21世纪大学数学创新教材

概率论与数理统计

李书刚　编

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪大学数学创新教材·

概率论与数理统计

李书刚 编

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是根据作者多年来讲授概率论与数理统计课程的讲义整理编写而成的. 全书共分六章. 第一至四章介绍了概率论的基础知识，第五、六章介绍了数理统计的基础知识. 每章末附有一定量的习题，并选编了20年来数学(一)考研试题.

本书可作为高等院校教材，也可供考研复习使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/李书刚编. —北京：科学出版社，2008

21世纪大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-022827-7

Ⅰ. 概… Ⅱ. 李… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第130749号

责任编辑：张颖兵 梅 莹 /责任校对：曾 莉

责任印制：董艳辉 /封面设计：苏 波

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉嘉捷印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008年8月第一次印刷 印张：12

印数：1—5 000 字数：229 000

定价：19.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

客观世界中发生的现象不外乎两种：一种是确定性现象，一种是随机现象.例如，在1个大气压下水在100℃时必然沸腾，在0℃时必然结冰，就是确定现象；掷一枚硬币可能出现正面也可能出现反面，同一个人用同样的方法投掷同一颗骰子，出现的点数不尽相同，在一次投掷之前无法预测确切点数等就是随机现象.随机现象是指在一定条件下，具有多种可能结果，但事先又不能确定究竟出现哪一种结果的现象.经典的数学理论如微积分学、微分方程等都是用来研究确定性现象的，对随机现象无能为力.随着社会生产和科学的发展，人们对随机现象越来越重视，从而使研究随机现象的概率统计获得了迅速的发展，形成了数学的一个重要分支，它广泛地应用于工业、农业、军事和科学技术中，并且还不断地向其他学科渗透，其势头至今不减.

本书主要讲概率论，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、数字特征、大数定律和中心极限定理.另外介绍数理统计的基础知识，内容包括统计量及其分布、参数估计和假设检验.全部讲授约需50学时左右.习题安排了基础题(A类)和提高题(B类)，其中提高题摘自20年来数学(一)考研试题，学有余力的同学做一做这类题目对提高自己的解题能力大有好处.

由于编者水平有限，书中难免有缺点和错误，欢迎广大师生批评指正.

编　者

2008年4月

目　录

前言

第一章　随机事件及其概率

第一节　随机事件及其运算

概率论是研究随机现象数量规律的一门数学学科.对随机现象进行研究,就要进行观察、试验.为了叙述方便,我们把对自然现象或社会现象进行的观察或实验,都称为**试验**.如果一个试验在相同条件下重复进行,而每次试验的可能结果不止一个,但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果,则称这种试验为**随机试验**.以下所说的试验都是指随机试验.

在试验中,可能发生也可能不发生的事情,称为**随机事件**,简称**事件**.

例 1　掷一枚硬币,出现正面及出现反面都是随机事件.

例 2　掷一颗骰子,出现"1"点,"3"点,"5"点都是随机事件.

例 3　电话接线员在上午 8 时到 9 时接到的电话呼叫次数,如出现 0 次,1 次……及出现次数在 20 到 50 之间都是随机事件.

例 4　对某一目标发射一发子弹,弹着点与目标中心的距离为 0.1 米,0.5 米及 0.2 米到 0.3 米之间都是随机事件.

从上面的例子可以看出,在一个试验中,所出现的事件是很多的.例 1 的事件有两个,例 2 的事件有很多个,但却是有限的.例 3 和例 4 的事件却有无穷多个.

在一个试验下,不管事件有多少个,总可以从其中找出这样一组事件,它具有如下性质:

(1) 每进行一次试验,必然发生且只能发生这一组中的一个事件;

(2) 任何事件,都是由这一组中的部分事件组成的.

这样一组事件中的每一个事件称为**基本事件**,用 ω 来表示.基本事件的全体,称为试验的**样本空间**,用 Ω 表示.

在例 1 中,我们取

$$\Omega=\{(\text{出现正面}),(\text{出现反面})\}.$$

在例 2 中,我们取

$$\Omega=\{(\text{出现 1 点}),(\text{出现 2 点}),\cdots,(\text{出现 6 点})\}.$$

在例 3 中，我们取

$$\Omega=\{(\text{出现 0 次}),(\text{出现 1 次}),\cdots\}.$$

在例 4 中，我们取

$$\Omega=\{(\text{弹着点与目标中心的距离 }\omega)\mid 0\leqslant\omega<+\infty\}.$$

通常，Ω 中的基本事件就是试验中所有可能直接出现的结果. 根据这一点，我们可以对试验找出所有的基本事件.

如果我们把一个基本事件视为一个抽象的“点”，那么样本空间就是由这些抽象的“点”组成的空间. 根据性质(2)，一个事件就是由 Ω 中的部分点(基本事件)组成的集合. 通常用大写字母 A, B, C, …表示事件，它们是 Ω 的子集.

如果某个 ω 是事件 A 的组成部分，即这个 ω 在事件 A 中出现，记为 $\omega\in A$，读作 ω 属于 A. 如果在一次试验中所出现的 ω 有 $\omega\in A$，则称在这次试验中事件 A 发生.

如果 ω 不是事件 A 的组成部分，就记为 $\omega\notin A$，读作 ω 不属于 A. 在一次试验中，所出现的 ω 有 $\omega\notin A$，则称此试验 A 没有发生.

很显然，总有 $\omega\in\Omega$，将 Ω 作为事件，则在试验中事件 Ω 总是发生的，故称 Ω 为**必然事件**. 它不是随机事件，把它作为事件主要是为了讨论问题的方便. 另一个不是随机事件而视为事件的就是不包含任何基本事件的事件，记为 $\varnothing$. 由于对一切的 ω 有 $\omega\notin\varnothing$，故在试验中，$\varnothing$ 总是不发生的，所以称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

如果我们有了一些事件，则可以从这些事件得出其他事件来，这就是**事件的运算**. 下面先介绍事件的包含与等价关系，再讨论事件的运算.

如果事件 A 的组成部分也是事件 B 的组成部分，则称事件 A **包含于**事件 B，或称事件 B **包含**事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. $A\subset B$ 的直观意义就是如果事件 A 发生必有事件 B 发生.

如果同时有 $A\subset B$, $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **等价**，或称 A **等于** B，记为 $A=B$. 其直观意义是组成 A、B 的基本事件完全相同，因此可以看做是一样的.

将事件 A 与 B 的组成部分合并(A、B 所共同的基本事件只取一次)而组成的事件称为事件 A 与事件 B 的**并**事件(或和事件)，记为 $A\cup B$. 由于 $A\cup B$ 发生是指属于 $A\cup B$ 的某个基本事件 ω 发生，所以 ω 不属于 A 就属于 B，即表示不是 A 发生就是 B 发生，因而 $A\cup B$ 的直观意义就是 A、B 中至少有一个发生的事件. 类似地，我们可以规定可列个事件 A_1, A_2, …, A_i, …的并，记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_i\cup\cdots,\quad \text{或}\ \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,$$

它表示 A_1, A_2, …, A_i, …中至少有一个发生的事件.

事件 A、B 的共同组成部分所构成的事件，称为事件 A 与 B 的**交事件**(或**积事件**)，记为 $A\cap B$. 有时也可省去“$\cap$”而简写为 AB. 若属于 $A\cap B$ 的某个 ω 发生，那就是 A 与 B 同时发生，所以 $A\cap B$ 的直观意义是 A、B 同时发生的事件. 类似地，可以规定可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$的交，记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i\cap\cdots,\quad \text{或}\ \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i,$$

它表示 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$同时发生的事件.

属于 A 而不属于 B 的部分所构成的事件，称为 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$，它表示 A 发生而 B 不发生的事件.

$A\cap B=\varnothing$，则表示 A 与 B 不可能同时发生，称事件 A 与事件 B **互不相容**. 基本事件是互不相容的.

$\Omega-A$ 称为事件 A 的**逆事件**，或称为 A 的**对立**事件，记为$\overline{A}$. 它表示 A 不发生的事件. 这样可得

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

前一式表示 A 与$\overline{A}$至少有一个发生，后一式表示 A 与$\overline{A}$不能同时发生.

必须指出，直观意义能帮助我们理解事件间的关系，但不能代替严格的数学证明. 下面我们来证明

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i.$$

我们首先证明

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i. \tag{1.1}$$

设 $\omega\in\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}$，则有

$$\omega\notin\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i,$$

从而可知，至少存在 i_0，使得 $\omega\notin A_{i_0}$，即 $\omega\in\overline{A}_{i_0}$. 于是可知

$$\omega\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i.$$

这样就证明了式(1.1).

其次，我们来证明

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i\subset\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}. \tag{1.2}$$

设 $\omega\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$，则至少存在 i_0，使得 $\omega\in\overline{A}_{i_0}$，即 $\omega\notin A_{i_0}$. 于是可知

$$\omega \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

即 $\omega \in \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}$. 这样就证明了式(1.2).

由式(1.1)、(1.2)同时成立,可知

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i. \qquad \square$$

以上是证明等价关系的一般方法. 对于一些比较明显的等价关系,可以由直观意义获得,也可以借助几何直观获得. 下面介绍**文**(John Venn, 1834—1923)**图**.

用平面上的一个矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示基本事件 ω,则事件间关系及运算就可用平面上的几何图形表示,如图 1.1 所示. 事件 A、B 分别用两个小圆表示,阴影部分表示 A 与 B 的各种关系及运算.

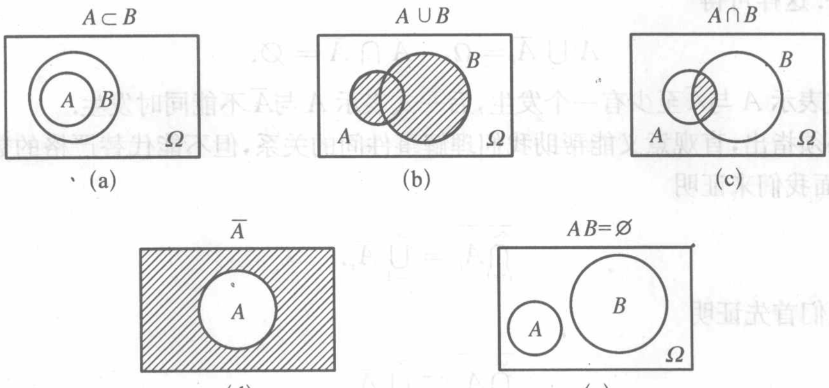

图 1.1

由图 1.1(b),可得

$$A-B=A-AB,$$
$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-AB.$$

例 5 一口袋中装有五只同样大小的球,其中三只是白色的,两只是黑色的. 现从袋中取球两次,每次取一只,并且取出后不放回袋中. 写出该试验的样本空间 Ω. 若 A 表示取到的两只球是白色的事件,B 表示取到的两只球是黑色的事件,试用 A、B 表示下列事件:

(1) 两只球是颜色相同的事件 C;

(2) 两只球是颜色不同的事件 D;

(3) 两只球中至少有一只白球的事件 E.

解 假设每个球是可以区别的,则可以给每个球编上号: 白$_1$,白$_2$,白$_3$,黑$_4$,黑$_5$. 于是有

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(\text{白}_1,\text{白}_2),(\text{白}_1,\text{白}_3),(\text{白}_1,\text{黑}_4),(\text{白}_1,\text{黑}_5),(\text{白}_2,\text{白}_1),\\&(\text{白}_2,\text{白}_3),(\text{白}_2,\text{黑}_4),(\text{白}_2,\text{黑}_5),(\text{白}_3,\text{白}_1),(\text{白}_3,\text{白}_2),\\&(\text{白}_3,\text{黑}_4),(\text{白}_3,\text{黑}_5),(\text{黑}_4,\text{白}_1),(\text{黑}_4,\text{白}_2),(\text{黑}_4,\text{白}_3),\\&(\text{黑}_4,\text{黑}_5),(\text{黑}_5,\text{白}_1),(\text{黑}_5,\text{白}_2),(\text{黑}_5,\text{白}_3),(\text{黑}_5,\text{黑}_4)\}.\end{aligned}$$

从而,$C = A \cup B$, $D = \overline{C} = \overline{A \cup B}$, $E = D \cup A = \overline{A \cup B} \cup A = \overline{B}$.

若我们认为白球间是无区别的,黑球也是无区别的,则有

$$\Omega = \{(\text{白},\text{白}),(\text{白},\text{黑}),(\text{黑},\text{白}),(\text{黑},\text{黑})\}.$$

这样 C、D、E 所表示的事件就更加简单了.

由这个例子可以看出,同一试验可以设计不同的样本空间,而设计的好坏取决于能否使讨论的问题得到简捷的解决.

第二节 概率的定义及其计算

一、频率

随机事件在一次试验中是否发生,事先无法确定,但在大量重复试验中,人们发现它具有一定的统计规律性,这表明它发生的可能性的大小还是可以度量的. 一般说来,一个事件 A 发生的可能性大小,可用在 n 次重复试验下,事件 A 发生的次数 n_A 与 n 的比值来反映. 我们将

$$F_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

称为事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**.

频率具有如下性质:

(1) 对任一事件 A,有 $0 \leqslant F_n(A) \leqslant 1$;

(2) 对必然事件 Ω,有 $F_n(\Omega) = 1$;

(3) 若事件 A、B 互不相容,则

$$F_n(A \cup B) = F_n(A) + F_n(B).$$

证 因为 $0 \leqslant n_A \leqslant n$, 所以有 $0 \leqslant \dfrac{n_A}{n} \leqslant 1$, 由 $F_n(A)$ 的定义就得性质(1).

由 $n_{\Omega}=n$，即可得性质(2).

由于 $A\cup B$ 事件的发生就是 A，B 两事件中至少一个发生，又知 A、B 互不相容，故有

$$n_{A\cup B}=n_A+n_B.$$

两端除以 n，就得性质(3). □

性质(3)还可以推广，若事件 A_1，A_2，…，A_m 两两互不相容，则

$$F_n\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}F_n(A_i).$$

频率虽然在一定程度上反映了事件发生的可能性大小，但它却依赖于人的认识，即会因人而异. 因为即使同样做了 n 次试验，n_A 却会不一样，这种差异我们常说成是频率具有随机波动性. 但若加深认识(这里就是增加试验次数 n)，那么随机波动性将会减小. 即随着 n 逐渐增大，$F_n(A)$ 也就逐渐稳定于某个常数 $P(A)$. 这个常数 $P(A)$ 客观上反映事件 A 发生的可能性的大小.

历史上著名的统计学家蒲丰(George Louis de Buffon，1707—1788)和皮尔逊(Karl Pearson，1857—1936)曾进行过大量掷硬币的试验，所得结果如下：

试验者	掷硬币次数	出现正面的次数	出现正面的频率
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

可见出现正面的频率总在 0.5 附近波动. 随着试验次数的增加，它逐渐稳定于 0.5. 这个 0.5 就能反映正面出现的可能性大小.

每个事件都有这样一个常数与之对应. 这就是说频率具有稳定性. 因而可将事件 A 的频率 $F_n(A)$，在 n 无限增大时所逐渐稳定的那个常数 $P(A)$ 定义为事件 A 发生的概率. 这就是概率的统计定义. 然而这个定义本身存在着很大缺点，即这里的“逐渐稳定”含义不清，要对“逐渐稳定”的含义作出具体说明就总会或多或少地带有人为的主观性. 是否能去除这个含混不清的“逐渐稳定”，而将客观上表征该事件发生可能性大小的一个数，及它所固有的性质来作为概率的定义呢？我们自然马上会意识到这个数应该具有频率所具有的几个性质. 这个工作由数学家柯尔莫哥洛夫(Andrei Nikolayevich Kolmogorov，1903—1987)于 1933 年完成. 他给出了概率的公理化定义，从而使概率论迅速发展成为一个严谨的数学分支.

二、概率定义

设 Ω 为样本空间，对每一个事件 A 都有一个实数 $P(A)$，若满足下列三个条件：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega) = 1$；

(3) 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为**事件 A 的概率**.

条件(3)常称为可列(完全)可加性，也称为加法定理.

由概率的定义可以得到概率的如下性质.

性质 1 不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing) = 0$.

证 因为

$$\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \cdots,$$

所以

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + \cdots,$$

故

$$P(\varnothing) = 0. \qquad \square$$

性质 2 概率具有有限可加性，即若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证 因为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots,$$

由可列可加性及性质 1 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \qquad \square$$

性质 3 对任何事件 A 有

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

证 由 $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$，故得

$$1 = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

将 $P(\overline{A})$ 移至等号左端即得

$$P(A)=1-P(\bar{A}).$$ □

性质 4 对事件 A、B,若有 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

及

$$P(A)\leqslant P(B).$$

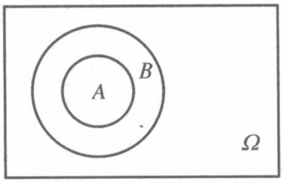

图 1.2

证 由图 1.2 可知

$$B=A\cup(B-A)$$

及

$$A\cap(B-A)=\varnothing,$$

故有

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

由 $P(B-A)\geqslant 0$,可得

$$P(A)\leqslant P(B).$$ □

性质 5 对任意两事件 A、B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证 由图 1.3 可知

$$A\cup B=A\cup(B-A)$$

及

$$B=AB\cup(B-A),$$

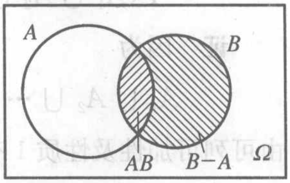

图 1.3

而且

$$A\cap(B-A)=\varnothing,$$
$$AB\cap(B-A)=\varnothing,$$

故得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)$$

及

$$P(B)=P(AB)+P(B-A).$$

将上面两式相减，并将 $P(B)$ 移到等号右边，即得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).\qquad \square$$

性质 5 可推广到任意 n 个事件上去. 当 $n=3$ 时，有

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

例 1 某人到武汉出差两天，据天气预报，第一天下雨的概率为 0.6，第二天下雨的概率为 0.3，两天都下雨的概率为 0.1. 求：

(1) 第一天下雨而第二天不下雨的概率；

(2) 第一天不下雨而第二天下雨的概率；

(3) 至少有一天下雨的概率；

(4) 两天都下雨的概率.

解 设 A_i 为第 i 天下雨的事件，$i=1, 2$. 由题意可知，$P(A_1)=0.6$，$P(A_2)=0.3$，$P(A_1A_2)=0.1$.

(1) 设 B 为第一天下雨而第二天不下雨的事件，则有

$$B=A_1-A_2=A_1-A_1A_2,\quad 且\ A_1A_2\subset A_1,$$

故得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1-A_1A_2)=P(A_1)-P(A_1A_2)\\&=0.6-0.1=0.5.\end{aligned}$$

(2) 设 C 为第一天不下雨而第二天下雨的事件，用类似于(1)的解法有

$$P(C)=P(A_2-A_1A_2)=P(A_2)-P(A_1A_2)=0.3-0.1=0.2.$$

(3) 设 D 为至少有一天下雨的事件，则有 $D=A_1\cup A_2$，故得

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=0.6+0.3-0.1=0.8.\end{aligned}$$

(4) 设 E 为两天都不下雨的事件，则有

$$E=\overline{A}_1\,\overline{A}_2=\overline{A_1\cup A_2}.$$

故得

$$P(E)=P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(A_1\cup A_2)=1-0.8=0.2.$$

三、概率的计算

前面我们从某些事件的概率出发，利用概率的性质计算出了一些事件的概率. 但对于等可能概型(又称**古典概型**)我们却可以直接计算任意事件的概率. 所谓**等可能概型**是指在这种试验中，样本空间仅包含有限个基本事件，并且每个基本事件的发生是**等可能的**，即这种试验应满足：

(1) $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$；

(2) $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$.

由于基本事件是互不相容的，从而有

$$\begin{aligned}1=P(\Omega)&=P\{(\omega_1)\cup(\omega_2)\cup\cdots\cup(\omega_n)\}\\&=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n).\end{aligned}$$

由(2)可得

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n},\quad i=1, 2, \cdots, n.$$

设任一事件 A，它是由 $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}$ 组成的，则有

$$\begin{aligned}P(A)&=P\{(\omega_{i_1})\cup(\omega_{i_2})\cup\cdots\cup(\omega_{i_k})\}\\&=P(\omega_{i_1})+P(\omega_{i_2})+\cdots+P(\omega_{i_k})\\&=\frac{k}{n}=\frac{A\text{所包含的基本事件的总数}}{\text{基本事件的总数}}.\end{aligned}$$

以上是事件 A 的概率计算公式，即概率的**古典定义**. 它告诉我们对于等可能概型，计算事件概率关键在于计算基本事件总数和该事件所包含的基本事件数. 可是由于样本空间的设计可有各种不同的方法，这就使得等可能概型的计算变得花样繁多，难易程度也就大不相同了.

一般我们把从有限个元素中随机抽取的问题当作是等可能的，今后不再加以说明.

例 2 一只袋中装有五只大小相同的球，其中三只白色，两只黑色. 现从袋中取球两次，每次一只，取出后不再放回袋中. 试求：

(1) 两只球都是白色的概率；

(2) 两只球颜色不同的概率；

(3) 至少有一只白球的概率.

解 设 A 为两只球都是白色的事件，B 为两只球颜色不同的事件，C 为至少有