辽宁省普通中等专业学校统编教材

数学

工科类专业通用

辽宁省中等专业学校数学教材编写组 编

第3册

（修订版）

辽宁大学出版社

辽宁省职业技术教育教学用书编审委员会审定 编号：0094

辽宁省普通中等专业学校统编教材

数　学

（第三册）

（工科类专业通用）

辽宁省中等专业学校数学教材编写组　编

辽 宁 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

数学　第三册/辽宁省中等专业学校数学教材编写组编.
-沈阳：辽宁大学出版社，1996.6
中等专业学校教材. 工科类
ISBN　7-5610-3125-4

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 辽…　Ⅲ. 数学-专业学校-教材　Ⅳ. O12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 02495 号

数学(第三册)
(工科类专业通用)
辽宁省中等专业学校数学教材编写组　编

辽宁大学出版社出版发行(沈阳市崇山中路 66 号)
丹东日报印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：8.75　字数：193 千
1997 年 6 月第 2 版　1999 年 6 月第 3 次印刷
印数：33001—44000

责任编辑：马　静　封面设计：刘桂湘
责任校对：王化久

ISBN 7-5610-3125-4
G·1056　定价：9.00 元

编委会主任： 郭燕杰

编委会副主任： 王新民　马庆武　贾景华
王仁成　章雪冬　李大发

编　委（以姓氏笔划为序）

于殿生　马　骦　马庆武　王　剑
王仁成　王化久　王新民　李大发
郭燕杰　章雪冬　贾景华

主　编： 李大发　贾景华

副主编： 于殿生　马　骦　王化久
王　剑

主　审： 王仁成

前　言

数学课程是中专教学的一门重要基础课，高质量的教材是提高教学质量的基础。尽管现行中专数学教材版本较多，并且各具特色，但大都是根据1991年国家教委颁发的教学大纲编写的。随着近年来中等职业教育的迅速发展和教学改革的不断深入，这些教材在知识的深度广度、教学时数安排以及体现职教特色等方面都不能完全适应当前中专教学的需要，特别是1993年国家教委对九年义务教育初中数学教学内容进行了较大幅度的调整，现行教材无法衔接。鉴于这种情况，考虑到我省中专教育教学改革的实际和数学教材建设的基础，为满足当前中专数学教学的实际需要，在省教委职教处的指导下，根据国家近年来对中专数学课教学要求的精神，由省中专数学课程组组织编写了这套教材。

本书编写中，本着保证基础，加强应用，简明精炼，难易适度的原则，力求突出职业教育特色，体现教育教学改革的精神。在保证教材内容科学、准确和知识的内在联系的基础上，对以往教材中过深、过多、过难的内容进行了精简的调整；在基本概念、定理、定律的表述和论证中，力求简炼、科学直观、通俗、实用；在例题、习题的选编上强调典型性和具有举一反三的功效。尤其是注意理论联系实际，侧重培养学生运用所学知识解决实际问题的能力。同时考虑到与目前初中数学课程相衔接，将原中专数学教材内容做了必要的删减或补充。

本教材适用于普通中专工科各专业，也可供其他中等职业学校相应专业参照使用。本套教材分基础数学（第一、二、三册）和应用数学（第四册）两部分。招收初中毕业生的学校使用一至四册；招收高中毕业生的学校使用三至四册。文中带有※号部分为选学内容。

本套教材由李大发、贾景华统串书稿，编委会集体讨论定稿，经辽宁省职业技术教育教学用书审定委员会审定通过。

本册是基础数学第三册，包括极限与连续、一元函数微分学、积分学等内容。参加各章编写的人员有：张喜孝、辛虹、陈博、曹成龙、吴翎等，董丽萍、韩杰参加了部分章节的编写。本册统稿为王化久，主审为李景春。

在本教材的编写过程中，辽宁大学裴英潮研究员、车维毅教授、赵云桥副教授提出了许多有益的建议，朱丽梅、刘静老师对本册的习题做了认真的核对，在这里一并表示感谢。

由于时间仓促，水平有限，不当之处敬请读者批评指正，以便修订。

辽宁省中专数学教材编写组

一九九六年四月

目　　录

第十五章　函数极限与连续

极限是数学中极其重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础。本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，建立函数极限的概念，并讨论函数的连续性。

§15—1　函数及其特性

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义　如果对于数集 D 中的每一个数 x，按照某种对应关系，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$。x 叫做自变量，数集 D 叫做函数的定义域，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的值域（如图 15—1 所示）。

在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 $x\in D$ 都有确定的 $y\in M$ 与它对应。因此，常量 $y=C$ 也是函数，因为对于 $x\in R$，y 都有确定的 C 值与它对应。即 $y=C$ 是符合函数的定义的。

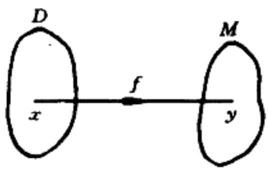

图 15－1

2. 函数的定义域

当我们研究函数时，必须注意函数的定义域。在解决实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域。

例如，圆的面积 $A=\pi r^2$，因半径 r 是表示长度的，故只能取任意的正数，所以函数 $A=\pi r^2$ 的定义域为无限区间 $(0,+\infty)$。对于函数用解析式表示时，确定函数定义域的原则是：使解析式的运算有意义。一般可按如下要点来求：

(1)当函数为分式时，分母不能为零；

(2)当函数为偶次根式时，根号内的式子必须大于或等于零；

(3)当函数为对数式时，真数必须大于零；

(4)在三角函数与反三角函数式中，要符合它们的定义域；

(5)如果函数表示式中含有分式、根式、对数式、三角函数及反三角函数时，则应取各部分定义域的交集。

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^2-2x+3$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$；　　(4) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

解 (1) $y=x^2-2x+3$

因为当 x 取任何实数时，y 都有确定的值与它对应，所以函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

当函数是多项式时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$

因为 $x^2-1\neq 0$，$1-x^2\geqslant 0$ 时，函数 y 才有意义，解得 $x\neq\pm 1$ 又 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以所求函数定义域为 $(-1,1)$。

(3) $y=\lg\frac{x}{x-2}$

因为$\frac{x}{x-2}>0, x-2\neq 0$时，函数 y 才有意义，解得 $x>2$ 或 $x<0$，所以所求函数定义域为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$。

(4) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\frac{x}{2}$

因为 $x^2-4\geqslant 0, \left|\frac{x}{2}\right|\leqslant 1$ 时，函数 y 才有意义，解得 $|x|\geqslant 2$，又 $|x|\leqslant 2$，所求函数定义域为 $x=\pm 2$.

由(4)可看出，函数的定义域还可以是些孤立的点

同时我们指出，两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才认为是相同的。

例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应关系都相同，所以它们是相同的函数。

又如，函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$，它们的定义域不相同，所以它们是不同的函数。

再如，函数 $y=x$ 与 $y=-x$，它们的对应关系不相同，所以它们是不同的函数。

3. 函数与函数值的记号

$y=f(x)$是表示 y 是 x 的函数，其中"f"表示 y 与 x 间某种确定的对应关系。y 与 x 之间的对应关系可以是任意的，如果同时讨论几个不同函数时，就得用不同字母"f"、"g"、"φ"，…表示 y 与 x 之间的不同对应关系，且分别记作 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=\varphi(x)$等等。

当 $x=x_0$ ($x_0\in D$)时，对应的函数值用记号 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$表示，并称函数 $y=f(x)$在 x_0 处有定义。

例 2 已知 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，求 $f(1)$、$f(0)$、$f(-2)$、$f(a^2)$.

解 $f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$；　　$f(0)=\frac{1}{1+0}=1$；

$f(-2)=\frac{1}{1+(-2)}=-1$；　　$f(a^2)=\frac{1}{1+a^2}$.

例 3 若 $\varphi(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$，求 $\varphi(-2)$，$\varphi(a)$.

解 $\varphi(-2)=\frac{|-2-2|}{-2+1}=-4$，

$\varphi(a)=\frac{|a-2|}{a+1}$.

有时，一个函数的自变量在不同的范围内用不同的式子表示。

如 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$

是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$；当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$. 它的图象如图 15—2 所示。

自变量在不同的范围内用不同的式子来表示的函数叫做分段函数。

求分段函数的函数值时，应注意把自变量的值代入相应取值范围内的表达式进行计算。如在上面的分段函数中，$f(4)=\sqrt{4}=2$，$f(-4)=-(-4)=4$.

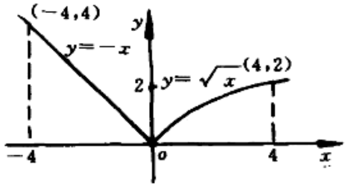

图 15－2

二、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 如果函数 $f(x)$ 对于定义域内任意 x，都有

$f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 叫做奇函数；如果函数 $f(x)$ 对于定义域内任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 就叫做偶函数。若 $f(x)$ 既非奇函数，又非偶函数，那么 $f(x)$ 叫做非奇非偶函数。

例如，函数 $f(x)=x^3$ 对于定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的一切 x，都有 $f(-x)=-x^3=-f(x)$，所以函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数。又如函数 $\varphi(x)=x^2$ 对于定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内一切 x，都有 $\varphi(-x)=x^2=\varphi(x)$，所以 $\varphi(x)=x^2$ 是偶函数。

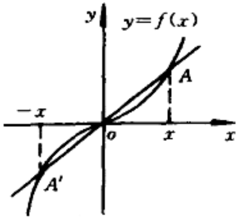

图 15－3

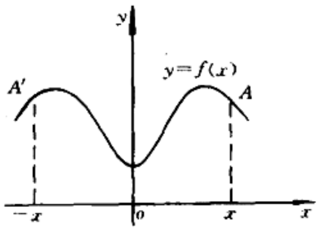

图 15－4

奇函数，在 x 和 $-x$ 处对应的函数值的绝对值相等，符号相反，其图形关于原点对称，如图 15—3 所示；偶函数，在 x 和 $-x$ 处对应的函数值相等，其图形关于 y 轴对称，如图 15—4 所示。同时由定义可知奇函数和偶函数的定义域必须是关于原点对称的。

例 4 判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=x^4-2x^2$； (2) $y=\sin x$；

(3) $y=\cos x$； (4) $f(x)=x^2+x$.

解 (1) $f(x)=x^4-2x^2$ 是偶函数，因为对于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$.

(2) $y=\sin x$ 是奇函数，因为对于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有

$\sin(-x)=-\sin x$.

(3) $y=\cos x$ 是偶函数，因为对于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $\cos(-x)=\cos x$.

(4) $f(x)=x^2+x$ 是非奇非偶函数，因为对于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$，那么 $f(-x)$ 既不等于 $-f(x)=-(x^2+x)$，又不等于 $f(x)=x^2+x$，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数。

2. 函数的单调性

定义 函数 $f(x)$ 对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加的，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调增加区间，若 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少的，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调减少区间。

直观地说，单调增加的函数，它的图象是随着 x 的增加而上升的曲线如图 15—5 所示；单调减少的函数，它的图象是随 x 的增加而下降的曲线如图 15—6 所示。

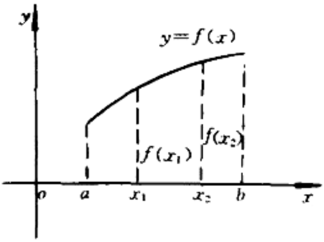

图 15—5

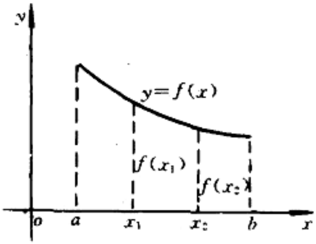

图 15—6

例如 $y=\log_a x$，当 $a>1$ 时在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的；当 $0<a<1$ 时在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调减少的，如图 15—7 所示。

又如 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$内是单调增加的;在$(-\infty,0)$内是单调减少的;但在定义域$(-\infty,+\infty)$内却不是单调函数如图 15—8 所示。

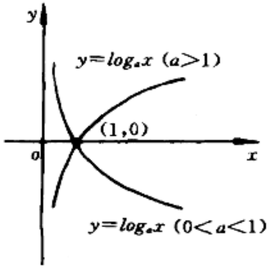

图 15－7

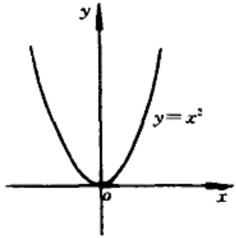

图 15－8

3. 函数的周期性

定义　给定函数 $f(x)$,如果存在一个不为零的正数 L,对于定义域内的一切 x,使得等式:

$f(x+L)=f(x)$恒成立,

则函数 $f(x)$叫做周期函数。通常把满足这个等式的最小正数 L 叫做函数的周期。

其图象的特点:自变量在定义域内每隔长度为 L(L 为周期)的相邻区间上,图象有相同的形状,如图 15—9 所示。

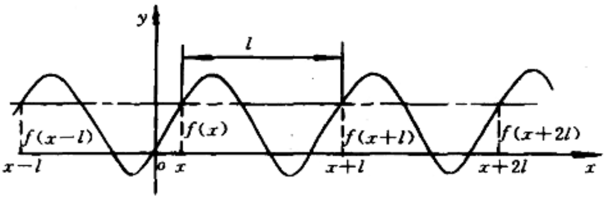

图 15－9

我们知道，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\operatorname{tg}x$ 和 $y=\operatorname{ctg}x$ 都是以 π 为周期的周期函数。函数 $y=A\sin(wx+\varphi)(w>0)$ 是以 $\frac{2\pi}{w}$ 为周期的周期函数。

对于周期函数，可选长度等于周期的一个区间，来代替在整个定义域上的研究。

4. 函数的有界性

定义　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，对于区间 (a,b) 内的一切 x，不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 恒成立，那么就称 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界。如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界。

上述定义也适用于闭区间的情形。

例如，函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x\in R$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$。

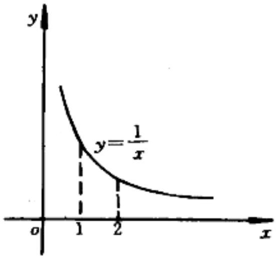

图 15—10

又如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，因为对于区间 $(1,2)$ 内的一切 x，都有 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$，但是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 值都成立，如图 15—10 所示。

练　习

填空

1. 记号 $f(x)$ 与 $f(a)$ 的区别是____________。

2. 设 $f(x)=\frac{2-x}{x+1}$,则 $f(0)=$ ________, $f(1)$ ____________, $f(a)$ $=$ ________。

3. $y=\frac{1}{x+1}$ 的定义域为 ____________; $y=\frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为 ________。

4. $y=\frac{x}{x}$ 与 $\varphi(x)=1$ 是不是相同的函数?

答 ____________,其原因是 ____________。

5. 若 $y=\mathrm{tg}x$ 是增函数,而 $y=\sin x$ 是减函数,则角 x 所在的象限为 ____________。

习题 15—1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=x^4-2x^2+3$; (2) $y=\ln x^2$;

(3) $y=\sqrt{5-2x}$; (4) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$;

(5) $y=10^{\sqrt{16-x^2}}$; (6) $y=\sqrt{x^2-4}+\lg(x-2)$;

(7) $y=\lg\sin x$; (8) $y=\arccos(x-3)$.

2. 已知 $f(x)=\ln x$,求 $f(1)$, $f(\frac{1}{e})$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}-x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -x+1 & x>0\end{cases}$ 求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$.

4. 判断下列各对函数是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\frac{2x^2-2}{x-1}$ 和 $\varphi(x)=2(x+1)$;

(2) $f(x)=\ln x^2$ 和 $\varphi(x)=2\ln x$;

(3) $f(x)=x$ 和 $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$;

(4) $f(x)=x$ 和 $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

5. 证明函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加的。

6. 判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=x^3-2x$; (2) $\varphi(x)=\mathrm{tg}x$;

(3) $f(x)=1+x^2$; (4) $\varphi(x)=x^2+x^3$;