的是它是甲、乙、丙三者之一。

由满足条件P的元素x组成的集合，用

$$\{x \mid x\text{满足}P\}$$

表示。例如，全体自然数组成的集合，用

$$\{x \mid x\text{为自然数}\}$$

表示；由甲、乙、丙三样东西组成的集合，用

$$\{x \mid x\text{为甲、乙、丙三者之一}\}$$

表示。

如果有可能的话，也可以把集合中的元素都写出来，再用大括号括起来，以表示这个集合。例如，

$$\{x \mid x\text{为甲、乙、丙三者之一}\}$$

可用

$$\{\text{甲、乙、丙}\}$$

表示；而

$$\{x \mid x\text{为自然数}\}$$

可用

$$\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

表示。

今后，对于分别由前n个自然数、全体自然数、全体整数、全体正整数、全体负整数、全体有理数、全体实数、全体复数构成的集合，各自简记为J_n、J、Z、Z^+、Z^-、Q、R、C.

在集合中，相同的元素只算一个。因此，

$$\begin{aligned}\{x, y\} &= \{x, x, y, x, y, y, \cdots, y\}\\ &= \{x, x, \cdots, x, y, y, \cdots, y, \cdots\}\end{aligned}$$

在集合中，对于哪个元素写在前，哪个元素写在后，并不介意。因此，

$$\begin{aligned}\{x, y, z\} &= \{z, x, y\} = \{y, z, x\}\\ &= \{x, z, y\} = \{z, y, x\} = \{y, x, z\}\end{aligned}$$

我们称只有一个元素的集合为单元素集。

我们规定没有元素的集合为空集，记为J_0.

二　属于　包含

定义　设A为集合，若x为A的元素，则称x属于A，记A为$x \in A$. 此时也称A含有x.

定义　设A，B为集合，若对任$x \in A$，都有$x \in B$，则称A为B的子集，而称B为A的延拓集，或称A含于B，或B包含A，记为$A \subseteq B$，或$B \supseteq A$. 如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A等于B，记为$A = B$. 如果$A \subseteq B$而$B \nsubseteq A$，则称A为B的严格子集，而称B为A的严格延拓集，或称A严格含于B，或称B严

格包含A，记为$A \subset B$，或$B \supset A$.

由定义立知，$J_0 \in \{J_0\}$，$J_0 \subset \{J_0\}$.

定义 设S为集合，则称

$$\{E \mid E \subseteq S\}$$

为S的幂集，记为p(S).

例 2 设$S = \{1, 2, 3\}$，则

$$p(S) = \{J_0, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$$

三 集合的运算

定义 设A，B为集合，则称

$$\{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$$

为A与B的并集，记为$A \cup B$.称

$$\{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$

为A与B的交集，记为$A \cap B$. 若$A \cap B = J_0$，则称A与B不相交。称

$$\{x \mid x \in A \text{而} x \notin B\}$$

为A与B的差集，记为$A - B$. 特别地，若$A \supseteq B$，则称$A - B$为B在A中的余集，记为$C_A B$.

由定义立知，$A \cup A = A = A \cap A$，$C_A A = J_0$.

定理 3—1 设A，B为集合，则

（1） $A \cup B = B \cup A$;

（2） $A \cap B = B \cap A$;

（3） $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

定理 3—2 设A，B，C为集合，则

（1） $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$;

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$;

(5) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(6) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

定理3—3 设A，B，C为集合，那么

(1) 若A，$B\sqsubseteq C$，则$A\cup B\sqsubseteq C$;

(2) 若A，$B\sqsupseteq C$，则$A\cap B\sqsupseteq C$.

定理3—4 设S为集合，A，$B\in p(S)$，则

(1) $C_S(A\cup B)=C_SA\cap C_SB$;

(2) $C_S(A\cap B)=C_SA\cup C_SB$;

(3) $A-B=A\cap C_SB$.

以上四个定理的证明留给读者。

四 有序组

定义 记

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

则称(x,y)为$\{x,y\}$的有序对。

定理4—1 $(x,y)=(u,v)$的充要条件是$x=u$，$y=v$.

证明 充分性显然，只证必要性。反证之。

假若不然，不妨设$x\neq u$，则$\{x\}\in(x,y)$，$\{x\}\notin(u,v)$.此与$(x,y)=(u,v)$矛盾。证毕。

定义 记

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} (x_1, x_2), & n=2 \\ ((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n), & n \in J - J_2 \end{cases}$$

则称$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$的有序组。

定理4—2 设$n \in J - J_1$，则$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$的充要条件是$x_i = y_i$，$i \in J_n$.

证明 由定理4—1，知$(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$的充要条件是$x_i = y_i$，$i \in J_2$. 假设$(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$的充要条件是$x_i = y_i$，$i \in J_k$，而由定理4—1，知$(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = ((x_1, x_2, \cdots, x_k), x_{k+1}) = ((y_1, y_2, \cdots, y_k), y_{k+1}) = (y_1, y_2, \cdots, y_{k+1})$的充要条件是$(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$，$x_{k+1} = y_{k+1}$，故$(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = (y_1, y_2, \cdots, y_{k+1})$的充要条件是$x_i = y_i$，$i \in J_k$，$x_{k+1} = y_{k+1}$，即$x_i = y_i$，$i \in J_{k+1}$. 依数学归纳法，知对任$n \in J - J_1$，都有$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$的充要条件是$x_i = y_i$，$i \in J_n$. 证毕。

五 Cartesian积

定义 设A，B为集合，则称

$$\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

为A与B的Cartesian积，记为$A \times B$.

定理5—1 设A，B为集合，则$A \times B = J_0$的充要条件是$A = J_0$或$B = J_0$.

证明 先证必要性。反证之。

假若不然，即$A \neq J_0$，$B \neq J_0$，则存在$a \in A$，$b \in B$，于是$(a, b) \in A \times B$，与$A \times B = J_0$矛盾。

再证充分性。反证之。

假若不然，则存在$(a, b) \in A \times B$，故$a \in A$，$b \in B$，说明$A \neq J_0$，$B \neq J_0$，与题设矛盾。证毕。

定理5—2 设A，B，C，D为非空集，则$A \times B = C \times D$的充要条件是$A = C$，$B = D$.

证明 充分性显然，只证必要性。

任取$a \in A$，$b \in B$，则$(a, b) \in A \times B$，而$A \times B = C \times D$，故$(a, b) \in C \times D$，于是$a \in C$，$b \in D$，可见$A \subseteq C$，$B \subseteq D$. 同理，$C \subseteq A$，$D \subseteq B$. 因此$A = C$，$B = D$. 证毕。

推论 设A，B为非空集，则$A \times B = B \times A$的充要条件是$A = B$.

定理5—3 设A，B，C为集合，则

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$；

(2) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$；

(3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$；

(4) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$；

(5) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$；

(6) $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$.

证明 只证(3).

先证$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

不妨设$A \times (B \cup C) \neq J_0$. 任取$(x, y) \in A \times (B \cup C)$，则$x \in A$，$y \in B \cup C$，故$y \in B$或$y \in C$，不妨设$y \in B$，于是$(x, y) \in A \times B$，从而$(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$，说明$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

再证 $(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$.

不妨设 $(A\times B)\cup(A\times C)\neq J_0$. 任取 $(x, y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$，则 $(x, y)\in A\times B$或 $(x, y)\in A\times C$. 不妨设 $(x, y)\in A\times B$，于是$x\in A$，$y\in B$，从而$y\in B\cup C$，因此 $(x, y)\in A\times(B\cup C)$. 说明 $(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$. 证毕。

定义 设A_i为集合，$i\in J_n$，则称

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_i\in A_i,\ i\in J_n\}$$

为A_1，A_2，…，A_n的Cartesian积，记作 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$. 特别地，当$A_i=A$，$i\in J_n$时，记 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i=A^n$.

规定$A^1=A$.

由定义立知，

$$\prod_{i=1}^{2} A_i=A_1\times A_2,$$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} A_i&=\{(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)\mid x_i\in A_i\ ,\ i\in J\}\\&=\{((x_1, \cdots, x_{n-1}), x_n)\mid\\&\qquad(x_1, \cdots, x_{n-1})\in\prod_{i=1}^{n-1} A_i,\ x_n\in A_n\}\\&=(\prod_{i=1}^{n-1} A_i)\times A_n,\ n\in J-J_2\end{aligned}$$

定理5—4 设A_i为集合，$i\in J_n$，则 $\prod_{i=1}^{n} A_i=J_0$的充要条件是存在$i_0\in J_n$，使$A_{i_0}=J_0$.

定理5—5 设A_i，B_i为非空集，$i\in J_n$，则 $\prod_{i=1}^{n} A_i=\prod_{i=1}^{n} B_i$的充要条件是$A_i=B_i$，$i\in J_n$.

这两个定理的证明留给读者。

第二节　关系　映射

一　关系

定义　设A，B为非空集，R为$A\times B$的非空子集，则称R为A到B的关系。若$(a, b)\in R$，则称a与b具有关系R，记为aRb.特别地，称A到A的关系为A内的关系。

例1—1　设$A=[0, 1]$，$B=[-1, 1]$，

$$f=\{(x, y)\mid x\in A,\ y\in B,\ y=x^2\}$$

$$g=\{(x, y)\mid x\in A,\ y\in B,\ y^2=x\}$$

则f，g均为A到B的关系，xfy表示$y=x^2$，而xgy表示$y^2=x$。

例1—2　设A为某学习小组，

$$R=\{(x, y)\mid x,\ y\in A,\ x\text{与}y\text{同性别}\}$$

$$T=\{(x, y)\mid x,\ y\in A,\ x\text{与}y\text{同年令}\}$$

则R与T均为A内的关系，xRy表示x与y同性别，而xTy表示x与y同年令。

例1—3　设A为非空集，

$$R=\{(x, y)\mid x,\ y\in A,\ x=y\}$$

则R为A内的关系。xRy表示$x=y$，我们对R与$=$不加区别。

例1—4　设$J_0\subset A\subseteq R$，

$$S=\{(x, y)\mid x,\ y\in A,\ x\leqslant y\}$$

$$T=\{(x, y)\mid x,\ y\in A,\ x\geqslant y\}$$

则S与T均为A内的关系。xSy表示$x\leqslant y$，xTy表示$x\geqslant y$，

我们对S与≤、T与≥都不加以区分。

例1—5 设S为集合，

$$R=\{(E,F)\mid E,F\in p(S),E\subseteq F\}$$

$$T=\{(E,F)\mid E,F\in p(S),E\supseteq F\}$$

则R与T均为p(S)内的关系。ERF表示$E\subseteq F$，ETF表示$E\supseteq F$，我们对R与⊆、T与⊇都不加以区分。

定义 设R为A到B的关系，则称

$$\{(x,y)\mid x\in A,y\in B,xRy\}$$

为R的图形，记作G(R)．

由定义立知，若R为A到B的关系，则R=G(R)．

二 映射

定义 设A，B为非空集，f为A到B的关系，若对任$x\in A$，都存在唯一的$y\in B$，使xfy，则称f为A到B的映射，记为

$$f:x\mapsto y,\ x\in A,\ y\in B$$

或

$$f:A\mapsto B$$

称y为x在f之下的象，记为f(x)．若$A_0\subseteq A$，则称

$$\{f(x)\mid x\in A_0\}$$

为A_0在f之下的象，记为$f(A_0)$．称A为f的定义域，记为D(f)．称f(A)为f的值域，记为D(f)．若$B_0\subseteq B$，则称

$$\{x\mid x\in A,f(x)\in B_0\}$$

为B_0在f之下的逆象，记为$f^{-1}(B_0)$．特别地，当$B\subseteq R$（或C）时，则称f为A上的实（或复）函数。

由定义立知，例1—1中的f是A到B的映射，而g则不是A到B的映射。

定理2—1 设$f:A\to B$，$g:C\to D$，则$f\sqsubseteq g$的充要条件是$A\sqsubseteq C$，且当$x\in A$时$f(x)=g(x)$.

证明 先证必要性。

任取$x\in A$，则$(x, f(x))\in G(f)$，由题设可知，$G(f)\sqsubseteq G(g)$，故$(x, f(x))\in G(g)$，于是存在$u\in C$，使

$$(x, f(x))=(u, g(u))$$

从而$x=u\in C$，$f(x)=g(u)=g(x)$，说明$A\sqsubseteq C$，$f(x)=g(x)$，$x\in A$.

再证充分性。

任取$z\in f$，则$z\in G(f)$，故存在$x\in A$，使$z=(x, f(x))$.再由题设可知，$x\in C$，$z=(x, g(x))$，说明$z\in G(g)$，于是$z\in g$，可见$f\sqsubseteq g$.证毕。

定理2—2 设$f:A\to B$，$g:C\to D$，则$f=g$的充要条件是$A=C$，且当$x\in A$时$f(x)=g(x)$。

证明 这是定理2—1的直接推论。证毕。

定义 设$f:A\to B$，$g:C\to D$，若$f\sqsubseteq g$，则称f为g在A上的限制，记为$g|A$；而称g为f在C上的延拓。

今后，常把

$$f:x\mapsto y,\ x\in A,\ y\in B$$

简记为

$$f:x\mapsto y,\ x\in A$$

又记

$$M(A\to B)=\{f\mid f:A\to B\}$$