高中数学学习指导

代 数（第一册）

北京师大附中数学教研组编

青年自学丛书

黑龙江教育出版社

高中数学学习指导

代 数（第 一 册）

北京师大附中数学教研组 编

黑龙江教育出版社

1 9 8 7 年 · 哈尔滨

责任编辑：孙怀川

封面设计：黄跃成

高中数学学习指导

代数（第一册）

北京师大附中数学教研组　编

黑龙江教育出版社　出版

（哈尔滨市道里森林街42号）

黑龙江新华印刷厂　印刷

黑龙江省新华书店　发行

开本 787×1092毫米 1/32・印张6

字数120,000

1987年1月第1版　1987年1月第1次印刷

印数1—19,097

統一书号：7357・124　　定价：1.05元

前　言

为了帮助自学青年和在校高中学生学习好高中数学，我们根据人民教育出版社出版的现行高级中学数学课本（甲种本）及教学大纲的要求，结合我校近年来教学的实践，编写了《高中数学学习指导·代数(第一册)》一书。几点说明如下：

1. 本书是按照现行课本的章节顺序编写的，内容包括学习要求、教材概要说明、学习辅导、例题及习题等五个部分，并附有习题参考答案和指示。本书是根据教材的基本要求，有重点地进行学习辅导。对教材的重点和难点，以及可能产生的疑点，进行深入浅出地剖析，以便于读者的学习。

2. 为使读者在形成抽象的概念及培养逻辑推理能力等方面得到锻炼与提高，本书各章节均配有典型例题。这些例题突出教材的基本要求，突出基础知识的运用，对解题思路进行一定的分析，以帮助读者思考。

3. 本书还备有一定数量的习题，可供读者为巩固所学知识而用，以利于读者从中总结、积累解题经验。

由于水平所限，加之时间仓促，错误或不当之处在所难免，请读者批评指正。

北京师大附中数学教研组

1985 年 9 月

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、学习要求

(1) 应掌握集合的表示方法，元素与集合、集合与集合之间的关系，以及关于子集、交集、并集、全集和补集的概念。正确理解及使用集合的有关符号：“$\in$”、“$\notin$”、“$\subseteq$”、“$\subset$”、“$=$”。

(2) 能用集合形式表示方程及不等式的解。要养成用集合的观点处理具体问题的能力。

(3) 要正确认识映射、一一映射与逆映射。深入理解由映射引进的函数概念。能根据函数解析式的某些特点，准确地画出函数图象，并结合图象会研究函数性质，培养利用“数形结合”研究问题的能力。要掌握反函数的概念，并能熟练求出某些函数的反函数。

(4) 须熟练掌握幂函数、指数函数和对数函数的定义、图象与性质；并能灵活运用这些函数的性质，解决函数值大小的比较等问题及相关的数学综合习题。要掌握好指数方程和对数方程的一般解法，能正确处理其增根和丢根问题。对指数不等式、对数不等式的一般解法，也应熟练掌握。

二、本章教材概要说明

集合概念及其基本理论，是近代数学最基本的内容之一。它不仅是许多数学分支的基础，而且还广泛渗透到自然科学的许多领域，集合术语在科技文章中比比皆是。所以，掌握一些集合的初步知识，可以对初等数学中一些基本概念理解得更深刻，表达得更明确。同时也为阅读一般科技读物和进一步学习数学和其它自然科学准备了必要的条件。

函数是中学数学中最重要的概念之一。本章从实例引入映射的概念，再由映射的概念来刻划函数的概念。即用集合、映射的思想概括出函数的一般定义。这是对初中所学函数概念的再认识。

本章的重点是有关集合的基本概念、映射的概念和由映射引入的函数概念。函数概念，既包含抽象的函数概念（定义、对应关系、定义域、值域、图象、性质、反函数），也包括三个具体的主要函数——幂函数、指数函数与对数函数以及它们的图象和性质。

本章的第一个难点是有关集合的各个基本概念的涵义及相互间的区别与联系；第二个难点是如何用集合的概念来刻划函数的概念，尤其是对函数概念的三要素——对应关系、定义域和值域的理解。

突破这些难点的办法是：在学习中要注意从具体到抽象的过渡，即从实例出发，逐步完成由感性认识到理性认识的飞跃；要注意用对比的方法，去比较几个意义相近或有从属关系的概念的异同；同时还要注意结合直观图形或函数图象

来说明较抽象的概念和性质。

三、学习辅导

1. 集合与映射

(1) 集合是数学中最原始的概念之一。如点、直线、平面一样，不能用其它更基本的概念给予定义。对这些不定义的概念，只能作描述性的说明。课本中，以实例说明集合为“一组对象的全体”，即集合可以描述为一些确定的，一组互不相同的对象的全体。于是人们就可以明确地意识到这些对象，并能判断一个给定的对象是否属于这个总体。

(2) 集合中元素的特点。

凡是对一个给定的集合，集合中的元素都是可以确定的。即有了明确的标准，可以判断某个给定的元素是否属于这个集合，这是第一个特点。在一个给定的集合中，集合中任意二个元素都是互异的。即在同一个集合中不能重复出现同一个元素。例如集合$\{1,2\}$与集合$\{1,1,2\}$都只表示了同一个集合$\{1,2\}$，这是它的第二个特点。第三个特点，就是在同一个集合中，元素的排列与顺序无关（数列一类的集合除外）。即只关心集合中有哪些元素，而不论这些元素先后排列的次序如何。例如集合$\{1,2\}$与集合$\{2,1\}$只表示一个集合。

这样，可以根据以上的特点，来判断所给的对象是否构成一个集合，并给集合以正确的表示。例如：“美丽的花朵”，“有名望的人”等一类对象，就构不成集合。因为找不到用以判断某一个具体对象是否属于这个集合的明确标准。又如方程$(x-1)^2=0$的解的集合是$\{1\}$，而不能写成$\{1,1\}$。因为

集合{1,1}中有重复的元素，所以不能作为集合的正确表示。

(3) 集合的表示法。

集合，可以用列举法或描述法进行表示。当一个集合有许多元素或无限多元素时，列举出全部元素是十分麻烦甚至是不可能的。这时，如果能用该集合中的一部分元素来提供某种规律，并依据这种规律可以准确地找出其它元素，那么可以用省略号代替其它元素，例如：从1到1000的所有整数集合，可表示为：{1,2,3,……1000}。所有正奇数的集合，可表示为：{1,3,5,7,……}。用描述法表示集合的一种常用形式是$\{x \mid p\}$，其中x是这个集合中的元素的代表，p表示x所具备的公共规律。若$A=\{x \mid p\}$，则表示了集合A是由所有具备规律p的元素x组成。即若x具备规律p，则x为集合A之元素；若x为集合A之元素，则x必具备规律p。

有些集合的元素不能用单个字母x来表示，例如：由直线$y=3x$上所有的点的坐标组成的集合，可以记为：$\{(x,y) \mid y=3x\}$。这里(x,y)是这个集合中元素的代表，而$y=3x$则是元素所具备的规律。但不能写成$\{x \mid y=3x\}$。只要不引起误解，某些集合的元素代表也可以省略不写。例如：{整数}即代表了整数集合。在表示集合时，常犯的错误是：把形如$\{1,2\}$；$\{(1,2)\}$；$\{x=1, y=2\}$之类的集合混淆，甚至把这三个集合看为一个集合。事实上，$\{1,2\}$是由1和2这两个自然数为元素所组成的集合，而$\{(1,2)\}$是以一组数$(1,2)$为唯一元素的集合。$\{x=1，y=2\}$则表示了以方程$x=1$，$y=2$为两个元素的集合。同样应防止用$\{R\}$表示实数集合的错误。因为R表示实数集，而$\{R\}$则表示了以实数集

为唯一元素的一个集合。同时也要注意 $0\neq\{0\}\neq\{\varnothing\}$。

（4）正确理解子集、真子集的概念。

子集的概念刻划了两个集合之间的包含关系。"A 是 B 的子集"的涵义是集合 A 的任何一个元素都是 B 的元素。即由属于 A 的任一元素，则可推出这个元素一定属于 B。若把 A 是 B 的子集，理解为 A 是由 B 的部分元素所组成，这是错误的。因为它与"空集是任何集合的子集"相矛盾，而空集是不包含任何元素的。再由子集和真子集的概念，也不能说"空集是任何集合的真子集"，而只能说"空集是任何非空集合的真子集"。

（5）正确使用"$\in$"、"$\notin$"、"$\subseteq$"、"$\subset$"符号。

"$\in$"或"$\notin$"只适用于元素与集合之间，它表示了元素对集合的从属关系。"$\subseteq$"或"$\subset$"则适用于两个集合之间，它表示了包含和真包含的关系。因此在使用"$\in$"或"$\subset$"等符号之前，对元素、集合的构成应予充分的注意。例如，当判断 $A=\{0,1\}$ 与 $B=\{x\mid x\subseteq A\}$ 的关系时，常常从表面形式上理解 A、B 均表示集合，而认为 $A\subset B$，即把 A 看作为 B 的一个真子集。但认真注意两个集合的构成，容易看出集合 B 是以集合 A 的子集为元素的集合。即集合 B 的元素是：$\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,1\}$，$\varnothing$。显然 $A=\{0,1\}$ 只是集合 B 中的一个元素。所以 A、B 之间的关系应是元素 $A\in B$。

（6）集合之间的各种关系。

关于交集、并集、全集和补集等概念，课本上都有详尽的叙述，这里不再赘述。但是，在用集合的观点研究具体问题时，大量碰到上述这些概念的运用。对这些概念深刻地理

解，是准确运用这些概念的前提。在学习时应结合图示加深理解和记忆。

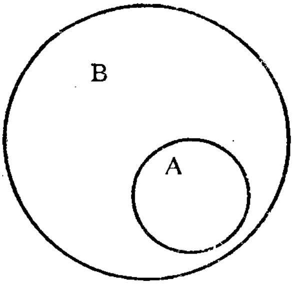

图 1—1

例如：若 $A \subset B$.

则 $A \cap B = A$；

$A \cup B = B$；

$(A \cap B) \subset (A \cup B)$.

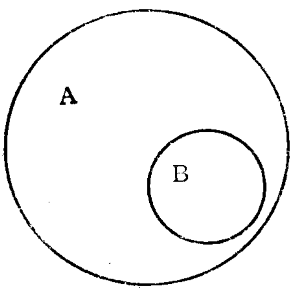

图 1—2

若 $B \subset A$，

则 $A \cap B = B$；

$A \cup B = A$；

$(A \cap B) \subset (A \cup B)$.

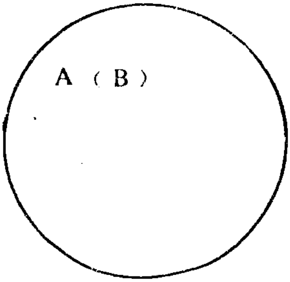

图　1—3

若 $A=B$，

则 $A\cap B=A=B$；

$A\cup B=A=B$；

$A\cup B=A\cap B$。

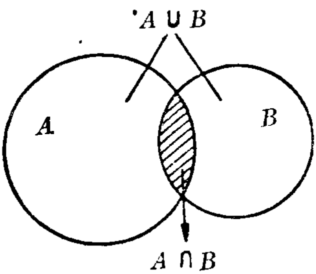

图　1—4

若 A 与 B 有公共元素，但互不包含时，

则 $(A\cap B)\subset A$；$(A\cap B)\subset B$；

$A\subset(A\cup B)$；$B\subset(A\cup B)$；

$(A\cap B)\subset(A\cup B)$。

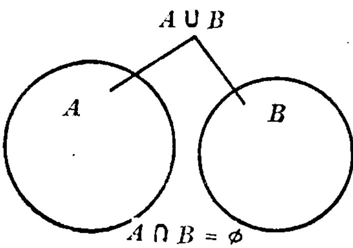

图　1—5

若 A 与 B 没有公共元素时，

则 $A\cap B=\varnothing$；

$A\cup B=B\cup A$；

$A\subset(A\cup B)$；$B\subset(A\cup B)$；

$(A\cap B)\subset(A\cup B)$。

在解题时，遇到其它情况，也可以用借助图示来进行分析和解决。

对于全集和补集的概念，应该着重理解全集是相对于所研究的问题的一个相对的概念。全集是由与所研究的问题相关的各个集合的全部元素组成。因此，由于所研究问题的改变，全集也会相应的改变。例如在实数范围内研究方程的根的问题时，可将实数R视为全集。而若在自然数范围内研究方程根的问题时，则应该将自然数集N视为全集。可见全集的选择是与所研究问题息息相关，它是个相对的概念。

(7) 关于映射的概念，在课本中对"一对多"，"一对一"，"多对一"三种不同的对应中进行分析后指出："一对一"，"多对一"的对应都叫映射，而其它对应则不是映射，从而引入了"映射"的定义。对映射的定义，应注意下列几点：

①从集合A到集合B的映射与由集合B到集合A的映射是不同的。即映射是单向的，一个映射必须指明由某个集合到另一个集合的映射。而这两个集合可以是数集，也可以是其它什么元素的集合。

②要明确一个由集合A到集合B的对应法则"f"，在"f"的作用下，A的元素与B的元素建立了联系。"f"是一个抽象的符号，它的具体内容是因问题的条件不同而不同。为了加深对"f"的理解，对每一个具体的"f"都应力求用语言准确地加以表述。如：$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 100,\ x\in N\}$，$B=\{y\mid 2\leqslant y\leqslant 200,\ y\in N\}$，其$f$：$x\xrightarrow{f} y=2x$，即"$f$"是指：$A$集合中的每个元素的2倍与$B$集合中的元素相对应。

③映射的条件是必须使A集合中每个元素在B集合中都有唯一的象。如：$A=\{0, 1, 2\}$，$B=\{0, 1, \frac{1}{2}\}$中，对应法则"f"是"取倒数"。在这种"f"作用下，A中元素"0"，在B中没有象，因此"f"不能称为由集合A到集合B的映射。但是，若对应法则改为"乘以零"，那么A中元素经过"f"的作用后，均与B中元素"0"相对应，这样，"f"便可称为由A到B的映射。也就是说，映射要求A中元素在B中必须有且只有唯一的象。至于A中两个元素或多个元素在B中有同一个象，或B中元素在A中是否有原象，都无关紧要。

(8) 一一映射与逆映射的概念是非常重要的。对一一映射必须注意它首先是映射，因此它必须满足映射的一切要求；而它又是一种特殊的映射，其特殊性就是：

①A集合中的元素不同，在B集合中的象也不同，即由A到B的对应是"一对一"的。

②在"f"的作用下，B中每个元素在A中都有原象，否则就不能称为一一映射。如：某班有七个学生，数学考分在整数95分到100分之间，那么这七个学生的集合为A，得分集合为B。所以从A到B是映射，而不是一一映射，因为A中至少有两个学生的考分相同。

当判断一个对应是不是一一映射时，首先判断它是不是映射，如果是，再判断它是否满足一一映射的条件。在作法上，如它是一一映射要求按定义说清楚即可，如不是一一映射只需举一个反例即可。

逆映射的概念是与一一映射紧密相关的。由课本中对逆映射的定义可知：对一一映射才研究它的逆映射；一一映

射f：$A \to B$与f^{-1}：$B \to A$是互为逆映射。特别是在理解逆映射定义中，要明确法则的互逆关系。如$a \in A$，$b \in B$，有$f(a)=b$，这时又有$f^{-1}(b)=a$，映射f^{-1}：$B \to A$才是f：$A \to B$的逆映射。

求一个映射的逆映射时，首先判断这个映射是否为一一映射，如果不是一一映射，就没有逆映射；如果是一一映射，那么关键在于确定逆映射的对应法则f^{-1}。它是一个从B到A的映射，在对应法则f^{-1}的作用下，对于B中每一个元素b在A中关于f的原象a和它对应。这样，就可以求出一个一一映射的逆映射。

2. 函数、幂函数、指数函数与对数函数

(1) 函数。

课本中的函数定义，是由初中学习的函数概念入手，然后用映射的概念重新刻划了函数的定义。这两种定义实质上是一致的。所不同的只是叙述的出发点不同。初中时定义函数是从运动变化的观点出发，其对应法则是将自变量x的每一个取值与因变量y的唯一确定值相对应。而现行课本的函数定义则是从集合、对应的观点出发，其定义法则是将原象集合中任何一个元素与象集合中的唯一确定元素相对应。

从映射的角度出发，函数是具有以下两个特点的一种特殊的映射：f：$A \to B$。

①集合A、B必须是两个非空的数的集合。

②f：$A \to B$，是由集合A到集合B上的映射。

映射包括三要素：集合A、集合B，以及两者之间的对应法则；函数也包括三要素：定义域、值域，以及两者之间

的对应法则。不过函数中两集合限定为实数集（或实数集的子集），而映射中 A、B 集合可为任何集合。可见函数是一种特殊的映射。在函数的三要素中，其核心是对应法则。

（2）函数的对应法则。

一般地说，在函数记号 $y=f(x)$ 中，f 即代表了对应法则。其具体涵义是：对定义域中的任何一个 x，在对应法则 f 的作用下，就可以得到确定的 y 值。因此 f 便是使对应得以实现的具体方法和途径，是联系 x 和 y 的桥梁。当情况比较简单时，f 可能用一个解析式表达；当情况比较复杂时，f 若不可能用解析式表达，只好用列表或图象等其它方式来描述。在同一个具体问题中，相同的 f 表示同一个对应法则，不同的对应法则需用不同的符号如 $g(x)$，$\varnothing(x)$ 等来表示。函数 $y=f(x)$ 中自变量与函数用什么表示并不是本质问题。用 x 表示自变量，y 表示函数只是习惯上的用法，不能形成一见到 y 就认为是函数，见到 x 就认为是自变量的观点。

在研究具体问题时，必须把 $f(x)$ 中的"x"看"活"。等式 $y=f(x)$ 实质上刻划了括号（ ）内的自变量整体通过 f 这条途径如何到达 y。如：$y=f(x^2)$ 表达了括号内的 x^2 通过 f 到达 y。又如 $y=f[f(x)]$ 则表达了［ ］内的 $f(x)$ 通过 f 到达 y。

例 1 已知 $f(x)=2x-1$，$g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，求 $f(x^2)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f[g(x)]$。