

机械工程控制基础

柳洪义 原所先 编著



1001010101



NEUPRESS
东北大学出版社

机械工程控制基础

机械工业出版社



机械工业出版社

机械工程控制基础

柳洪义 原所先 编著

东北大学出版社

内 容 简 介

本书是按照教育部最新专业设置“机械工程与自动化”专业培养目标编写的。在论述经典控制论时,着重介绍了系统性能校正及设计方法,以期使读者在学完本课程后,达到能进行系统设计的目的。在讲述连续系统的分析与设计之后,论述离散系统的分析与设计问题,使读者掌握计算机控制系统分析与设计的基础知识。本书涉及的内容广泛,适合工程技术人员及研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械工程控制基础/柳洪义,原所先编著. —沈阳:东北大学出版社,
1999.2(2002.8重印)

ISBN 7-81054-383-0

I. 机… II. ①柳… ②原… III. 机械工程-控制系统 IV. TH

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 03383 号

出 版 者: 东北大学出版社

(邮编: 110004 地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号)

出 版 人: 李毓兴

印 刷 者: 沈阳市昌通彩印厂

发 行 者: 东北大学出版社发行

开 本: 787mm×1092mm 1/16

字 数: 243 千字

印 张: 9.625

出版时间: 1999 年 2 月第 1 版

印刷时间: 2002 年 8 月第 2 次印刷

责任编辑: 刘 莹

封面设计: 唐敏智

责任出版: 秦 力

定 价: 19.50 元

垂询电话: 024—83680267 (社务办)

024—83680265 (传 真)

83687331 (发行部)

83687332 (出版部)

E-mail: neuph@neupress. com

http: //www. neupress. com

前 言

根据我国科学技术发展的需要,特别是面对 21 世纪机械工业发展的需要,教育部对我国高等学校机械类专业的专业设置做了进一步调整。本书是根据调整后的“机械工程与自动化”专业培养目标需要编写的。

新的专业培养目标提高了对学生有关机械工程自动控制知识的要求。“机械工程控制基础”是“机械工程与自动化”专业学生的必修课。通过这门课程的学习,能使學生掌握分析和设计机械工程中自动控制系统的基本技能。为此,本教材的内容较现有教材做了相应的变动。主要体现在:

① 加强了“系统的性能校正”章节(第 7 章)。系统的性能校正解决如何设计一个自动控制系统的问题。通过这章的学习,使学生提高对控制系统性能的理解,掌握设计机械工程中自动控制系统的基本技能,具体地体会到学习本课程的目的。

② 相对同类教材(机械类)增加(或加强)了“离散控制系统”章节(第 8 章)。由于计算机控制系统在机械产品和机械制造中的广泛应用,有关计算机控制系统分析和设计的基础知识应为“机械工程与自动化”专业毕业生所必备的。

③ 由于我国机械工业在自动化领域的飞速发展,各种先进的控制理论和技术在机械工程中得到了广泛应用。

本书是以柳洪义主编的《机械工程控制基础》(东北大学校内教材)为蓝本编写的,也体现了编者們多年的教学经验和科研体会。本书参考了兄弟院校的同类教材,我们对这些教材的编著者表示诚挚的感谢。我们还感谢担任本书主审的闻邦椿院士、清华大学博士生导师高钟毓教授,东北大学高立群教授对本书进行细致的审阅及提出宝贵的意见。编者还对在本书出版过程中给予大力支持的东北大学教务处、机械工程学院和东北大学出版社深表感谢。

全书共分 8 章,由柳洪义、原所先合编。其中,第 1, 2, 5, 7, 8 章由柳洪义编写,第 3, 4, 6 章由原所先编写。全书授课学时以 50~60 为宜。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,希望读者批评指正。

编 者

1998 年 10 月于东北大学

目 录

1 绪 论	1
1.1 机械工程的发展与控制理论的应用	1
1.2 机械自动控制系统的基本组成	2
1.3 机械自动控制系统的分类	4
1.4 对自动控制系统的基本要求	5
2 机械控制系统的数学模型及传递函数	7
2.1 系统数学模型的建立	7
2.2 拉普拉斯变换及其反变换	10
2.3 传递函数及典型环节的传递函数	15
2.4 系统传递函数方框图及其简化	20
3 时间响应分析	26
3.1 时间响应及典型输入信号	26
3.2 一阶系统的时间响应	28
3.3 二阶系统的时间响应	31
3.4 高阶系统的时间响应分析	39
4 频率特性分析	44
4.1 频率特性概述	44
4.2 典型环节频率特性的极坐标图(Nyquist 图)	49
4.3 系统 Nyquist 图的画法	54
4.4 典型环节频率特性的对数坐标图(Bode 图)	55
4.5 频率特性的性能指标	64
4.6 最小相位系统和非最小相位系统	65
5 系统的稳定性分析	69
5.1 系统稳定性的基本概念	69
5.2 系统的稳定条件	69
5.3 劳斯-胡尔维茨稳定判据	70
5.4 奈奎斯特稳定判据	72
5.5 系统的相对稳定性	75

6 控制系统的误差分析和计算..... 79

6.1 系统稳态误差的基本概念..... 79

6.2 系统稳态误差的计算..... 80

6.3 改善系统稳态精度的方法..... 85

7 系统的性能校正..... 88

7.1 系统的性能指标..... 89

7.2 串联校正..... 92

7.3 并联校正 101

7.4 按希望特性对控制系统进行校正 103

7.5 控制系统设计实例 112

8 离散控制系统 117

8.1 离散控制系统概述 117

8.2 z 变换和 z 反变换 119

8.3 离散系统的差分方程 125

8.4 离散系统的传递函数 126

8.5 离散系统的 z 域分析 131

8.6 离散系统的校正与设计 136

8.7 计算机控制系统实例 143

参考文献..... 148

1 绪 论

“机械工程控制”是一门技术科学，它研究自动控制理论的基本原理及其在机械工程中的应用问题。高科技在机械工程中的应用，使机械制造和机械产品本身的自动化和智能化水平不断提高。现代机械工程要求机械工程师们不但要具有机械结构现代设计方法和制造方法的知识，同时也要具有机械工程自动控制的知识。通过对本书的学习，可以掌握自动控制理论的基本原理及其在现代机械工程中应用的技能。

1.1 机械工程的发展与控制理论的应用

人类的祖先在制作和使用工具以后，就逐渐开始制作和使用机械了，最古老、最简单的机械是杠杆。人类最初使用机械的目的是省力，或者增大人的力量。发明利用自然力(如风力和水力)是把人力从机械的动力中解脱出来的开始。蒸气机和电动机的发明，为机械提供了有效并且使用方便的动力。机械的使用使人类从繁重的体力劳动中解放出来，并大大提高了劳动效率和产品质量。人类认识到机械在生产中的重要作用，就不断地改进旧机器和发明新机器来满足各种各样不断增长的需要。在机械工程发展过程中，人们一直致力于机器自动化。因为只有自动化机器才能生产出更多更好的产品，并能减少人们在生产过程中紧张而繁重的劳动。

虽然在几百年甚至两千年前，人类就开始运用自动控制的初步原理，但自动控制理论的形成是在 20 世纪 40 年代。由于当时军事技术和工业生产中都出现了许多亟待解决的系统控制问题，即要求设计的系统工作稳定、响应迅速，并且精度高。这就需要对系统做深入的理论研究，揭示系统内部的运动规律，即系统性能与系统参数之间的关系。当时所涉及的是单变量、用微分方程及传递函数描述的系统，形成的理论称为经典控制论。经典控制理论用频率法、根轨迹法等方法分析和设计系统。在经典控制理论上发展起来的模拟式自动控制系统，至今在许多工业部门仍然占有重要地位。

随着现代科学技术的发展，多输入、多输出的复杂系统越来越多，经典控制理论已不能满足解决这类问题的需要。电子技术和计算技术的发展，促进了现代控制理论的产生和发展。现代控制理论用状态空间描述系统变量，所建立的状态空间表达式不仅表达系统输入、输出间的关系，而且还描述系统内部状态变量随着时间变化的规律。现代控制理论的基础部分是线性系统理论，它研究如何建立系统的状态方程，如何由状态方程分析系统的响应、稳定性、系统状态的能观性与能控性，以及如何利用状态反馈改善系统性能等。现代控制理论的重要部分是最优控制，就是在已知系统的状态方程、初始条件及某些约束条件下，寻求一个最优控制向量，使系统在此最优控制向量作用下的状态或输出满足某种最优准则。电子计算机及计算方法的迅速发展，使最优控制成为应用越来越广泛的方法。自适应控制是近十几年来发展较快的现代控制论分支，它适合被控对象的结构或参数随着环境条件的变化而变化的情况。控制器的参数要随着环境条件的变化自动进行调节，才能使系统始终满足某种最优

准则。这类系统称为自适应控制系统。

1.2 机械自动控制系统的基本组成

机械自动控制系统是一种自动控制系统，它的控制对象是机械。由于科学技术的发展，现代机械系统与自动控制系统常常融合在一起，构成“机电一体化系统”，因此，对机械自动控制系统进行性能分析和设计时，总是把机械作为系统的一部分来考虑。下面举例说明机械自动控制系统的工作原理、基本组成和一些基本定义。

【例 1.1】 图 1.1 表示一个工作台的位置控制系统。该系统由指令电位器、直线光电编码器、放大器、直流伺服电动机、减速器、滚珠丝杠、导轨和工作台组成。直流伺服电动机经减速器驱动滚珠丝杠转动，在滚珠丝杠的带动下，工作台在导轨上滑动。控制系统的功能是控制工作台运动到由指令电位器指定的位置上。

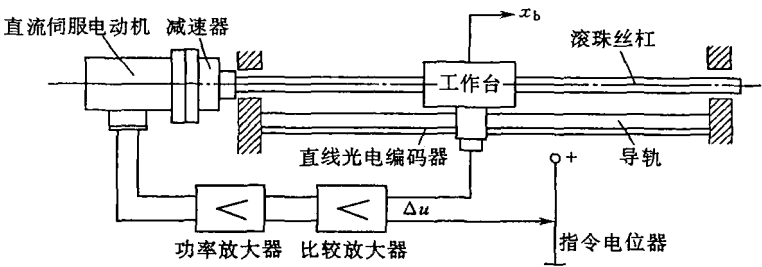


图 1.1 工作台的位置控制系统

其控制过程为：指令电位器发出工作台的位置指令 x_a ，指令电位器的输出是电压 u_a ，它与位置指令 x_a 对应。电压 u_a 与位置 x_a 成正比，设比例系数为 K_s 。在实际设计时，选取 K_s 为指令电位器最大输出电压与工作台最远位置之比。对于位置控制系统，指令电位器指针所指的刻度是位置，再由电位器把位置指令转化成电压信号输出。工作台在机座上的实际位置 x_b 由装在机座和工作台上的直线光电编码器检测，并经转换电路转换为反馈电压 u_b 。反馈电压 u_b 与工作台的实际位置 x_b 也成正比，并且通过一个简单的电路使比例系数也为 K_s 。这样，当工作台位置 x_b 和给定位置 x_a 相等时， u_b 和 u_a 也相等；当 x_b 和 x_a 有偏差时，对应偏差电压为 $\Delta u = u_a - u_b$ ，该偏差电压经放大器放大后，控制直流伺服电动机转动。电动机通过减速器和滚珠丝杠驱动工作台向给定位置 x_a 运动。随着工作台实际位置与给定位置偏差的减小，偏差电压 Δu 的绝对值也逐渐减小。当工作台实际位置与给定位置重合时，偏差电压 Δu 为零，直流伺服电动机停止转动。当不断改变指令电位器的给定位置时，工作台就不断改变在机座上的位置。

为了简化控制系统的描述，常用方块图表示控制系统的工作原理。该位置控制系统可用图 1.2 表示。

由图 1.2 可知，此系统的输入量为给定位置， x_a 是通过指令电位器给定的，所以指令电位器为系统的给定环节，即给定输入信号的环节。此系统的输出量为工作台的实际位置 x_b 。是通过编码器检测得到的，编码器为系统的测量环节。测量环节的输出信号要反馈到输入端，经比较环节与输入信号比较，得出偏差信号。用于比较模拟量（如连续的电压信号）的比较环节常用运算放大器配以外电阻电路构成，在比较两个模拟量的同时，对它们的差进行

一定的放大,即图中的前置放大器,但比较的物理量必须是同种物理量。若测量环节的输出信号与系统输入信号不是同种物理量,则需要将其转化成同种物理量,以便比较。由前置放大器输出的信号一般还需要经过功率放大器放大后,才能驱动直流伺服电动机,放大器必须线性度好、工作范围宽和响应迅速。放大器称为放大环节,直流伺服电动机为执行环节。执行环节驱动被控对象,使其输出预定的输出量。输出量被检测并反馈到输入端,与输入量比较,产生偏差信号。偏差信号控制系统的输出,构成一个闭环,所以称这样的系统为闭环控制系统。精确的控制系统一般均采用闭环控制。

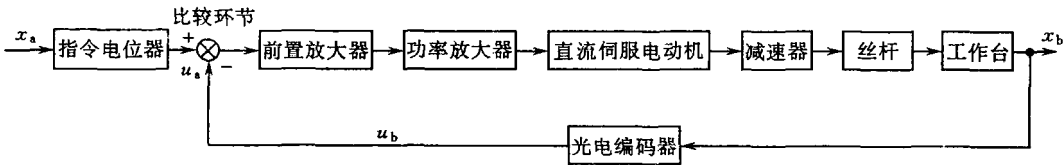


图 1.2 工作台控制原理方块图

若系统的输出量不反馈到输入端参加控制,则称这样的系统为开环控制系统。

当系统的自动调节作用使输出量达到预定值时,称系统达到平衡状态。闭环控制系统都是利用偏差信号控制输出量的。当系统达到平衡状态时,比较环节输出的偏差有两种情况:一种为零,一种不为零。在例 1.1 中,随着工作台位置不断接近预定位置,偏差电压 Δu 不断减小。当工作台位置达到预定位置时,系统调节到平衡状态,偏差电压 Δu 为零。另一种情况是当系统的输出量达到预定值时,起控制作用的偏差为一确定值,以维持系统的平衡状态。例 1.2 说明这种情况。

【例 1.2】图 1.1 中,直流伺服电动机的转速与其电枢电压成正比,讨论如何自动控制工作台在导轨上以给定速度运动问题。

要控制工作台在导轨上的运动速度,就需要检测并反馈工作台的运动速度。用直线光电编码器和频率/电压(f/U)变换器可以检测工作台的运动速度,将其转换变成模拟电压,作为速度反馈信号。控制系统原理如图 1.3 所示。

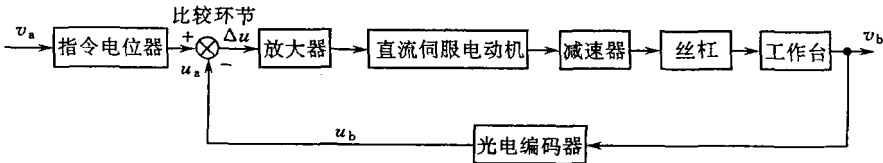


图 1.3 工作台速度控制原理图

如图 1.3 所示,系统通过指令电位器发出工作台的运动速度指令 v_a , 指令电位器的输出是电压 u_a , 它与工作台的运动速度指令 v_a 对应。电压 u_a 与速度 v_a 成正比, 设比例系数为 $K_{vi} = u_a / v_a$ 。在实际设计时, 选取 K_{vi} 为指令电位器最大输出电压与工作台最高速度之比。对于速度控制系统, 指令电位器指针所指的刻度是速度, 由电位器把速度指令转化成电压信号输出。工作台的实际运动速度为 v_b , 对应的反馈电压为 u_b 。反馈电压 u_b 与工作台的实际速度 v_b 也成正比。通过一个简单的电路调整比例系数 $K_{vo} = u_b / v_b$, 使 $K_{vi} > K_{vo}$ 。这样, 当工作台速度 $v_b = v_a$ 时, 也存在偏差电压 $\Delta u = u_a - u_b = K_{vi}v_a - K_{vo}v_b = (K_{vi} - K_{vo})v_a$ 。在设计系统时, 应确定放大器的放大倍数, 使得工作台速度 v_b 和给定速度 v_a 相等。显然, 当偏差电压 Δu 为零时, 电动机将停止转动, 工作台速度为零。

此系统的速度自动控制作用在于：

① 系统受到某种干扰作用引起工作台速度变化，若工作台速度小于给定值 v_a ，则编码器反馈电压 u_b 降低，偏差电压 $\Delta u = u_a - u_b$ 相应增大，使直流伺服电动机转速增高，工作台速度提高，直到工作台速度为给定值 v_a 时止，即调节达到了平衡状态；反之，若工作台速度大于给定值 v_a ，则编码器反馈电压 u_b 增高，偏差电压 $\Delta u = u_a - u_b$ 相应降低，使直流伺服电动机转速减低，工作台速度减小，直到工作台速度为给定值 v_a 时止。这样，工作台的速度只取决于给定的输入电压 u_a ，而不受干扰的影响。

② 若速度给定值 v_a 提高，如提高到原来的 1.5 倍，则电位计输出电压 u_a 也提高到原来的 1.5 倍，偏差电压 $\Delta u = u_a - u_b$ 相应提高。开始时，反馈电压 u_b 没有提高到原来的 1.5 倍，偏差电压 Δu 高于原来的 1.5 倍。由于直流伺服电动机的转速与其电枢电压成正比，因此，电动机的转速提高，随着工作台速度逐渐提高到原来的 1.5 倍，反馈电压 u_b 也逐渐提高到原来的 1.5 倍，偏差电压 Δu 提高到原来的 1.5 倍，系统达到新的平衡。可见，工作台的速度随着给定值变化。若工作台的给定速度不为零，则偏差电压 Δu 也不为零。

在以上两个例子中，系统的输出量不断地跟随系统的输入量，这种输出量能够迅速而准确地跟随输入量的系统称为随动系统。导弹、火炮和卫星跟踪天线等自动定位系统以及船用随动舵等都属于随动系统。具有机械量(如位移、速度、加速度)输出的随动系统称为伺服系统，因此，机械工程中的随动系统绝大多数为伺服系统。

1.3 机械自动控制系统的分类

自动控制系统有许多类型及分类方法，在此仅介绍如下几种。

① 按控制系统有无反馈划分。在例 1.1 中已经提到，若检测系统检测输出量，并将检测结果反馈到前面，参加控制运算，则称此系统称为闭环控制系统。若在控制系统的输出端与输入端之间没有反馈通道，则称此系统为开环控制系统。开环控制系统的控制作用不受系统输出的影响。若系统受到干扰，使输出偏离了正常值，则系统便不能自动改变控制作用，使输出返回到预定值，所以，一般开环控制系统很难实现高精度控制。1.2 节中的两个例子均为闭环控制系统。本书主要研究闭环系统的分析和设计问题。

② 按控制系统中的信号类型划分。若控制系统各部分的信号均为时间的连续函数，则称其为连续控制系统，也称为模拟量控制系统。若控制系统中有离散信号，则称其为离散控制系统。由于计算机处理的是离散数字量，所以计算机控制系统为离散控制系统。本书第 8 章将讨论离散控制系统的基本理论。

③ 按控制变量的多少划分。若系统的输入、输出变量都是单个的，则称其为单变量控制系统。1.2 节中的两个例子均属于单变量控制系统问题。经典控制论只研究单变量系统，是本书的主要内容。若系统有多个输入、输出变量，则称此系统为多变量控制系统。用现代控制理论可以研究多变量系统，解决多变量系统的分析和设计问题。

④ 按输出变化规律划分。若系统的希望输出为一常量，即使存在外界干扰，系统的实际输出也仍能基本保持为该常量，则称之为恒值调节系统。如常见的恒温或恒压控制系统均为恒值调节系统。恒值调节系统和随动系统均为闭环系统，它们的控制原理没有区别。若系统的输出按预定的程序变化，则称之为程序控制系统。如数控机床、工业机器人及自动生产线

等均为程序控制系统。

⑤ 按系统本身的动态特性划分。系统的数学模型描述系统的动态特性。若系统的数学模型是线性微分方程，则称其为线性系统；若系统中存在非线性元器件，系统的数学模型是非线性方程，则称其为非线性系统。线性系统控制理论是自动控制理论的基础，也是本书的主要研究对象。

⑥ 按系统采用的控制方法划分。在计算机控制系统中，由于微机作为控制器，可以通过控制软件实现多种控制方法。根据控制器采用的控制方法不同，控制系统可分为：模糊控制系统、最优控制系统、神经网络控制系统等。

1.4 对自动控制系统的基本要求

由于不同的控制系统用于不同的目的，所以不可能对所有控制系统有完全一样的要求。但是，对控制系统有一些共同的基本要求，可归结为：稳定性、快速性和准确性。

① 稳定性。稳定性是指系统在受到作用之后的动态过程的倾向和恢复平衡状态的能力。若系统的动态过程是发散的或由于振荡而不能恢复到平衡状态时，则系统是不稳定的。不稳定的系统是无法工作的，因此，控制系统的稳定性是控制系统分析和设计的首要内容。

② 快速性。系统在稳定的前提下，响应的快速性是指系统消除实际输出量与稳态输出量之间误差的快慢程度。

③ 准确性。准确性是指在过渡过程结束后，输出量与给定输入量相应的输出量之间的误差大小，又称为稳态精度。系统的稳态精度不但与系统有关，而且与输入信号的类型有关，关于这一点，将在第 6 章中学习。

对于一个自动化系统来说，最重要的是系统的稳定性，这是使自动化系统能够正常工作的首要条件。要使一个自动化系统满足稳定性、精确性和响应快速性的要求，除了要求组成此系统的所有元器件的性能都是稳定、精确和响应快速外，更重要的是应用自动控制的理论，对整个系统进行分析和综合，以保证系统整体性能指标的实现。一个性能优良的机械工程自动化系统绝不是机械和电器的简单组合，而是经过对整个系统进行仔细分析和精心设计的结果。自动控制理论为机械工程自动化系统分析和设计提供理论依据与方法。

习 题

1.1 通过实际应用例子说明开环控制系统和闭环控制系统的原理、特点及适用范围。

1.2 图 E1.1 是一个全自动电热淋浴器，说明其工作原理，并画出水温控制系统的原理框图。

1.3 图 E1.2 表示一压力控制系统。炉内压力由挡板位置控制，并由压力测量元件测量。说明其控制原理。

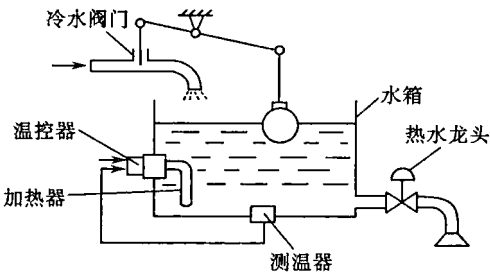
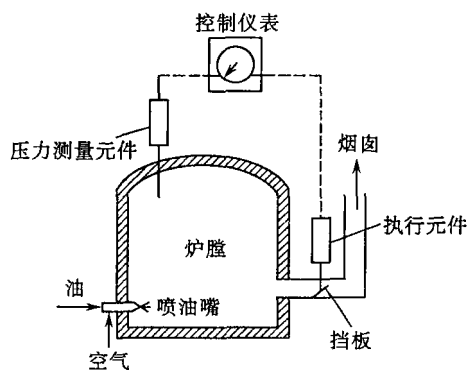
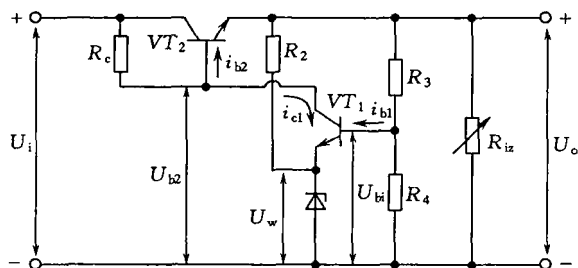


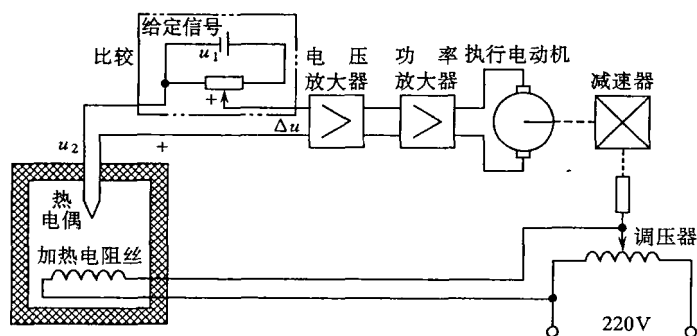
图 E1.1 全自动电热淋浴器示意图



1.4 图 E1.3 表示晶体管直流稳压电源, 试说明其自动稳压原理。



1.5 图 E1.4 是炉温自动控制系统示意图, 其中热电偶是温度检测元件, 它的输入量是温度, 输出量为电压。试说明此系统的工作原理, 画出原理框图。



2 机械控制系统的数学模型及传递函数

为了对系统的动态特性进行分析研究,必须首先用数学表达式来描述该系统,这个表达式称为该系统的数学模型。因为在系统的动态过程中,有关物理量是时间的函数,所以描述系统动态特性的数学模型通常是微分方程。

系统往往是错综复杂的,为了建立它的数学模型,必须首先对系统做一些简化。经过简化处理的系统,称为该系统的物理模型。对同一系统可以有不同的建模方法,从而得出不同的物理模型。物理模型应该很好地描述原系统,代表原系统的动态特性。提高建模精度的主要途径是对系统进行正确的理想化处理,通过分析,找出影响系统动态特性的主要因素,舍弃次要因素。

数学模型常常是根据物理模型建立的。若描述系统的微分方程是线性的,则称此系统为线性系统。根据微分方程理论,线性系统服从叠加原理,在对线性系统进行分析时,常用到这个性质。若描述系统微分方程的系数均为常数,则该系统称为定常系统。本书主要讨论线性定常系统。

2.1 系统数学模型的建立

根据系统的物理模型,可以用基本物理学定理和定律建立系统的数学模型。对于力学问题,常应用牛顿第二定律、达朗贝尔原理或拉格朗日方程;对于电学问题,常应用克希霍夫定律。建立数学模型,就是根据这些物理学定理和定律,用物理模型中给出的元器件参数建立系统输入量与输出量之间的数学关系。

【例 2.1】在如图 2.1 所示的无源网络中, U_i 为输入电压, U_o 为输出电压,试建立其数学模型。

【解】根据克希霍夫定律和欧姆定律,有

$$U_i - U_o = I_r R_1 \quad (2.1)$$

$$U_i - U_o = \frac{1}{C} \int I_c dt \quad (2.2)$$

$$U_o = (I_r + I_c) R_2 \quad (2.3)$$

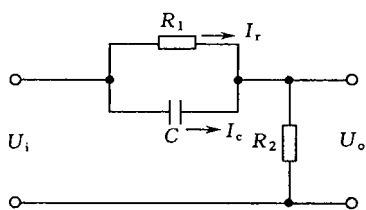


图 2.1 无源电路网络

由式(2.2)得

$$I_c = (\dot{U}_i - \dot{U}_o) C \quad (2.4)$$

由式(2.1)得

$$I_r = (U_i - U_o) / R_1 \quad (2.5)$$

将式(2.4)和(2.5)代入式(2.3),并整理得

$$CR_1 R_2 \dot{U}_o + (R_1 + R_2) U_o = CR_1 R_2 \dot{U}_i + R_2 U_i \quad (2.6)$$

式(2.6)即为所求数学模型。

在写系统数学模型时,把输出量及其导数写在方程左边,把输入量及其导数写在方程右

边。

【例 2.2】 图 2.2(a)为运算放大器符号。运算放大器是由多个晶体管及电阻、电容构成的集成电路。图中左边的“+”号表示同相输入端，“-”号表示反相输入端；右边的“+”号为输出端。此外，运算放大器还有正、负电源供电，外接补偿电路端、调零端等。一般运算放大器有十几个管脚，不同型号运算放大器的管脚编号也不同，使用时，应按产品说明书仔细查对。实际上，运算放大器本身并不具备运算功能，只有在外部网络配合下，才能实现各种运算放大功能。从电路组合看，运算放大器是一个高增益、高输入阻抗的直流放大器。图 2.2(b)为一由运算放大器组成的网络。其中： $U_i(t)$ 为输入电压， $U_o(t)$ 为输出电压， K_0 为运算放大器的开环放大系数，试求此网络的数学模型。

【解】 设运算放大器的反相输入端电压(图中 A 点电压)为 $U_a(t)$ ，输出电压可写为 $U_o(t) = -K_0 U_a(t)$ ，则有 $U_a(t) = -U_o(t)/K_0$ 。由于 K_0 很大，所以

$$U_a(t) \approx 0 \quad (2.7)$$

由于运算放大器的输入阻抗很高，所以流经运算放大器的电流很小，故有

$$i_1 \approx i_2 \quad (2.8)$$

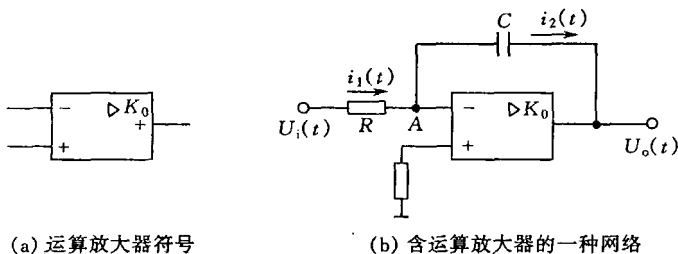


图 2.2 运算放大器

涉及运算放大器的网络计算常用到由式(2.7)和(2.8)表示的关系，例如本题，由式(2.7)可推知

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{U_i(t)}{R} \\ i_2 &= -C \frac{dU_o(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

由式(2.8)和(2.9)可知

$$U_i(t)/R = -C \dot{U}_o(t)$$

即

$$RC \dot{U}_o(t) = -U_i(t)$$

上式即为此网络的数学模型，为一积分网络。

【例 2.3】 图 2.3 为直流伺服电动机拖动系统图。电动机为它激式，且激磁电流为恒值。 R_a 为电枢绕组的电阻， L_a 为电枢绕组的电感， $i_a(t)$ 为流过电枢绕组的电流， E_m 为电动机的感应电动势， $M(t)$ 为电动机转矩， $E_i(t)$ 为电动机电枢的输入电压，作为此系统的输入量。设此系统只有惯性负载，

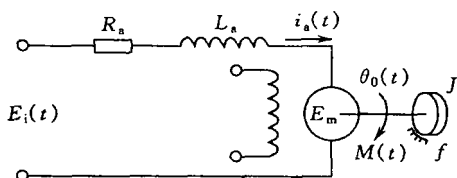


图 2.3 直流伺服电动机控制系统

J 为电动机转子及惯性负载折合到电动机轴上的转动惯量, f 为电动机转子及负载折合到电动机轴上的黏性阻尼系数。若把电动机电枢转角 $\theta_0(t)$ 作为输出量, 试建立该系统的数学模型。

【解】 由动态电压平衡方程式, 有

$$E_i(t) = R_a i_a(t) + L_a \dot{i}_a(t) + E_m(t) \quad (2.10)$$

由电动机转矩方程, 有

$$M(t) = K_T i_a(t) \quad (2.11)$$

其中: K_T 为电动机的力矩常数, 对于一确定的直流电动机, 当激磁一定时, K_T 是一常数。

根据电磁感应定律, 有

$$E_m(t) = K_e \dot{\vartheta}_0(t) \quad (2.12)$$

其中: K_e 为反电动势常数。

根据牛顿第二定律, 有

$$M(t) = J \ddot{\vartheta}_0(t) + f \dot{\vartheta}_0(t) \quad (2.13)$$

把式(2.11)代入式(2.13), 得

$$i_a(t) = \frac{1}{K_T} [J \ddot{\vartheta}_0(t) + f \dot{\vartheta}_0(t)] \quad (2.14)$$

将式(2.12)和(2.14)代入式(2.10), 得

$$L_a J \vartheta_0^{(3)}(t) + (L_a f + R_a J) \ddot{\vartheta}_0(t) + (R_a f + K_T K_e) \dot{\vartheta}_0(t) = K_T E_i(t) \quad (2.15)$$

这就是直流电动机以电枢电压 E_i 为输入, 以转子转角 $\vartheta_0(t)$ 为输出的数学模型, 它是一个三阶线性常微分方程。由于在数学模型中输出量 $\vartheta_0(t)$ 对时间导数的最高阶数是 3, 所以称此系统为三阶系统。

电动机的电感 L_a 通常较小, 若忽略, 则式(2.15)可简化为

$$R_a J \ddot{\vartheta}_0(t) + (R_a f + K_T K_e) \dot{\vartheta}_0(t) = K_T E_i(t) \quad (2.16)$$

这是一个二阶线性常微分方程, 此时系统为二阶线性定常系统。

当电枢电阻 R_a 也较小且可忽略时, 式(2.16)可进一步简化为一阶线性常微分方程

$$K_e \dot{\vartheta}_0(t) = E_i(t) \quad (2.17)$$

这是一个一阶线性常微分方程, 此时系统可简称为一阶系统。由此可以看出, 由于对系统简化的程度不同, 所以同一个系统就有不同的数学模型, 成为不同阶数的系统。

若用 $\omega(t) = \dot{\vartheta}_0(t)$ 表示电动机转子的角速度, 则式(2.15)、式(2.16)和式(2.17)分别变为

$$L_a J \ddot{\omega}(t) + (L_a f + R_a J) \dot{\omega}(t) + (R_a f + K_T K_e) \omega(t) = K_T E_i(t) \quad (2.18)$$

$$R_a J \dot{\omega}(t) + (R_a f + K_T K_e) \omega(t) = K_T E_i(t) \quad (2.19)$$

$$K_e \omega(t) = E_i(t) \quad (2.20)$$

式(2.18)~(2.20)分别是输入为电枢输入电压、输出为转子转速的直流电动机拖动系统的数学模型。这说明, 若把原系统输出量的导数作为输出量(其他一切不变)而构成新系统, 则新系统的数学模型较原系统的数学模型只是微分方程的阶数相应地降低一阶。

由以上例子可见, 单输入、单输出线性定常系统的数学模型可写成如下一般形式

$$\begin{aligned} & a_n x_o^{(n)}(t) + a_{n-1} x_o^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{x}_o(t) + a_0 x_o(t) \\ & = b_m x_i^{(m)}(t) + b_{m-1} \dot{x}_i^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \dot{x}_i(t) + b_0 x_i(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

其中: $n \geq m$, x_o 和 x_i 分别为系统的输出和输入。

2.2 拉普拉斯变换及其反变换

系统的数学模型以微分方程的形式表达输出与输入间的关系。通过解微分方程,才能具体地看出系统输出随着时间变化的规律,这是系统分析的一种方法,即系统的时域分析法。但在经典控制论中,频率法占有重要的位置。它不仅是系统分析的重要方法,也是系统设计的重要手段。而拉普拉斯变换是频率法的数学基础。此外,也可以利用拉普拉斯变换解微分方程,能使求解过程大为简化。

2.2.1 拉氏变换的定义

函数 $x(t)$ 的拉氏变换定义为

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2.22)$$

其中: L 为拉氏变换符号, $s = \sigma + j\omega$ 是一个复数,称 $x(t)$ 为原函数, $X(s)$ 为像函数。

显然,拉氏变换是否存在取决于上述定义所规定的积分是否收敛。若 $x(t)$ 满足如下三个条件,则上述积分收敛。

- ① 当 $t < 0$ 时, $x(t) = 0$;
- ② 当 $t \geq 0$ 时, $x(t)$ 在每个有限区间上是分段连续的;
- ③ $x(t)$ 是指数级的,即满足

$$\int_0^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} dt < \infty$$

其中: σ 为正实数。

下面通过例题推导出几个常见控制信号的拉氏变换,以后将直接应用这些变换结果。

【例 2.4】 求单位阶跃函数的拉氏变换。

【解】 设单位阶跃函数为

$$1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

则

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (2.23)$$

【例 2.5】 求斜坡函数的拉氏变换。

【解】 设斜坡函数为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ at & (t \geq 0) \end{cases}$$

则

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} at e^{-st} dt = a \left[\frac{t e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \right] = \frac{a}{s^2} \quad (2.24)$$