偏微分-积分方程的有限元方法

Finite Element Methods for Partial Differentio-Integral Equations

张 铁 著

科 学 出 版 社
www.sciencep.com

偏微分-积分方程的有限元方法

Finite Element Methods for Partial Differentio-Integral Equations

张　铁　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书介绍作者和国内外同行多年来在偏微分－积分方程有限元方法领域中所取得的研究成果. 本书深入系统地研究了抛物型和双曲型偏微分–积分方程、Sobolev 方程、粘弹性方程和一阶双曲型方程(组)的有限元理论. 主要内容有：半离散和全离散有限元逼近及其在各种范数下的误差分析，非线性问题的有限元方法，有限元超收敛性质，有限元导数恢复技术，有限体积元方法和一阶双曲问题的间断有限元方法等.

本书可供高等院校计算数学、应用数学、计算物理和计算力学等专业的研究生和教师以及从事科学计算工作的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分–积分方程的有限元方法=Finite Element Methods for Partial Differentio-Integral Equations /张铁著. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-023673-9

I. 偏… II. 张… III. 积分微分方程–有限元法 IV. O175.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 068851 号

责任编辑：王丽平／责任校对：赵燕珍

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 5 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009 年 5 月第一次印刷 印张：15 1/4

印数：1—2 000 字数：295 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

偏微分–积分方程来源于许多物理和工程实际问题. 例如, 具有记忆性质材料的热传导, 多孔结构粘弹性体的压缩, 核反应堆中的热交换过程等, 其数学模型都可归结为如下形式的抛物型积分–微分方程:

$$u_t + A(t)u + \int_0^t B(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \ \ x \in \Omega, t \in J \tag{1}$$

其中, $\Omega \subset R^n$ 为有界区域, $J = (0, T]$, $A(t)$ 为二阶椭圆型偏微分算子, $B(t,\tau)$ 为任意一个不高于二阶的偏微分算子. 方程 (1) 中积分项的出现 (来源于物理过程的记忆或反馈性质) 使其与传统的抛物型方程有着本质的区别, 数值求解也更为困难. 因此, 在较长的一个时期内有关这类发展型积分–微分方程的数值理论和方法的研究要落后于传统的二阶椭圆型、抛物型和双曲型偏微分方程.

早期关于方程 (1) 的数值方法主要是差分方法 (参见 J. Douglas[36], B. Budak[12] 和 H. Brunner[13] 等人的工作). 进入 20 世纪 80 年代以来, 求解方程 (1) 的有限元方法开始得到广泛的研究. 最初人们仍然像处理抛物方程那样, 使用椭圆问题有限元 Ritz 投影来进行方程 (1) 的有限元分析. 但研究结果表明, 方程 (1) 中积分项的出现使问题的复杂性大大的增加, 有限元 Ritz 投影已经失去了原有的效用. 鉴于方程 (1) 与抛物方程区别在于出现了积分项, 这启示人们考虑可否构造一个带有积分项的有限元投影来取代有限元 Ritz 投影使上述困难得以克服. 基于这种思想, 1988 年 Cannon 和 Lin 引进了一个新的有限元投影, 称之为 Ritz-Volterra 投影, 定义为: $V_h : u(t) \to V_h u(t) \in S_h$ 满足

$$A(t; u(t) - V_h u(t), v) + \int_0^t B(t,\tau; u(\tau) - V_h u(\tau), v)\mathrm{d}\tau = 0, \ v \in S_h, \ t \in J$$

其中, S_h 为有限元空间, $A(t; u, v)$ 和 $B(t,\tau; u, v)$ 分别是与算子 $A(t)$ 和 $B(t,\tau)$ 相应的双线性形式. 显然, 有限元 Ritz-Volterra 投影 V_h 是椭圆问题有限元 Ritz 投影 R_h 的自然推广, 当 $B(t,\tau) \equiv 0$ 时, $V_h = R_h$ 成立. 此外, 有限元 Ritz-Volterra 投影也可视为 Volterra 积分–微分方程:

$$A(t)u + \int_0^t B(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \ \ x \in \Omega, t \in J \tag{2}$$

的有限元逼近解. 有限元 Ritz-Volterra 投影的引入为抛物型积分–微分方程有限元方法的研究开辟了新的途径, 更为重要的是它为与 Volterra 积分–微分方程相关的

发展型方程有限元方法的研究提供了统一的且十分有效的理论分析工具. 这些发展型方程包括: 双曲型积分–微分方程, Stokes 型积分–微分方程, Sobolev 方程和粘弹性方程等.

本书首先对有限元 Ritz-Volterra 投影进行了全面和系统的研究, 然后介绍如何使用有限元 Ritz-Volterra 投影这一强有力的分析工具来研究发展型偏微分–积分方程的有限元方法. 全书共分九章, 内容包括: 有限元 Ritz-Volterra 投影的稳定和逼近性质, 偏微分–积分方程的半离散和全离散有限元方法, 有限元解的长时间稳定性, 非线性问题的有限元逼近, 有限元解的超收敛性质, 有限元导数恢复技术, 有限体积元方法和一阶双曲问题的间断有限元方法等. 本书所介绍的方法和结果具有广泛的适用性, 它不但适用于本书中所讨论的偏微分–积分方程, 而且还适用于传统的二阶椭圆型、抛物型和双曲型方程, 因为这些方程是偏微分–积分方程中偏微分算子 $B(t,\tau)\equiv 0$ 时的特例 (参见方程 (1)~(2)). 本书内容主要取自作者多年来在这一领域中的研究成果, 同时也参考了国内外同行的工作, 这其中包括 J. R. Cannon, Y. P. Lin, V. Thomée, I. H. Sloan, C. M. Chen 和 N. Y. Zhang 等人的工作, 详细的说明已在每章末尾的文献与评注中给出. 需要指出的是, 作者的许多研究成果受益于多年来与加拿大 Alberta 大学数学系 Y. P. Lin 教授的学术交流和合作研究.

本书是在对作者的著作《发展型积分–微分方程有限元方法》(2001 年出版) 进行修改的基础上撰写的. 这次出版改正了原书中笔误和排版等错误, 并对一些文字表述做了适当的修正. 新增的内容主要有两个部分: 一是增补了有限元解的导数恢复技术及其超收敛性质, 其中包括积分形式的导数恢复公式 (参见第六章) 和矩形有限元的导数小片插值恢复技术 (参见第七章). 这些恢复公式可用于计算有限元解的导数并且具有强超收敛性质; 二是增补了近年来有限元方法研究领域中的热点课题: 一阶双曲问题的间断有限元方法 (参见第九章), 主要讨论了一阶双曲方程和一阶正对称双曲组的间断有限元格式的构造、最优收敛阶、间断有限元解的超收敛性质、后验误差估计和自适应计算等.

本书中有关一阶双曲问题间断有限元方法的研究内容是国家自然科学基金资助项目, 作者对该基金的资助以及王丽平编辑对本书出版的关心和支持表示感谢.

作　者

2009 年 3 月于东北大学

目　录

第一章　预 备 知 识

1.1　Sobolev 空间简介

设 R^n 为 n 维欧氏空间, Ω 为 R^n 中的区域. 用 $L_p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ 表示一切定义在 Ω 上 p 次可积函数组成的集合, $L_\infty(\Omega)$ 表示一切在 Ω 上本性有界的 (即除去一个零测度集外是有界的) 可测函数组成的集合. 则按范数

$$\|u\|_{0,p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

$$\|u\|_{0,\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| \equiv \inf_{m(E)=0} \sup_{x\in\Omega\setminus E} |u(x)|, \quad p = \infty$$

$L_p(\Omega)$ 为 Banach 空间, 而 $L_2(\Omega)$ 为 Hilbert 空间, 其内积定义为

$$(u, v) = \int_\Omega uv\mathrm{d}x$$

用 $C^m(\Omega)$ 表示区域 Ω 上 m 次连续可微的函数组成的集合, $C^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上无穷次可微函数组成的集合, 简记 $C^0(\Omega)$ 为 $C(\Omega)$. 记

$$\mathrm{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$$

并称之为函数 u 的支集. 用 $C_0^m(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$ 分别表示由 $C^m(\Omega)$ 和 $C^\infty(\Omega)$ 中一切具有紧支集的函数组成的集合.

记区域 Ω 上的偏微分算子 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, 其中 $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为非负整数, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 称为 n 重指标, 标记 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

定义 1.1　设 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为区域 Ω 上的 Lebesgue 局部可积函数空间, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 如果存在 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 使得

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

则称 v 是 u 的 $|\alpha|$ 阶广义导数, 并记为 $v = D^\alpha u$.

由变分法基本引理可知广义导数若存在必惟一. 又容易验证, 若 u 的古典导数存在且属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 则其广义导数存在且与古典导数一致. 因此广义导数概念是古典导数概念的推广.

广义导数具有如下性质：

(i) $D^\alpha(au+bv)=aD^\alpha u+bD^\alpha v$,　a,b 为常数;

(ii) $D^{\alpha+\beta}u=D^\alpha(D^\beta u)$;

(iii) $D(uv)=vDu+uDv$,　$D=D_i$;

(iv) $D^\alpha u=0$ 对一切 $|\alpha|=m$ 成立, 当且仅当 u 几乎处处等于一个 $m-1$ 次多项式.

设 m 为非负整数, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 考虑函数空间

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u:D^\alpha u\in L_p(\Omega),|\alpha|\leqslant m\}$$

这个空间依范数

$$\|u\|_{m,p}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha u|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty$$

$$\|u\|_{m,\infty}=\max_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_{0,\infty},\quad p=\infty$$

构成一个 Banach 空间, 我们称之为 Sobolev 空间. 有时也使用半范数

$$|u|_{m,p}=\Big(\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega|D^\alpha u|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty$$

$$|u|_{m,\infty}=\max_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|_{0,\infty},\quad p=\infty$$

令 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 按范数 $\|\cdot\|_{m,p}$ 在空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 内的闭包, 则 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 也是一个 Banach 空间, 它一般是 $W^{m,p}(\Omega)$ 的一个真闭子空间. 简记

$$H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega),\quad H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega)$$

$$\|\cdot\|_m=\|\cdot\|_{m,2},\quad \|\cdot\|=\|\cdot\|_{0,2},\quad |\cdot|_m=|\cdot|_{m,2}$$

于是 $H^m(\Omega),H_0^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 其内积为

$$(u,v)_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(D^\alpha u,D^\alpha v),\quad u,v\in H^m(\Omega)$$

Sobolev 空间具有如下性质：

(i) $W^{m,p}(\Omega)(1\leqslant p<\infty)$ 是可分的;

(ii) $W^{m,p}(\Omega)(1<p<\infty)$ 是自反和一致凸的;

(iii) $\{u\in C^\infty(\Omega):\|u\|_{m,p}<\infty\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)(1\leqslant p<\infty)$ 中稠密; 当 Ω 的边界是局部 Lipschitz 连续时, $C^\infty(\overline{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)(1\leqslant p<\infty)$ 中稠密.

再引进负指数 Sobolev 空间. 设 $1 < p < \infty, p' = p/(p-1)$ 为 p 的共轭指数. 显然, 对任意 $v \in L_{p'}(\Omega)$, 可确定 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一个有界线性泛函 L_v:

$$L_v(u) = (u, v), \quad u \in W^{m,p}(\Omega)$$

将此泛函的范数记为

$$\|v\|_{-m,p'}(=\|L_v\|) = \sup_{u \in W^{m,p}(\Omega)} \frac{|(u,v)|}{\|u\|_{m,p}}$$

并称之为 v 的负范数. 显然

$$|(u,v)| \leqslant \|u\|_{m,p}\|v\|_{-m,p'}$$

定义负指数 Sobolev 空间

$$W^{-m,p'}(\Omega) \equiv L_{p'}(\Omega) \text{ 按范数 } \|\cdot\|_{-m,p'} \text{ 的完备化空间}$$

可以证明 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 等距同构于对偶空间 $(W^{m,p}(\Omega))'$. 当 $p'=2$ 时, 简记 $H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$.

1.2 嵌入定理、迹定理

Sobolev 空间更深刻的性质反映在下面的嵌入定理和迹定理.

定义 1.2 设 X 和 Y 是两个线性赋范空间. 如果

(i) $X \subset Y$;

(ii) 将 $x \in X$ 映为 $Ix \in Y$ 的恒同算子 I 是连续的, 即存在常数 M 使得

$$\|Ix\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

则称 X 嵌入 Y, 记为 $X \hookrightarrow Y$. 又称 I 为嵌入算子, M 为嵌入常数.

Sobolev 嵌入定理 设 $\Omega \subset R^n$ 为有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 是局部 Lipschitz 连续的, m, k 为非负整数, $1 \leqslant p < \infty$. 则

$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$, 当 $m < n/p, \quad 1 \leqslant q \leqslant np/(n-mp)$

$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$, 当 $m = n/p, \quad 1 \leqslant q < \infty$

$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, 当 $m > n/p$

特别地, 下述的嵌入还是紧的:

$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$, 当 $m < n/p, \quad 1 \leqslant q < np/(n-mp)$

$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$, 当 $m = n/p, \quad 1 \leqslant q < \infty$

$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, 当 $m > n/p$

需要说明的是, $W^{m,p}(\Omega)$ 中的元素是函数的等价类, 几乎处处相等的函数归为同一等价类. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ 的含义是: 任一 $u \in W^{m,p}(\Omega)$ 必等价于 $C(\overline{\Omega})$ 中的一个函数 (仍可标记为 u), 同时存在常数 M 使得

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant M\|u\|_{m,p}, \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

现在考虑 $H^m(\Omega)$ 中函数的边界值, 即 u 在 $\partial\Omega$ 上的迹 $u|_{\partial\Omega}$. 由于 $\partial\Omega$ 为 n 维零测度集, 而 $H^m(\Omega)$ 中函数可以在零测度集上没有定义, 因此在通常意义下讨论 u 在 $\partial\Omega$ 上的取值是没有意义的. 我们将利用 $C^m(\overline{\Omega})$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的稠密性, 给出 $H^m(\Omega)$ 中函数在边界上迹的确切定义.

定义 1.3　设有界区域 $\Omega \subset R^n$ 具有 m 阶光滑的边界, $u \in C^m(\overline{\Omega})$. 线性算子 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{m-1}$:

$$\gamma_j u = \left.\frac{\partial^j u}{\partial n^j}\right|_{\partial\Omega}, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1$$

称为迹算子, 此处 $\dfrac{\partial^j}{\partial n^j}$ 表示沿边界 $\partial\Omega$ 外法向的 j 次方向导数.

引理 1.1　对上述区域, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|\gamma_j u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{j+1}, \quad \forall u \in C^m(\overline{\Omega}), 0 \leqslant j \leqslant m-1$$

现对 $u \in H^m(\Omega)$, 可取序列 $\{u_k\} \subset C^m(\overline{\Omega})$, 使 $\|u_k - u\|_m \to 0$ (当 $k \to \infty$). 由引理 1.1 知 $\{\gamma_j u_k\}$ 是 $L_2(\partial\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 故存在极限 $v_j \in L_2(\partial\Omega)$, v_j 显然与 $\{u_k\}$ 的选取无关. 现在定义 $u \in H^m(\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 上的迹:

$$\gamma_j u = v_j = \lim_{k\to\infty} \gamma_j u_k, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1$$

迹定理　设有界区域 $\Omega \subset R^n$ 具有 m 阶光滑的边界, $u \in H^m(\Omega)$. 则存在与 u 无关的常数 C, 使得

$$\|\gamma_j u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{j+1}, \quad \forall u \in H^m(\Omega), \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1$$

特别地

$$\|u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_1, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

最后的不等式 (通常称有嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\partial\Omega)$) 只要求 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的.

由于 $H_0^m(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 的完备化空间, 则根据迹算子的定义可有

$$H_0^m(\Omega) = \left\{u \in H^m(\Omega) : \left.\frac{\partial^j u}{\partial n^j}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1\right\}$$

关于迹定理的更精确形式, 涉及分数次 Sobolev 空间 $H^s(\Omega), s \geqslant 0$ 为任意实数. 此时, 对 $\forall u \in H^{s+1}(\Omega)$, 迹算子 $\gamma_j : H^{s+1}(\Omega) \hookrightarrow H^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 有意义, 其中 $j = 0, 1, \cdots, [s]$, 且

$$\|\gamma_j u\|_{s+\frac{1}{2},\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{s+1}, \quad j = 0, 1, \cdots, [s]$$

此外, γ_j 还是 $H^{s+1}(\Omega) \hookrightarrow H^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 的满映射 (不是 1–1 的), 对任何 $g \in H^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, 存在 $u \in H^{s+1}(\Omega)$, 使 $\gamma_j u = g$ 且

$$\|u\|_{s+1} \leqslant \|\gamma_j u\|_{s+\frac{1}{2},\partial\Omega}, \quad j = 0, 1, \cdots, [s]$$

最后介绍几个 Sobolev 空间中常用的不等式.

Poincaré不等式 设 $\Omega \subset R^n$ 为有界区域, $\Gamma \subset \partial\Omega, \mathrm{meas}(\Gamma) > 0$. 则存在常数 $C = C(\Omega) > 0$, 使

$$\|u\|_{1,p} \leqslant C\left(|u|_{1,p} + \left|\int_\Gamma u\mathrm{d}s\right|\right), \quad u \in W^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

特别当 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 时, 此不等式给出了 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 空间中范数 $\|\cdot\|_{1,p}$ 与半范数 $|\cdot|_{1,p}$ 的等价性, 此时可有

$$\|u\|_{0,p} \leqslant C|u|_{1,p}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

内插不等式 设 $\Omega \subset R^n$ 为有界区域, 边界 $\partial\Omega$ Lipschitz 连续, $m = p(1-\theta) + q\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 1, p \leqslant q$. 则存在常数 $C = C(\Omega) > 0$, 使

$$\|u\|_m \leqslant C\|u\|_p^{1-\theta}\|u\|_q^\theta, \quad u \in H^q(\Omega)$$

进一步设 $1 < p \leqslant q < \infty, \alpha = n/p - n/q \leqslant 1$, 则有

$$\|u\|_{0,q} \leqslant C\|u\|_{0,p}^{1-\alpha}\|u\|_{1,p}^\alpha, \quad u \in W^{1,p}(\Omega)$$

这两个内插不等式取自文献 [1, 10].

1.3 有限元空间及其性质

偏微分方程数值方法的实质是用有限维空间近似无穷维空间, 从而将在无穷维空间中求解的问题离散化为一个近似的有限维问题. 有限维近似空间的选取方法可有多种, 一个最常用的近似空间就是有限元空间, 它是建立在区域剖分基础上满足一定约束条件的分片多项式空间. 本节将介绍这方面的有关概念和结果.

1.3.1 有限元空间

在区域 $\overline{\Omega}$ 上建立一个剖分 T_h: 将 $\overline{\Omega}$ 分割为有限个具有 Lipschitz 连续边界的、相互之间没有公共内点的、内部非空的有界闭集 K 之和, 即 $\overline{\Omega} = \bigcup\{K : K \in T_h\}$. K 称为剖分单元, h 表示最大的单元直径, 也称为剖分直径.

定义 1.4 有限维空间 V_h 称为相应于剖分 T_h 的有限元空间, 如果

(i) 对每一 $K\in T_h$, 集合 $P_K=\{p:p=v_h|_K,\forall v_h\in V_h\}$ 是 K 上的某一多项式函数类, 并且存在一个自由度集合 $\Sigma_K=\{l_j,1\leqslant j\leqslant N\}$ (即一组线性无关的线性泛函, 它通常由插值节点和插值条件来规定), 它是 P_K 惟一可解的, 即任给 $\{\alpha_j,1\leqslant j\leqslant N\}$, 存在惟一的一个函数 $p\in P_K$ 满足

$$l_j(p)=\alpha_j,\quad 1\leqslant j\leqslant N$$

(ii) V_h 中的函数在 Ω 上具有一定的光滑性, 例如 $V_h\subset C^m(\overline{\Omega})$.

三元集合 $\{K,P_K,\Sigma_K\}$ 称为一个有限元.

顺此指出, 在应用中通常要求 V_h 属于某一 Sobolev 空间. 对此, 利用 Green 公式和广义导数定义, 可推得如下结果:

$$V_h=\{v_h\in C^m(\overline{\Omega}):v_h|_K\in P_K,K\in T_h\}\subset H^{m+1}(\Omega)$$

以下举两个最简单的有限元的例子.

三角剖分情形. 设 $\overline{\Omega}\subset R^2$ 可分割为有限个三角形之和, 则可建立区域 $\overline{\Omega}$ 的三角剖分 $T_h=\{K\},K$ 为三角单元. 记 $P_k(K)$ 为 K 上关于变量 x 和 y 的总次数不超过 k 的多项式集合.

例 1　Lagrange 型一次三角元

$$K=\Delta a_1a_2a_3(\text{参见图 1.1}),$$

$$P_K=P_1(K),\quad \dim P_K=3,$$

$$\Sigma_K=\{l_j:l_j(p)=p(a_j),\quad j=1,2,3\}.$$

任意 $p=a+bx+cy\in P_1(K)$ 由它在三角形顶点 a_1,a_2,a_3 上的值惟一确定. 易见相应的有限元空间 $V_h\subset C(\overline{\Omega})$, 从而 $V_h\subset H^1(\Omega)$.

矩形剖分情形. 设区域 $\overline{\Omega}\subset R^2$ 可分割成有限个矩形之和, 且每个矩形的边和坐标轴平行, 则可建立区域 $\overline{\Omega}$ 的矩形剖分 $T_h=\{K\},K$ 为矩形单元. 记 $Q_k(K)$ 是 K 上关于每个变量 x 或 y 的次数不超过 k 的多项式集合, 显然 $P_k(K)\subset Q_k(K)\subset P_{2k}(K)$.

例 2　Lagrange 型双线性矩形元

$$K=\square a_1a_2a_3a_4(\text{参见图 1.2}),$$

$$P_K=Q_1(K),\quad \dim P_K=4,$$

$$\Sigma_K=\{l_j:l_j(p)=p(a_j),\quad j=1,2,3,4\}.$$

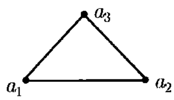

图 1.1

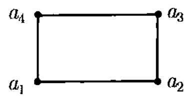

图 1.2

任意 $p = a + bx + cy + dxy \in Q_1(K)$ 由它在矩形顶点 a_1, a_2, a_3, a_4 上的值惟一确定. 相应的有限元空间 $V_h \subset C(\overline{\Omega})$, 从而 $V_h \subset H^1(\Omega)$.

还可考虑高次多项式构成的有限元空间, Hermite 型有限元 (含有导数值自由度) 和四边形剖分情形, 这里不再详述.

1.3.2 插值逼近性质

有限元空间作为求解问题所在的无穷维空间的一个近似空间, 必须具有一定的逼近性质才有使用价值. 下面根据 Sobolev 空间的插值理论介绍有关结果.

定义 1.5 给定有限元 $\{K, P_K, \Sigma_K\}$, 称 $\Pi_K v$ 为 $v \in C^s(K)$(此处 s 是 Σ_K 中出现的最高阶偏导数的阶数) 的 P_K-插值, 如果

$$\Pi_K v \in P_K,$$

$$l(\Pi_K v) = l(v), \quad \forall\, l \in \Sigma_K$$

此时 $\Pi_K : C^s(K) \to P_K$ 称为 P_K-插值算子. 又设 V_h 是相应于剖分 $T_h = \{K\}$ 的有限元空间, 称 $\Pi_h v$ 为 $v \in C^s(\overline{\Omega})$ 的 V_h-插值, 如果

$$\Pi_h v \in V_h,$$

$$\Pi_h v|_K = \Pi_K v, \quad \forall\, K \in T_h$$

$\Pi_h : C^s(\overline{\Omega}) \to V_h$ 就称为 V_h-插值算子.

定义 1.6 两个有限元 $\{K, P, \Sigma\}$ 和 $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$ 称为仿射等价的, 如果存在可逆的仿射变换 $F : \hat{x} \in \hat{K} \to x = F(\hat{x}) \in K$, 使得

$$K = F(\hat{K}),$$

$$P = \{p = \hat{p} \circ F^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\},$$

$$\Sigma = \{l_j : l_j(p) \text{ 与 } \hat{l}_j(\hat{p}) \text{ 定义形式一致}, \forall\, \hat{l}_j \in \hat{\Sigma}\}.$$

一族有限元称为仿射族, 如果其所有有限元都仿射等价于某一参考有限元 $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$.

定义 1.7 称剖分 T_h 是正则的, 如果存在正常数 σ, 使得

$$h_K/\rho_K \leqslant \sigma, \quad \forall\, K \in T_h, \quad h > 0,$$

$$\text{直径 } h \to 0,$$

其中 $h_K = \mathrm{diam}(K), \rho_K = \sup\{\mathrm{diam}(S):\ \text{球 } S \subset K\}$.

插值逼近定理 给定一个有限元仿射族, 假设相应的剖分 $T_h = \{K\}$ 是正则的, 在参考元 $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$ 上成立下列关系:

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \hookrightarrow C^s(\hat{K}),$$

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{K}),$$

$$P_k(K) \subset \hat{P} \subset W^{m,q}(\hat{K})$$

其中 s 为 $\hat{\Sigma}$ 中出现的最高阶偏导数的阶数, m, k 为非负整数, $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty$. 则存在不依赖于 K 的常数 C, 使对任何 $K \in T_h$ 和函数 $v \in W^{k+1,p}(K)$, 有

$$|v - \Pi_K v|_{m,q,K} \leqslant C(h_K)^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,p,K}$$

特别当 $p = q = 2$ 时, 有

$$|v - \Pi_K v|_{m,K} \leqslant C h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,K}$$

显然, 在定理条件下, 有限元空间 V_h 上的插值算子 Π_h 将具有如下逼近性质:

$$\|v - \Pi_h v\|_{0,p} + h\|v - \Pi_h v\|_{1,p} \leqslant C h^{k+1} \|v\|_{k+1,p}, \quad v \in W^{k+1,p}(\Omega)$$

这里自然假定 $\overline{\Omega} = \bigcup\{K : K \in T_h\}$.

1.3.3 有限元逆性质

我们将看到在比正则剖分更强的剖分条件下, 有限元空间还具有其他一些良好的性质.

定义 1.8 称正则剖分 T_h 是拟一致的, 如果存在常数 γ, 使得

$$h/h_K \leqslant \gamma, \quad \forall K \in T_h, \quad h > 0$$

有限元逆性质 设剖分 T_h 是拟一致的, v_h 是 T_h 上分片多项式函数, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty, l \leqslant m$. 则存在常数 $C = C(\sigma, \gamma, l, m, r, q)$, 使得

$$\left(\sum_{K \in T_h} |v_h|_{m,q,K}^q\right)^{1/q} \leqslant C h^{-\max\left(0, \frac{n}{r}-\frac{n}{q}\right)} h^{l-m} \left(\sum_{K \in T_h} |v_h|_{l,r,K}^r\right)^{1/r}$$

此处当 $q = \infty$ 时规定

$$\left(\sum_{K \in T_h} |v_h|_{m,q,K}^q\right)^{1/q} = \max_{K \in T_h} |v_h|_{m,\infty,K}$$

特别当 $r=q=2$ 时, 可有

$$\left(\sum_{K\in T_h}|v_h|_{m,K}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant Ch^{l-m}\left(\sum_{K\in T_h}|v_h|_{l,K}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

据此, 可得到有限元空间 $V_h\subset W^{1,p}(\Omega)$ 上的一个常用的逆不等式:

$$\|v_h\|_{1,p}\leqslant Ch^{-1}\|v_h\|_{0,p},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\quad v_h\in V_h \tag{1.1}$$

熟知, 当 $\Omega\subset R^n$ 时, 嵌入关系 $W^{1,n}(\Omega)\hookrightarrow L_\infty(\Omega)$ 并不成立, 然而在有限元空间 V_h 上却有如下弱嵌入结果.

弱嵌入不等式 设 $\Omega\subset R^n, n\geqslant 2$, 剖分 T_h 是拟一致的, $V_h\subset C(\overline{\Omega})\bigcap W^{1,n}(\Omega)$. 则有

$$\|v_h\|_{0,\infty}\leqslant C(\|v_h\|_{0,n}+|\ln h|^{\frac{n-1}{n}}|v_h|_{1,n}),\quad v_h\in V_h$$

特别地, 当 $V_h\subset C(\overline{\Omega})\bigcap W_0^{1,n}(\Omega)$ 时, 利用 Poincaré不等式得到

$$\|v_h\|_{0,\infty}\leqslant C|\ln h|^{\frac{n-1}{n}}|v_h|_{1,n},\quad v_h\in V_h \tag{1.2}$$

此弱嵌入不等式的一个详细证明见文献 [163].

1.4 椭圆边值问题的有限元逼近

1.4.1 椭圆边值问题的适定性

设 $\Omega\subset R^n$ 为有界区域, $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的. 考虑椭圆方程 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{aligned} Au=f,&\quad x\in\Omega\\ u=g,&\quad x\in\partial\Omega\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中偏微分算子

$$A=-\sum_{i,j=1}^{n}D_i(a_{ij}(x)D_j)+a_0(x)I$$

是一致椭圆的, 即 $a_0(x)\geqslant 0$, 且存在常数 $c_0>0$, 使

$$\sum_{i,j}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant c_0|\xi|^2,\quad \forall x\in\Omega,\quad \xi\in R^n \tag{1.4}$$

也假设系数函数 a_{ij},a_0 是适当光滑的. 边值问题 (1.3) 解的存在惟一性基于如下 Lax-Milgram 定理[72].

定理 1.1(Lax-Milgram 定理) 设 V 是一个实 Hilbert 空间, V' 是它的对偶空间, $a(u,v)$ 是 $V\times V$ 上的双线性形式. 假设 $a(u,v)$ 是连续和正定的, 即存在正常数 M,γ, 使