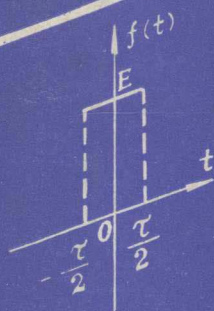


★ 职工高等工业专科学校教材

积分变换

黄午阳 编



高等教育出版社

职工高等工业专科学校教材

积 分 变 换

黄午阳 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据原教育部1983年颁发的职工高等工业专科学校工程数学教学大纲(积分变换部分)编写的,内容分为傅里叶变换和拉普拉斯变换,叙述简明扼要,并配有习题,可供职工大学教学使用。

职工高等工业专科学校教材

积 分 变 换

黄午阳 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印张2.625 字数65,000

1986年8月第1版 1986年8月 第1次印刷

印数 00,001—8,700,

书号 13010·01306 定价0.48元

前 言

在数学中，常常采取变换方法将较复杂的运算转化为较简单的运算。代数中的对数运算，解析几何中的坐标变换等都属于这种情况。积分变换是通过积分运算把一个函数变成另一个函数的一种变换。利用积分变换可将常微分方程化成代数方程，从而达到简化运算的目的。对于某些用经典方法求解有困难的微分方程，也可用积分变换来求解。

积分变换的理论和方法不仅在某些数学分支中，而且在其他自然科学和工程技术中都得到了广泛的应用。例如，在无线电技术中，当我们需要设计一个符合要求的放大器时，往往要利用傅里叶变换来对信号进行频谱分析。又如，在控制理论中，需要通过拉普拉斯变换来分析系统的传递特性。本书所介绍的就是这两种最常用的积分变换——傅里叶变换和拉普拉斯变换。

本书可作为高等工业专科学校积分变换课程的教材，也可供有关工程技术人员参考。

为了便于未学过复变函数的读者也能顺利阅读本书的绝大部分内容，我们对某些涉及复变函数的内容作了适当处理。

在本书的编写过程中，主要参考了南京工学院数学教研组编的《积分变换》（高等教育出版社，1982年5月第2版），北京大学数学力学系高等数学教材编写组编的《常微分方程与无穷级数》（人民教育出版社，1978年4月第1版），B.P.拉斯著的《信号、系统和控制》（科学出版社，1982年3月第1版）以及郑钧著的《线性系统分析》（科学出版社，1978年1月第1版）等教材和著作。本书由张元林、盛仲达、徐先诚、朱镛道同志审阅，他们提出了许多重要而宝贵的修改意见，编者对上述同志表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中肯定存在不少缺点和不当之处，欢迎同志们批评指教。

编 者

1985年7月

目 录

第一章 傅里叶变换	1
§ 1.1 指数形式的傅氏级数.....	2
§ 1.2 傅氏积分与傅氏变换.....	8
§ 1.3 单位脉冲函数及其傅氏变换.....	15
习题一.....	22
第二章 拉普拉斯变换	24
§ 2.1 拉氏变换的概念.....	24
§ 2.2 拉氏变换的性质.....	30
§ 2.3 拉氏逆变换.....	46
§ 2.4 微分方程的拉氏变换解法.....	58
习题二.....	65
附录 I 傅氏变换简表	69
附录 II 拉氏变换简表	75

第一章 傅里叶变换

§ 1.1 指数形式的傅氏级数

我们知道,凡是周期信号都有一个基本波形,在 $(-\infty, +\infty)$ 内,这个基本波形周期性地重复出现.图 1.1 就是一个周期信号的例子.周期信号可用周期函数 $f_T(t)$ 表示.

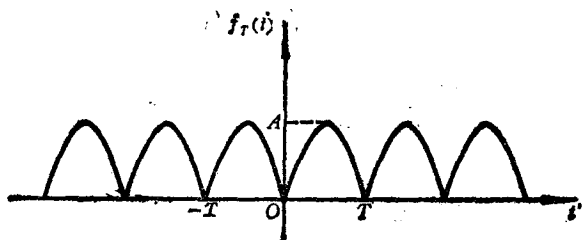


图 1.1

由高等数学知识可知,若周期函数 $f_T(t)$ 的周期为 T , 频率为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 则当 $f_T(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 上满足狄利克雷 (Dirichlet) 条件(简称狄氏条件,即函数在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 上满足, 1° 连续或只有有限个第一类间断点, 2° 只有有限个极值点)时,它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 上就可展开成傅里叶 (Fourier) 级数, 且在 $f_T(t)$ 的连续点处, 其傅氏级数展开式为

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t) \quad (1.1)$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n \omega_0 t dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n \omega_0 t dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

利用三角公式, (1.1)式可变形为

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

其中 A_n, φ_n 是常数, 从而表明, 周期信号是由频率分别为 $0, \omega_0, 2\omega_0, \dots, n\omega_0, \dots$ 的正弦分量组成的. 应当指出, 零频率代表直流分量; 频率 ω_0 对应的周期 T 与 $f_T(t)$ 的周期相同, 因而称为基波频率; $n\omega_0$ 则称为 $f_T(t)$ 的 n 次谐波频率.

根据欧拉(Euler)公式

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t$$

$$e^{-jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t$$

可得

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin n\omega_0 t = -j \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

代入(1.1)式得

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) - j \frac{b_n}{2} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - j b_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n + j b_n) e^{-jn\omega_0 t} \right] \end{aligned}$$

(1.2)

如果令

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt \\
 c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt - \right. \\
 &\quad \left. - j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) [\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t] dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\
 c_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{jn\omega_0 t} dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

则(1.2)式可写为

$$\begin{aligned}
 f_T(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{1.4}$$

(1.3)式(1.4)式就是指数形式的傅氏级数和傅氏系数。

例 如图 1.2 之矩形脉冲,其周期为 T , 频率为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 脉冲宽度为 τ . $f_T(t)$ 在一个周期内的函数表达式为

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{\tau}{2} \\ E, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

试求其指数形式的傅氏级数。

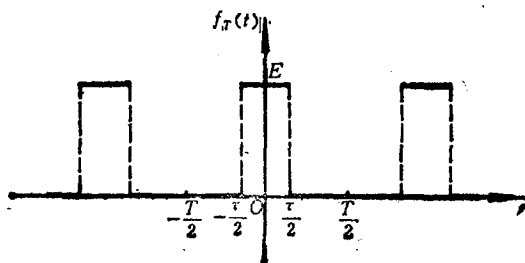


图 1.2

解 由(1.4)式,当 $n \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= -\frac{E}{T} \cdot \frac{1}{jn\omega_0} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{E}{n\omega_0 T} \cdot \frac{1}{j} (e^{\frac{jn\omega_0 \tau}{2}} - e^{-\frac{jn\omega_0 \tau}{2}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2E}{n\omega_0 T} \sin \frac{n\omega_0 \tau}{2} \\
 &= \frac{E}{n\pi} \sin \frac{\tau}{T} n\pi
 \end{aligned}$$

而当 $n = 0$ 时则有

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E dt = E \frac{\tau}{T}$$

于是

$$f_T(t) = \frac{E}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\tau}{T} n\pi}{n} e^{jn\omega_0 t}$$

特别, 当 $\tau = \frac{T}{3}$ 时, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}$, 即脉冲宽度为周期的 $\frac{1}{3}$ 时, 上式变为

$$f_T(t) = \frac{E}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n} e^{jn\omega_0 t} \quad (1.5)$$

一般说来, 采用指数形式的傅氏级数要比采用三角形式(1.1)的傅氏级数更方便一些, 这是因为系数 c_n 的计算公式只有一个, 且 c_n 和 c_{-n} 的模直接反映了 n 次谐波

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

的振幅的大小. 在三角形式中, n 次谐波

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

的振幅为

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

在指数形式中, n 次谐波为

$$c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

* $n=0$ 时这样考虑:

$$c_0 = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{E \sin \frac{\tau}{T} n\pi}{n\pi} = E \frac{\tau}{T}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

所以

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}A_n$$

在下面讨论的频谱分析中，要分析的是各次谐波所占的“比重”有多大，因而差一个 $\frac{1}{2}$ 倍无关紧要。从这个意义上讲，系数 c_n 的模也同样反映了 n 次谐波的振幅的大小。

频谱分析在工程技术中有着重要的应用。例如在无线电技术中，经常要将一些电信号不失真地加以放大。我们知道，一个周期信号含有各次谐波，要使这个信号不失真地放大，就必须使每一个谐波分量按同样的倍数放大。可是一般的放大器总有一个频率范围，在这个频率范围内它的放大倍数不变，超出这个范围放大倍数就要降低，这个频率范围称为放大器的频带。这样看来，好象要使信号不失真地放大是不可能的，然而实际情况并非如此。一个周期信号虽然包含无穷多个谐波分量，但其中有许多谐波分量振幅很小，在放大过程中即使它们发生了畸变，对全局也没有什么大的影响。为此，我们只要保证该信号的主要谐波分量（即振幅较大的那些谐波分量）在放大器的频带范围之内就可以了。为了搞清楚该信号的哪些频率成分振幅大，哪些频率成分振幅小，需要对它作频谱分析。现在我们利用矩形脉冲信号（脉冲宽度 $\tau = \frac{T}{3}$ ）的指数形式的傅氏级数(1.5)式来说明作频谱分析的方法。

由

$$f_{\tau}(t) = \frac{E}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n} e^{jn\omega_0 t}$$

可知,矩形脉冲信号的各次谐波的振幅如下表所示:

n	0	1	2	3	4	5	6 ...
$ c_n $	$\frac{E}{3}$	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}$	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi} \cdot \frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}E}{2\pi} \cdot \frac{1}{5}$	0 ...

这张表称为“振幅频谱”,简称“频谱”。把频谱画在横坐标表示频率、纵坐标表示振幅的坐标平面上就得到频谱图。频谱图的作法如下:

1°在横坐标轴上标出频率 $0, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$;

2°分别在标出的频率上画出高度表示相应谐波分量振幅值的垂直线段(这些垂直线段称为谱线)。例如,在 ω_0 处,谱线的高度为 $\frac{\sqrt{3}E}{2\pi}$,在 $4\omega_0$ 处的高度为 $\frac{\sqrt{3}E}{2\pi} \cdot \frac{1}{4}$ 等等。

脉冲宽度 $\tau = \frac{T}{3}$ 的矩形脉冲信号的频谱图如图 1.3 所示。从作出的频谱图中可清楚地看出哪些频率成分振幅大,哪些振幅小。

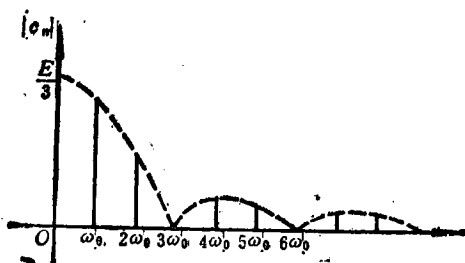


图 1.3

在上面的频谱图中还可看到,频率 $3\omega_0, 6\omega_0, \dots$ 所对应的 $|c_n| = 0$, 这些点称为谱线的零值点,其中

$$3\omega_0 = 3 \frac{2\pi}{T} = 2\pi / \frac{T}{3} = \frac{2\pi}{\tau}$$

叫做第一个零值点。在第一个零值点后，振幅相对减小以至可以忽略。因此，在无线电技术中，通常把谱线的第一个零值点以内的频率范围称为信号的频带宽度，简称频带。于是，矩形脉冲的频带为 $\frac{2\pi}{\tau}$ 。

由图 1.3 可明显看出，矩形脉冲的谱线是一条一条分开的，其间距为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

因此它的频谱是离散的。

§ 1.2 傅氏积分与傅氏变换

对于周期信号(周期函数)，可运用傅氏级数把它分解为不同频率的正弦波的迭加，但我们所遇到的信号并非都是周期性的。对于非周期信号(非周期函数)，能否也把它分解为不同频率的正弦波的迭加呢？下面我们就来讨论非周期函数的展开问题。任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 在 $T \rightarrow +\infty$ 时转化而来的。为了说明这一点，我们作周期为 T 的周期函数 $f_T(t)$ ，使其在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 之内等于 $f(t)$ ，而在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 之外按周期 T 延拓出去，详见图 1.4。很明显， T 越大， $f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围也越大。这表明，当 $T \rightarrow +\infty$ 时，周期函数 $f_T(t)$ 便可转化为 $f(t)$ ，即

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = f(t)$$

因为 $f_T(t)$ 是周期函数，故其指数形式的傅氏级数为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.6)$$

式中

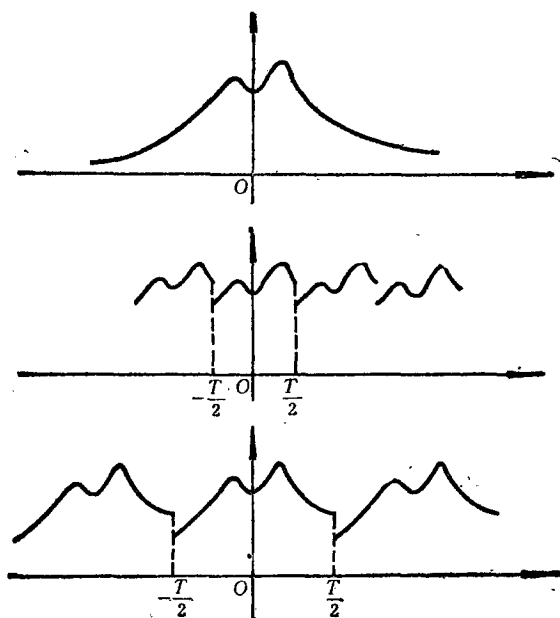


图 1.4

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$|c_n|$ 表示频率为 $n\omega_0$ 的分量的振幅。当 T 变大时, ω_0 (基频) 变小, 而频谱则变密。为了考察 $T \rightarrow +\infty$ 时的极限情况, 我们在所用的符号上作些变化。因为在 $T \rightarrow +\infty$ 时, $\omega_0 \rightarrow 0$, 即 ω_0 为无穷小量, 故可将它记作 $\Delta\omega$ 。于此同时, 我们将 $n\omega_0 = n\Delta\omega$ 记作 $\omega(n)$ 。从而有

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-j\omega(n)t} dt
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

由(1.7)式可得

$$Tc_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-j\omega(n)t} dt \tag{1.8}$$

故 Tc_n 是 $\omega(n)$ 的函数, 记作

$$Tc_n = F(\omega(n)) \tag{1.9}$$

根据(1.6)式和(1.9)式, 有

$$\begin{aligned}
 f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega(n))}{T} e^{j\omega(n)t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{F(\omega(n))}{2\pi} \Delta\omega \right] e^{j\omega(n)t}
 \end{aligned}$$

当 $T \rightarrow +\infty$ 时, $\Delta\omega \rightarrow 0$, $f_T(t) \rightarrow f(t)$, 于是有

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega(n)) e^{j\omega(n)t} \Delta\omega$$

对照积分的定义, 上式可写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

由于当 $T \rightarrow +\infty$ 时, $\Delta\omega \rightarrow 0$. 这时 $f_T(t)$ 的谱线已不再是一条一条离散地分布在点 $\omega(0)=0, \omega(1)=\Delta\omega, \dots, \omega(n)=n\Delta\omega, \dots$ 上, 因此, 在 $T \rightarrow +\infty$ 时的情况下, 应当用连续变量 ω 来代替 $\omega(n)$. 于是利用(1.8)式和(1.9)式可得

$$F(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} F(\omega(n)) = \lim_{T \rightarrow +\infty} Tc_n$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-j\omega(n)'} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt
 \end{aligned}$$

通过上述分析,我们得到了非周期信号的分解公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.10)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.11)$$

在非周期信号 $f(t)$ 中,任何频率 ω 的分量的振幅都正比于 $|F(\omega)|$,因此我们把 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱,简称频谱.如果把 $|F(\omega)|$ 的图象作出来,那末从图上就可直观地看出各频率成分振幅的大小,因而,我们也称它为频谱图.

公式(1.10)和(1.11)可合并成 $f(t)$ 的积分展开式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (1.12)$$

这个公式称为函数 $f(t)$ 的傅氏积分公式。(1.11)式叫做 $f(t)$ 的傅氏变换式,记作

$$F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$$

$F(\omega)$ 叫做 $f(t)$ 的象函数。(1.10)式叫做 $F(\omega)$ 的傅氏逆变换式,记作

$$f(t) = \mathbf{F}^{-1}[F(\omega)]$$

$f(t)$ 叫做 $F(\omega)$ 的象原函数。

(1.11)式右端的积分运算,叫做取 $f(t)$ 的傅氏变换.同样,(1.10)式右端的积分运算,叫做取 $F(\omega)$ 的傅氏逆变换.象函数 $F(\omega)$ 与象原函数 $f(t)$ 正好构成了一个傅氏变换对,即它们是一一对应的。

上面只是从形式上推演了非周期函数 $f(t)$ 的傅氏积分展开