福建教育学院学术著作出版资金资助

Matlab
在物理实验中的应用

陈奋策 著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

福建教育学院学术著作出版资金资助

Matlab 在物理实验中的应用

陈奋策　著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

Matlab 在物理实验中的应用/陈奋策著. —厦门:厦门大学出版社,2009.4
ISBN 978-7-5615-3266-9

Ⅰ.M… Ⅱ.陈… Ⅲ.计算机辅助计算-软件包,Matlab-应用-物理学-实验 Ⅳ.O4-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 046722 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门市明亮彩印有限公司印刷
2009 年 4 月第 1 版 2009 年 4 月第 1 次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:9 字数:225 千字
定价:20.00 元
本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

前 言

物理实验中对数据处理的计算复杂且要求高，往往教师望而却步、学生望而生畏。目前，在有的教学仪器中，干脆把数据处理的计算过程编写成“软件”，直接由计算机完成。如DIS实验直接显示实验结果；又如现在的密立根油滴实验仪器附带有计算软件，只需输入一组组测量数据，计算机马上输出电子电量的计算结果；再如夫兰克一赫兹实验仪器无需测点，示波器就直接显示 V-I 曲线；使得物理数据处理很“简单”，学员没能体会到数据处理的计算过程。另外，现有基础课程强调了计算机在办公和课件制作方面的使用，而忽视了计算机在科研上的应用。当今计算机数学语言（如 Matlab，Mathematica，Muple）具有编写简单、易懂、易学，能快速地进行复杂运算等优点。在各个科学领域，如计算机模拟、数据符号处理、数值分析和实时控制等方面正获得广泛深入的应用。

有必要使学员体验计算机数学语言（如 Matlab）在科研上的应用；有必要使学生体验物理实验的全过程，使他们在学习物理实验的同时，学习计算机数学语言（如 Matlab）在物理实验中进行模拟和数据处理的应用。因此，我们在物理实验教学中，指导学生利用计算机数学语言 Matlab 进行数据处理和拟合，并要求递交电子实验报告；设计了两个新的计算机模拟实验：阿尔芬波中电子的非线性行为和强激光脉冲对低密度等离子体通道中电子的共振加速，以使学生初步体会利用计算机进行科研实验的过程。

这里所选的五个物理实验虽然都是普通常见的，但我们以实验报告的形式在数据处理上首次进行了一些深入的探讨：如光速测量中易被忽略的示波器引起的重要的误差，附带测透明介质的折射率；夫兰克一赫兹实验中 V-I 伏安曲线的绘制，最小二乘法求氩原子的第一激发电位并和逐差法进行比较；普朗克常数的测定中伏安曲线上抬头点的确定，最小二乘法的应用求斜率普朗克常数；密立根油滴实验中提出应用最小二乘法拟合求斜率（电子电量），用 Matlab 计算机语言代替“软件”，把软件处理数据“曝光”，使读者掌握用 Matlab 计算机语言快捷计算。

在“Matlab 应用简介”中，以例题形式简单介绍 Matlab 的应用，读者可对照学习和使用。在“软件应用”中，提供了 Matlab 输入公式软件和 Matlab 计算机语言软件，以方便读者上机操作。

近年来，计算机、多媒体、DIS 实验、仿真实验等扩展了中学物理实验的内涵和教育功能；中学生利用 Matlab 建模将逐渐普及。作为合格的中学物理教师必

须尽快跟上时代的潮流，本课程的学习对他们会有所帮助。

本书可作为中小学教师学历提高中物理实验课程和在职培训物理实验的教学的用书，还可供科研工作者参考。本书最好能结合其他参考书一块使用。

希望我们的尝试能起抛砖引玉的作用，敬请专家与读者指正。

本书得到福建教育学院学术著作出版资金资助。

本书的部分内容采用了其他学者、专家的成果，在此表示感谢。

本书的完稿还得力于福建教育学院2004级物理函授本科班学员商旻、周次备、陈文彬和邵国栋的参与，在此一并表示感谢。

陈奋策

2008 年 9 月

目 录

第 1 章　Matlab 在物理实验中的应用的教学指导

一、目的和要求

物理实验是高等师范院校物理专业的必修课程。通过本课程的学习，使学员掌握一些较先进、较具综合性和基本的实验方法及技能，配合理论课程的学习加深对有关的物理概念和规律的理解，扩大知识面，初步培养独立进行科学实验工作的能力，以适应现代化和新课改的需要。具体要求是：

(1)初步掌握物理某些主要领域的一些实验方法和技能。包括正确地使用比较精密、比较复杂的实验仪器；综合运用力、热、电、光及无线电电子学实验方法；掌握精度较高的测量技能等。

(2)通过做一些综合性和专业性的实验，学习观察、研究有关的物理过程，提高用实验方法研究物理规律的能力和加深对物理现象及其规律的理解。

(3)逐步提高学员从事科学实验工作的能力，包括(上互联网)阅读和下载参考资料、拟订实验步骤、选用基本仪器、准确进行测量、分析实验结果(实验误差和数据处理)等方面的能力。使他们能得心应手地从事物理实验教学。

(4)掌握写电子实验报告，了解、熟悉计算机数学语言 Matlab 在数值模拟实验和数据处理中的应用。

(5)严格要求学员切实养成严肃、认真的科学实验态度和实事求是的工作作风。

二、内容选取和学时分配

1. 内容选取

物理实验的内容很广，涉及的专业知识和技术较多，而目前的条件有限，不可能要求全面开设各部分实验。因此，把重点放在与中学物理教学关系密切的原子物理实验方面并适当照顾其他部分的实验内容。有些实验则以专题讲座、演示以及放映录像教学片等形式进行教学。

2. 学时分配

本课程每个实验课 3 学时。学员集中面授 3～4 天，安排学员做 5～7 个实验。学员在分散的条件下自学本课程的实验内容所要求掌握的基础知识及有关的参考资料。

三、实验内容

1. 误差理论和实验须知

2. 最小二乘法和计算机数学语言 Matlab 在近代物理实验中的应用

数据处理则是利用计算机进行实验数据处理，计算机数值模拟实验，使学生了解计算机在科研上的应用；计算机模拟实验是近几年在计算机多媒体教学中开辟的新领域，是现代化物理实验的重要手段。

3. 核磁共振实验

目的：使用核磁共振仪观察核磁共振吸收信号，测量共振频率和共振时的磁感应强度，计算确定样品核的旋磁比 γ、朗德因子和磁距。

主要仪器：核磁共振实验仪，频率计，示波器，计算机。

4. 夫兰克—赫兹实验

目的：通过用慢电子轰击的方法，测定汞（或氖）原子的第一激发电势，从而证明原子能级的存在。

主要仪器：夫兰克—赫兹实验仪，示波器，计算机。

5. 密立根油滴实验

目的：通过带电油滴在重力场及静电场中运动的测量证明电荷的分立性，并测定电子电荷的数值。

主要仪器、密立根油滴实验仪，电子毫秒表，计算机。

6. 普朗克常量的测定

目的：通过光电效应实验，了解光的量子性，验证爱因斯坦方程，并由此求出普朗克常量。

主要仪器：光电管（带暗盒）、光源、滤色片及微电流测量仪等，计算机。

7. 光速的测量

目的：了解光拍频法测量光的频率和波长，从而确定光速的实验原理，并掌握用光速测定仪测量光速的实验方法。

主要仪器：光速测定仪、示波器、频率计，计算机。

8. 阿尔芬波中电子行为的计算机数值模拟

目的：用计算机数值模拟实验研究非线性行为（以阿尔芬波中电子为对象），借此介绍数

值模拟实验的一般方法和步骤。

主要仪器：计算机。

9. 激光脉冲对低密度等离子体通道中电子的共振加速的计算机数值模拟

目的：用计算机数值模拟实验研究，激光脉冲对低密度等离子体通道中电子的共振加速行为，借此近一步熟悉数值模拟实验的一般方法和步骤。

主要仪器：计算机。

四、教材

"Matlab 在物理实验中的应用"，陈奋策著。

参考书：

[1] 邬鸿彦、朱明刚主编. 近代物理实验. 北京：科学出版社，1998 年 5 月。

[2] 近代物理实验教程. 周孝安等合编. 武汉：武汉大学出版社，1998 年 1 月。

[3] 大学近代物理实验. 吴泳华主编. 北京：中国科学技术大学出版社，1992 年 6 月。

[4] 吴思诚、王祖铨主编. 近代物理实验(第二版). 北京：北京大学出版社，1999 年 7 月。

五、预习

面授前请预习好物理实验须知和"实验内容"中提到的 7 个实验。

第 2 章 物理实验须知

一、物理实验课的目的、内容和任务

物理学是以实验为基础的科学。物理实验是一门涉及知识面较广、综合性和技术性较强的实验课。本书从物理的主要领域选取一些在物理学发展史上起过重要作用的著名实验以及在实验方法和实验上有代表性的实验进行教学。针对学员主要来自中学教学第一线的中学物理教师的具体情况，在这门 27 课时的实验课程中，我们开设了与中学物理关系密切的夫朗克一赫兹实验，普朗克常数测定、密立根油滴实验、核磁共振、光速测定、计算机数值模拟Ⅰ和Ⅱ等 7 个实验。

通过这门课的学习，使学员掌握物理实验的一些基本方法和技能；加深对物理领域的一些概念的理解；实验误差和数据处理也是个重要的训练内容；掌握写电子实验报告，了解、熟悉计算机数学语言 Matlab 在数值模拟实验和数据处理中的应用。使他们毕业后能得心应手地从事物理实验教学。

二、学习方法

(1)物理实验主要靠学员自己动脑思考，动手操作。所以实验前一定要认真阅读有关资料，弄明白实验的目标，物理思想、实验的方法、需要的仪器和其精确度以及关键的实验步骤等。

(2)要有意识地锻炼自己设计实验和选用仪器的能力；遵守实验室规章和实验操作规则。

(3)原始记录是实验中获得物理信息的最重要、最珍贵的资料。严肃认真地记录一切现象和数据，不要凑数据。要善于自己判断数据是否合理，勇于提出你自己的看法。简明、有条理地表达数据是实验能力的重要方面。

三、实验课的进行程序

1. 时间安排和编组

按照课程表安排的时间、地点，以实验教师指定或同意的实验组进行分组预习和实验。进入和离开实验要登记，具体事宜由实验组组长负责与老师和实验室工作人员联系。

2. 实验预习

没完成预习报告之前，不得动手开始实验，这是实验课的纪律。

实验预习报告包括实验的目标、物理思想、所用公式、实验方案和步骤，需要测量的物理量和记录数据的表格等。

3. 实验报告

可以在预习报告的基础上补充、完善，包括整理后的数据和图表、运算及数据处理过程、误差分析、结果表达、分析和讨论等、实验报告是实验结果的重要表达形式，也是我们考察学生成绩的重要部分。

四、实验室安全知识

安全操作是到实验室的全体人员应予以足够重视的问题，简述几点：

(1)电气方面：高压电源危险，要小心。

(2)防辐射：γ 射线、X 射线对人体有伤害；电弧、激光不能直接照射眼睛。

(3)机械：机器在转动的机械，小心被卷入。

(4)仪器：损坏的原因是违反操作规程，要预习和小心谨慎。

对不作预习，违反操作规程、严重损坏实验设备的情况均要作处理，直至取消实验资格。

五、测量误差和数据处理补充知识

本节只简要介绍实验中常用的实验误差和数据处理知识，具体详细的内容请见有关书籍。

1. 测量与测量误差

测量值 N 和被测量物理量所具有的客观真实的数值(真值) N' 之差称为测量误差 ΔN，$\Delta N=N-N'$；真值 N' 不能测到，一般用平均值 $\overline{N}$ 代替：

$$\Delta N = N - N' = N - \overline{N}$$

在作误差分析时，要估计的误差通常只有系统误差和偶然(随机)误差。系统误差可分为仪器误差、理论(或方法)误差、环境误差和个人误差等，在测量条件不变时有确定的大小和方向，增加测量次数并不能减少；可采取措施发现并对测量结果加以修正。偶然误差在相同测量条件下，误差的绝对值和符号不断变化，不能找出原因排除，而只能估计。偶然误差是由于人的感官灵敏程度和仪器精密程度有限、周围环境的干扰以及随测量而产生的随机因素决定的。

测量结果中的偶然误差大小的程度称为精密度，测量结果中的系统误差大小的程度称为准确度，而精确度是测量结果中的系统误差和偶然误差的综合。只有在精密度和准确度

都高时，精确度才高。

测量可分为直接测量和间接测量。所谓直接测量是指只测量一个物理量，即得到结果。间接测量则是指把直接测量的量代入公式计算，得到的结果。按测量次数又可分为单次测量和多次测量。多次测量还可按测量条件分为等精度测量和不等精度测量，绝大多数实验都采取等精度测量。我们只限于等精度测量，而且主要讨论偶然误差。

2. 直接测量结果及其偶然误差的估计

偶然误差是无法避免和消除的，但可以根据误差理论估计其可能出现的大小，并可通过增加测量次数减少偶然误差。

直接测量时的偶然误差处理方法：

(1)算术平均值代表测量结果(近真值)

以多次(K 次)等精度测量的算术平均值作为测量结果，即真值：

$$N' = \overline{N} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{K} = \frac{1}{K}(N_1 + N_2 + \cdots + N_K) \tag{2-1}$$

其中 N_i 时第 i 次测量值。

例 1 对某一长度测量 10 次，结果如下：

N_i=63.57，63.58，63.55，63.56，63.56，63.59，63.55，63.54，63.57，63.57(cm)，

求测量结果。

解

$$\overline{N} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} N_i$$

$$= \frac{63.57 + 63.58 + 63.55 + 63.56 + 63.56 + 63.59 + 63.55 + 63.54 + 63.57 + 63.57}{10}$$

$$= 63.564(\text{cm})$$

(2)多次直接测量结果偶然误差的估计

通常用标准偏差来表示偶然误差，有限次(K 次)测量中的某一次测量结果的标准偏差(不确定度)用 σ_N 表示：

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{K-1}} \tag{2-2}$$

K 测量结果的平均值 $\overline{N}$ 的标准偏差为 $\sigma_{\overline{N}}$

$$\sigma_{\overline{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{K}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{K(K-1)}} \tag{2-3}$$

(2-3)式表示多次测量减少了偶然误差。

实际上，有时测量不能重复，有时不需或不能精确测量，我们便采取一次测量并估计误差 σ_N，估计误差要根据仪器的分度值大小，测量的环境条件等具体考虑，要尽量符合实际情况。

(3)极限误差

(2-2)式的标准偏差 σ_N 所表示测量列的随机(偶然)误差概率呈正态分布特性。按概率理论，在测量次数不是很少下，可算得偶然误差出现在$[-\sigma_N,\sigma_N]$的概率(置信度)为68.3%。定义直接测量时极限误差(不确定度)$e=3\sigma_N$，任一偶然误差出现在$[-3\sigma_N,3\sigma_N]$的概率(置信度)为 99.7%。σ_N 和 $3\sigma_N$ 只表示统计上的意义。

(4)仪器误差的估计

仪器误差是指在仪器规定的使用提提条件下，正确使用仪器时，仪器的指示数与被测量的真值之间可能产生的最大误差，用 $\Delta_{仪}$ 表示。通常它既包含系统误差，又含随机误差。一般用仪器最小刻度值的一半作为 $\Delta_{仪}$，或根据仪器精度级别和量程进行计算

$$\Delta_{仪}=量程\times级别\%$$

仪器误差在$[-\Delta_{仪},\Delta_{仪}]$内的概率通常均匀分布，仪器的标准误差为

$$\sigma_{仪}=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}} \tag{2-4}$$

例如，某米尺的最小分度为 1 mm，其仪器误差 $\Delta_{仪}=0.5\text{ mm}$，其仪器的标准误差为 $\sigma_{仪}=0.3\text{ mm}$；量程为 100 mA 的 1.0 级电流表，其仪器误差 $\Delta_{仪}=100\text{ mA}\times1\%=1.0\text{ mA}$，仪器的标准误差 $\sigma_{仪}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.6\text{ mA}$。

实际上，有时测量不能重复，有时不需或不能精确测量，我们便采取一次测量并估计误差。

3. 测量结果的表示

(1)测量结果表示

参考把测量结果表为 $N=\overline{N}+\Delta N$，以标准误差 σ 代替 ΔN，即

$$N=\overline{N}\pm\sigma \tag{2-5}$$

其中 $\overline{N}$ 可以是在相同实验条件下多次直接测量的由(2-1)式计算的平均值(最佳值)，也可以是单次直接测量值(估计误差要根据仪器的分度值大小，测量的环境条件等具体考虑，要尽量符合实际情况)，还可以是经过公式计算得到的间接测量值。σ 称为绝对误差，仅考虑偶然误差，多次直接测量时对应(2-3)式标准误差 σ_N；单次直接测量时取 $\sigma_{仪}=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}$，间接测量时 σ 取(2-8)或(2-11)式。

如考虑到系统误差，且最后测量结果为直接测量某一物理量情况：多次重复时，可比较 σ_N(2-2)式和 $\sigma_{仪}$(2-4)式，取大者作为测量结果的标准误差 σ；单次直接测量时取 $\Delta_{仪}$ 或仪器最小刻度的一半作为误差：$N=N_{测}\pm\Delta_{仪}$，或 $N=N_{测}\pm\frac{仪器最小刻度}{2}$。最后测量结果为间

接测量某一物理量时,σ 计算见 4(2) 部分。

(2) 相对误差

用 $\delta_{\overline{N}}=\dfrac{\Delta N}{\overline{N}}$ 或 $\dfrac{\sigma}{\overline{N}}$ 表示相对误差,常常表示百分之几、千分之几等形式。相对误差与绝对误差 σ 之间的关系是:

$$\sigma=\overline{N}\cdot\delta_{\overline{N}}$$

对于两个测量结果,绝对误差大的,其相对误差不一定大;相对误差大的,其绝对误差不一定大。

如果被测量值有公认值或理论值,还可将最佳值与之比较,用相对误差 δ 表示

$$\delta=\frac{|\text{最佳值}-\text{理论值}|}{\text{理论值}}\times 100\%$$

例 2 根据例 1 的数据,和米尺的 $\Delta_{\text{仪}}=0.05$ cm,计算 σ、$\sigma_{\overline{N}}$、测量值和相对误差。

解 $$\sigma_N=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(N_i-\overline{N})^2}{9}}=\sqrt{\frac{2\,040\times10^{-6}}{9}}=0.015\,06\approx0.02\text{ cm}$$

$$\sigma_{\overline{N}}=\frac{\sigma_N}{\sqrt{10}}=0.004\,76\approx0.005\text{ cm}$$

(1) 只考虑偶然误差,测量值

$$N=\overline{N}\pm\sigma=\overline{N}\pm\sigma_{\overline{N}}=63.564\pm0.005\text{ cm}$$

相对误差

$$\delta_{\overline{N}}=\frac{\sigma_{\overline{N}}}{\overline{N}}=\frac{0.005}{63.56}\approx7.9\times10^{-5}$$

(2) 考虑到系统误差

$$\sigma_{\text{仪}}=\frac{\Delta\text{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.05}{\sqrt{3}}=0.03>\sigma_N=0.02,$$

取 $\sigma=\sigma_{\text{仪}}$,测量值

$$N=\overline{N}\pm\sigma=(63.56\pm0.03)\text{ cm}$$

相对误差

$$\delta_{\overline{N}}=\frac{\sigma}{\overline{N}}=\frac{0.03}{63.56}\approx4.7\times10^{-4}$$

注意,绝对误差一般只取一位,相对误差一般只取两位数字。

4. 间接测量结果误差的计算,误差的传递和合成

(1) 只考虑偶然误差情况

设：$$N = f(x, y, z, \cdots) \tag{2-6}$$

其中 x、y、z 为独立的变量。对(2-6)式求全微分

$$\mathrm{d}N = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \cdots, \tag{2-7}$$

令 $\mathrm{d}N \to \sigma_N$，$\mathrm{d}x \to \sigma_x$，$\mathrm{d}y \to \sigma_y$，$\mathrm{d}z \to \sigma_z$ 有关文献已证明

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2} \tag{2-8}$$

(2-8)式对和的函数好用，如 $N = x + y + z + \omega$，

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_\omega^2} \tag{2-9}$$

如果 f 是积的函数，这时先对(6)式取对数 $\ln N = \ln f(x, y, z, \cdots)$，后求全微分

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{\partial \ln f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \ln f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \ln f}{\partial z}\mathrm{d}z + \cdots, \tag{2-10}$$

同样，令 $\mathrm{d}N \to \sigma_N$，$\mathrm{d}x \to \sigma_x$，$\mathrm{d}y \to \sigma_y$，$\mathrm{d}z \to \sigma_z$，有关文献已证明

$$\frac{\sigma}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2} \tag{2-11}$$

(2-11)式适合于积的函数，如已知

$$N = c\frac{x^k y^m}{z^n}，\text{其中 } c,k,m \text{ 和 } n \text{ 是常数} \tag{2-12}$$

由(2-11)式有：

$$\frac{\sigma}{N} = \sqrt{k^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + m^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + n^2\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2} \tag{2-13}$$

具体计算见例 3 和例 4。

(2) 需考虑系统误差情况

如果系统误差是主要的，而其符号又不确定，或不必区分系统误差和偶然误差，或假定偶然误差在极限情况下合成，我们取误差的算术合成，常用在误差分析、实验设计或作粗糙的误差计算中。系统误差为主要误差来源时，且正负号未知时，考虑用算术合成方式。

用全微分求间接测量值函数式的不确定度的传递

$$\sigma = \left|\frac{\partial N}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial N}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial N}{\partial z}\right|\Delta z + \cdots$$

在函数式取和差时方便。如对于和的函数，$N = x \pm y \pm z \pm \omega$，

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + \sigma_\omega \tag{2-14}$$

用对数微分法求间接测量值函数式的不确定度的传递

$$\frac{\sigma}{N}=\left|\frac{\partial \ln N}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial \ln N}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial \ln N}{\partial z}\right|\Delta z+\cdots$$

对于积的函数时方便。如 $N=c\dfrac{x^k y^m}{z^n}$，其中 c,k,m 和 n 是常数，

$$\frac{\sigma}{N}=k\frac{\sigma_x}{x}+m\frac{\sigma_y}{y}+n\frac{\sigma_z}{z} \tag{2-15}$$

即加减法用绝对误差相加，乘除法用绝对误差相加，公式中每项都取正值。

5. 测量结果的有效数字及数据处理

(1) 绝对误差决定有效数字

我们把测量结果中可靠的几位数字加上可疑的一个数字统称为测量结果的有效数字。例如：2.74 的有效数字是三位，8×10^2 的有效数字是一位，0.030 0 有效数字是三位，0.03 有效数字是一位。

在一般情况下，绝对误差的有效数字只取一位，由绝对误差决定测量值的有效数字，测量值的最后一位要与绝对误差的最后一位取齐。这是处理一切有效数字问题的依据。如 $L=(1.00\pm0.02)\text{cm}$。不应出现 $L=(1.004\pm0.02)\text{cm}$，应改为 $L=(1.00\pm0.02)\text{cm}$。

(2) 有效数字的计算规则

① 加减法

设 $\qquad N=A+B+C$

先计算其绝对误差，在误差运算过程中取两位，结果取一位。计算 N 时，各分量位数取到比误差所在位数小一位，结果多留一位；最后，用绝对误差决定最后结果的有效数字。

例 3 求 $N=A+B-C+D$。已知 $A=(71.3\pm0.5)\text{cm}^2$，$B=(6.262\pm0.002)\text{cm}^2$，$C=(0.753\pm0.001)\text{cm}^2$，$D=(271\pm1)\text{cm}^2$。

解 利用(2-9)式

$$\sigma=\sqrt{\sigma_A^2+\sigma_B^2+\sigma_C^2+\sigma_D^2}\approx\sqrt{\sigma_A^2+\sigma_D^2}$$

$$=\sqrt{(0.5)^2+1^2}\approx\sqrt{1.3}\approx1。$$

$$\overline{N}=A+B-C+D=71.3+6.3-0.8+271=347.8$$

$$N=\overline{N}\pm\sigma=(348\pm1)\text{cm}^2$$

② 乘除法

设 $\qquad n=A\cdot B\cdot C$。

找出测量结果中有效数字最少的分量，将其他各量(包括常数)取到有效数字比上述分量多一位，算出 N，结果亦比有效数字最少的分量先多保留一位。误差在运算过程中取两位，最后结果取一位，由绝对误差决定有效数字。

例 4 已知 $\nu=(21.27\pm0.01)Hz$，$B_0=(497\pm2)\times10^1$ 高斯，求：

(a) $\gamma=\dfrac{2\pi\nu}{B_0}$；

(b) $g_N = \dfrac{h\gamma}{2\pi\mu_N}$，　($\mu_N = 5.050\ 824 \times 10^{-27}$ J/T，$h = 6.625\ 591\ 6 \times 10^{-34}$ 焦耳秒)；

(c) $(\mu_z)_{\max} = \dfrac{Ih}{2\pi}\gamma$，($I = 1/2$)。

解　(a) 物理量单位要统一，如都化为国际单位，1 高斯 $= 10^{-4}$ 特斯拉(T)。B_0 的有效数字最少(3 位)，以它为准，其他量有效数字取 4 位。

$$\gamma = 2\pi\frac{\nu}{B_0} = 2 \times 3.142 \times \frac{21.27 \times 10^6}{497 \times 10^{-3}} = 268.9 \times 10^6 (\mathrm{HZ/T})$$

令公式(2-13)中 $x \to \nu$，$k = 1$，$y \to B_0$，$m \to 1$，$n \to 0$，$\overline{N} \to \gamma$，

$$\delta_\gamma = \frac{\sigma_\gamma}{\gamma} = \sqrt{(\frac{\sigma_\nu}{\nu})^2 + (\frac{\sigma_{B_0}}{B_0})^2}$$
$$= \sqrt{(\frac{0.07}{21.47})^2 + (\frac{2}{497})^2} \approx 4.037 \times 10^{-3}.$$

绝对误差

$$\sigma_\gamma = \gamma\delta_\gamma = 268.9 \times 10^6 \times 4.037 \times 10^{-3} = 1\ 086 \times 10^3 \approx 1 \times 10^6.$$
$$\therefore \gamma = (269 \pm 1) \times 10^6 (\mathrm{HZ/T}).$$

$$(\mathrm{b})\ g_N = \frac{h\gamma}{2\pi\mu_N} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 268.9 \times 10^6}{2 \times 3.142 \times 5.051 \times 10^{-27}} = 5.613$$

$$\sigma_{gN} = \frac{h}{2\pi\mu_n}\sigma_\gamma = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 5.05 \times 10^{-27}} \times 1.1 \times 10^6$$
$$= 0.23 \times 10^{-1} \approx 0.02$$

$$(\mathrm{c})\ (\mu_z)_{\max} = \frac{Ih}{2\pi}\sigma_\gamma = \frac{1}{2} \times \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14} \times 268.9 \times 10^6$$
$$= 141.8 \times 10^{-28} = 1.418 \times 10^{-26} (\mathrm{J/T})$$

$$\sigma_{\mu z\max} = \frac{Ih}{2\pi}\sigma_\gamma = \frac{1}{2} \times \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14} \times 1.1 \times 10^6$$
$$= 0.581 \times 10^{-28} = 0.006 \times 10^{-26}$$
$$\therefore \sigma_{\mu z\max} = (1.148 \pm 0.006) \times 10^{-26} (\mathrm{J/T})$$

$\delta_\gamma = \dfrac{\sigma_\gamma}{\gamma} = \sqrt{(\dfrac{\sigma_\nu}{\nu})^2 + (\dfrac{\sigma_{B_0}}{B_0})^2}$，因为$(\dfrac{0.01}{21.47} = (\dfrac{\sigma_\nu}{\nu})^2 \approx (\dfrac{\sigma_{B_0}}{B_0})^2 = (\dfrac{2}{497})^2$，误差主要来自于 B_0 的测量误差。实验应尽可能把样本置于均匀 B 中，尽可能测量准确。

例 5　求 $D = \dfrac{g}{4\pi^2}r_0T^2$，已知 $r_0 = (8.44 \pm 0.03)$cm，$T = (1.1373 \pm 0.000\ 2)$s，$g = 980.12\mathrm{cm/s^2}$.

解　r_0 的有效数字最少(三位)，以它为准。

$$D = \frac{980.1 \times 8.44 \times 1.137\ 3^2}{4 \times 3.142^2} = 270.8$$