吉首大学十一·五规划系列教材

数学分析选讲

曾繁富 主编

青海人民出版社

吉首大学十一·五规划系列教材

数学分析选讲

主　编　曾繁富

副主编　庹　清　方东辉　李爱华
　　　　贺乐平　姚元金　欧祖军
　　　　李先明

青海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/曾繁富主编.—西宁:青海人民出版社,2008.8

ISBN 978-7-225-03223-8

Ⅰ.数… Ⅱ.曾… Ⅲ.数学分析—高等学校—教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第133563号

数 学 分 析 选 讲

曾繁富 主编

出　版 发　行:青海人民出版社(西宁市同仁路10号)
邮政编码 810001　总编室(0971)6143426
发行部:(0971)6143516　6123221

印　刷:湖南吉首大学彩印厂

经　销:新华书店

开　本:850mm×1168mm　1/32

印　张:9.5

字　数:150千

版　次:2008年8月第1版

印　次:2008年8月第1次印刷

印　数:1-1000册

书　号:ISBN 978-7-225-03223-8

定　价:28.00元

序

数学分析是数学专业重要的基础课之一，因为它不仅是数学专业新生首先面临的一门重要基础课程，而且本科阶段很多的后继课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用，至于它的基本概念、思想方法，更可以说是无处不在。正因为如此，数学类研究生入学考试，数学分析是必考科目之一。由于数学分析课程的概念、定理、公式繁多，内容庞大，解题方法灵活多样，参加研究生入学考试的学生和担任考研指导的教师需要一本体系科学、内容精炼、题例典型、充分展现课程特点、思想方法的复习指导书。基于这一目的，几位编委根据研究生入学考试的要求，结合多年来教授数学分析课程和担任考研指导的经验，编写了这本考研复习指导书。

由于研究生入学考试没有统一的考试大纲，各招生单位的考试要求不尽相同，如何取舍和组织材料，以满足不同学生的考试要求是编写指导书必须考虑的问题。其次，既然是指导书，就有别于教材，如何处理纲与目的关系，以达到纲举目张的效果是编写必须考虑的又一问题，令人欣慰的是，读了本书之后，我感到这些问题得到成功的处理。

首先，任何一门学问，就其本质来说，关键的内容、核心的概念，往往不过那么几条，而发挥开来，就成了洋洋大观的巨著，理解了这些核心和关键，并通过严格的训练将其真正学到手，就掌握了这门课的精髓，就能得心应手的加以应用和发挥，也就达到了学习这门课程的目的。而《数学分析选讲》更应该是指导学生理解核心，掌握精髓的指导用书。

其次，《数学分析选讲》不应该是数学分析课程的简单压缩，而应该有它独立的思维体系，内容主线和对问题独特的解读方式，指导书以极限思想作为全书的主线是可取的。众所周知，数学分析中的极限、连续、微分、积分、级数等都是用极限定义的，理

解上极限的定义、思想、内涵和引伸及应用，则对数学分析的核心、精髓就有了一定的把握。

第三，作为一本考研指导书，内容的组织，例题的精选，解题方法的分析总结，学生举一反三能力的培养、考研目标的实现才是最重要的。纳观指导书内容的构成，一元函数的细致分析、讲解、总结、分类是重点；极限思想是全书的主线，例题的选取有代表性；解题思路分析清楚，方法归纳总结到位，学生能由此举一反三。

第四，学习的目的在于应用。数学分析的概念、定理、公式虽然较多但最基本的并不多，如能把握其间的来龙去脉并得心应手地加以应用，则可大大提高分析和解决问题的能力，更不要说是研究生入学考试，要做到这一点，关键在于要使学生接受严格解题的训练，指导书在量和质两个方面认真兼顾到习题的配置，使课堂教学与课后训练有机结合，以满足不同学生的考试要求。

我高兴地看到，正是在以上四个方面，这本教材的几位编者作了有益的尝试和认真的实践。对近年考研中数学分析题型、出题动向把握清楚，研究深入，尽管有些地方还略嫌粗糙，一些内容还有 加工和改进的余地，但总的来说，这是本颇具特色的数学类学生考研用的指导教材，它的出版是一件令人高兴的事。特为之序。

黎奇升
2008 年 7 月于吉首

编者的话

数学分析是高等院校理工科学生的一门非常重要的基础课，是报考理工科研究生的一门必考科目，内容十分丰富，且不易掌握，为了帮助读者复习这门学科，特编写了这本讲义。

本讲义是根据选修课《数学分析选讲》的讲稿改写而成的，目的是想给学过数学分析的一些读者打下一个坚实的基础，以便进一步学习和研究一些现代数学。另外，给一些有志于报考研究生的读者复习提供一本参考书。从这一目的出发，讲义注意到数学分析内容的繁杂，要想在四十几个学时内对数学分析的内容作一个完整的介绍，且让读者有所裨益，这几乎是不可能的，与其面面俱到，倒不如从某一个侧面将一些问题讲深讲透，让读者有所收获，因此，讲义注意了以下几点：

1. 重点介绍一元微积分的有关内容，对多元微积分只作了一讲来整理，很多内容没有涉及。

2. 注意了内容的系统性，凡在大学低年级已经学过的一些基本内容，讲义只作扼要介绍，但对其中一些概念性较强而容易出错的部分则作了较详细的叙述。

3. 通过大量的例题向读者介绍了有关题型的解题方法和技巧，希望读者能从中得到启示，得到举一反三的效果。

4. 为了提高读者的综合作业能力，每讲后面都附有一定量的练习题，这些练习题和例题一样，多属于一些综合性题，涉及的内容往往不局限于本段本讲，而是前后有关联的，有的有一定难度。

由于时间仓促，水平有限，错误一定很多，请读者多多指正。

编者

2007 年 7 月于吉首大学

目　录

第一讲　实数和极限

极限理论是数学分析的基础,其中数列(序列或叙列)的极限是它的重要组成部分,也是这一讲的主要内容.

1. 实数性质回顾

在历史上,几乎同时有三套引入实数的理论,即:

Dedekind 分割(1872):考虑数集的分割:每一分划代表一实数.

思路:将有理数全体所成之集合分拆为两个非空集合 A,A',满足:1°,任一有理数,必在且仅在 A 及 A' 二集之一中出现;2°,集 A 内任一数 α,必小于集 A' 内任一数 α'. 其中 A 称为分划的下组,A' 称为分划的上组,分划记为 $A|A'$.

例 1　一切有理数,满足不等式 $\alpha<1$ 的集为 A,一切 α',满足 $\alpha'\geqslant 1$ 的都归入 A',$A|A'$ 为一分划,A' 中有最小数 $\alpha'=1$.

例 2　取小于或等于 1 的一切有理数 $\alpha,\alpha\leqslant 1$,归入下组 A,取大于 1 的一切有理数 $\alpha',\alpha'>1$ 归入上组 A',$A|A'$ 为一分划,上组无最小数,下组有最大数 1.

例 3　取使 $\alpha^2<2$ 的一切正有理数 α,数 0 及一切负有理数归入下组 A,使 $\alpha'^2>2$ 的一切正有理数 α' 归入上组 A',$A|A'$ 为一分划,上组无最小数,下组无最大数.

分划有且仅有以上三种类型,在前两种情形,说分划定义了有理数,在第三种情形,说分划定义了一无理数,事实上,对分划 3,$A|A'=\sqrt{2}$

Cantor - Heine 基本列(1872,1869):每一有理数基本数列代表一实数.

Weierstrass 聚点(1860):有界单调有理数列代表一实数.

不管从那套理论出发,都可以证得这三套理论的等价性.

2. 上、下极限

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,是指对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$,当$n > N$时,$|x_n - a| < \varepsilon$恒成立.

(2)极限存在的充分条件:

a) 任何单调有界数列必有极限;

b) $Cauchy$ 收敛准则:$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$,当$n, m > N$时,$|x_n - x_m| < \varepsilon$恒成立.

前者主要用于证明数列极限存在,后者主要用来证明数列极限不存在.

(3)对于任一有界数列$\{a_n\}$,去掉最初k项以后,剩下来的仍是一个有界数列,记

$$\beta_k = \sup_{n>k}\{a_n\} = \sup\{a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\}$$

$$\alpha_k = \inf_{n>k}\{a_n\} = \inf\{a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\}$$

于是得到数列$\{\alpha_k\}$,$\{\beta_k\}$,且显然有$\{\beta_k\}$单调减少,$\{a_k\}$单调增加,且$\{\alpha_k\}$,$\{\beta_k\}$有界,故这两个数列极限存在,记为:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \beta_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{n>k}\{a_n\}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{n>k}\{a_n\}$$

称$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$为数列$\{a_n\}$的上极限,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$为数列$\{a_n\}$的下极限,易证

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \rightleftharpoons \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a$$

由此知,欲证某数列极限存在,可先求上、下极限,若相等,则极限存在,且等于上、下极限之值.

对于数列的上、下极限,有

1)若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a < b \Rightarrow \exists N$,当$n > N$时有$a_n < b$;

2) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a > c \Rightarrow \exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > c$.

这些是显然的事实.

3. 数列极限的几种求法

1) 用数列的构造和性质求数列的极限

例 1 设 $c > 0, x_1 = \sqrt{c}, x_2 = \sqrt{c+\sqrt{c}}, \cdots, x_{n+1} = \sqrt{x_n + c}, \cdots$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解 显然 $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$

$$= \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{n+1\text{个}c}$$

$$> \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{n\text{个}c}$$

$$= x_n$$

故 $\{x_{n+1}\}$ 单调上升, 但

$$x_n < \sqrt{c} + 1 \qquad n = 1, 2, \cdots$$

事实上, 显然 $x_1 < \sqrt{c} + 1$

那么:

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{(\sqrt{c}+1)^2} = \sqrt{c} + 1$$

故 $\{x_n\}$ 为单调有界数列, 从而 $\{x_n\}$ 收敛于某个数 a, 在 $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$ 中令 $n \to \infty$ 得 $a = \sqrt{c + a}$ 或 $a^2 - a - c = 0$.

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

显然应有 $a \geqslant 0$ 故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

这一类型的题的解法是直接比较前后项, 得出数列的单调性, 继而证明其有界, 因此得到数列的极限是存在的, 进而求出极限值.

例 2 设已给二数 a 和 b，令 $x_0=a, x_1=b$

$$x_n=\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2} \quad (n\geqslant 2)$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解 注意到：$x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-1})$

$$=\cdots\cdots=(-\frac{1}{2})^{n-1}(b-a)$$

$$\begin{aligned}x_n&=x_0+\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\\&=a+\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-1}(b-a)\\&=a+(b-a)\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2b+a}{3}$

这一类型的题前后关系不明显，而通过考虑 x_n-x_{n-1} 得出 x_n-x_{n-1} 与 $x_{n-1}-x_{n-2}$ 之间的关系，从而转化为级数考虑之.

例 3 设 $\alpha>0, 0<x_0<\frac{1}{\alpha}$，证明数列

$$x_n=x_{n-1}(2-\alpha x_{n-1}) \quad (n\geqslant 1)$$

收敛，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 考虑函数 $f(t)=t(2-\alpha t)$，因为：

$$f'(t)=2-\alpha t-\alpha t=2(1-\alpha t)$$

当 $t=\frac{1}{\alpha}$ 时，$f'(\frac{1}{\alpha})=0$；当 $0<t<\frac{1}{\alpha}$ 时，

$f'(t)>0$，当 $\frac{1}{\alpha}<t$ 时，$f'(t)<0$，故函数 $f(t)$ 在 $t=\frac{1}{\alpha}$ 时取得最大值

$\frac{1}{\alpha}$,因此,若$0<x_{n-1}<\frac{1}{\alpha}$,则$0<x_n<\frac{1}{\alpha}$,由于已知$0<x_0<\frac{1}{\alpha}$,故由归纳法知,$\{x_n\}$有界,且$0<x_n\leqslant\frac{1}{\alpha}$.

又$x_n-x_{n-1}=x_{n-1}(2-\alpha x_{n-1}-1)=x_{n-1}(1-\alpha x_{n-1})\geqslant 0$
即序列$\{x_n\}$单调有界,从而极限存在

设 $x_n\to A$,得

$$A=A(2-\alpha A) \qquad 即\ A(1-\alpha A)=0$$

从而解得 $A=0,A=\frac{1}{\alpha}$

由于$\{x_n\}$不减,故舍去 $A=0$,从而得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{\alpha}.$$

这一类问题,虽然前后项关系明显,但不易断定其单调性及有界性.但转化为一元二次函数考虑.即可顺利求解.

例4 设数列$\{x_n\}$满足

$$0\leqslant x_{n+m}\leqslant x_n\cdot x_m \quad (n,m=1,2,3,\cdots)$$

证明数列$\{\sqrt[n]{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$收敛.

证 $\because$ $x_{n+1}\leqslant x_n\cdot x_1$,归纳即得$x_n\leqslant x_1^n$对一切$n$成立.因此$0\leqslant\sqrt[n]{x_n}\leqslant x_1$,对一切$n$成立,于是$\{\sqrt[n]{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$有界,命

$$L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}$$

则有 $0\leqslant L\leqslant x_1$,下面只要证$\sqrt[n]{x_n}\geqslant L$对一切$n$成立.

命 $m_1<m_2<m_3<\cdots$为这样一列使

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[m_k]{x_{m_k}}=L$$

的数列,设n为任意正整数,并将有理数$\frac{m_k}{n}$写成q_k+d_k的形式,这里q_k为一整数,而$0\leqslant d_k<1$,注意到

$$\frac{q_k}{m_k}=\frac{1}{n}-\frac{d_k}{m_k}$$

因而当 $k\to\infty$ 时，$\frac{q_k}{m_k}\to\frac{1}{n}$

$$x_{m_k}=x_{n\cdot q_k+n\cdot d_k}\leqslant x_n^{q_k}\cdot x_1^{nd_k}$$

故 $x_{m_k}^{\frac{1}{m_k}}\leqslant x_n^{\frac{q_k}{m_k}}\cdot x_1^{\frac{nd_k}{m_k}}$

令 $k\to\infty$，则得 $L\leqslant\sqrt[n]{x_n}$

故数列 $\{\sqrt[n]{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在.

注意：这里的序列 $\{\sqrt[n]{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 不一定为单调，作为一个例子

命 $x_n=\begin{cases}e^{-n} & 若 n 为偶数\\ e^{-n+1} & 若 n 为奇数\end{cases}$

这个序列 $\{\sqrt[n]{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个振荡的序列，收敛于 e^{-1}.

类似地，设 $\{x_n\}$ 满足

$$0\leqslant x_{n+m}\leqslant x_n+x_m\quad(n,m=1,2,\cdots)$$

可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ 存在.

例 5 设 $\alpha\geqslant0$，问 $\sqrt[n]{[\alpha[\alpha[\cdots[\alpha]\cdots]]]}$ 的极限是否存在？这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分，根号下共 n 个 α.

解 $i)$ 当 $0\leqslant\alpha<1$ 及 $1\leqslant\alpha<2$ 时，数列收敛于 0 及 1.

$ii)$ 当 $\alpha\geqslant2$ 时，令

$$b_n=\underbrace{[\alpha[\alpha[\cdots[\alpha]\cdots]]]}_{n 个 \alpha}$$

则 $b_{n+1}=[\alpha b_n]\geqslant[2b_n]=2b_n>b_n$

故 $n\to\infty$ 时，$b_n\to\infty$，又

$$\alpha b_n-1\leqslant[\alpha b_n]\leqslant\alpha b_n$$

$$\therefore\qquad \alpha-\frac{1}{b_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}\leqslant\alpha$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\alpha$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{[\alpha[\alpha[\cdots[\alpha]\cdots]]]}=\alpha$

这里用到了:若$x_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$存在,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

这在一般数学分析的书中都可以找到其证明方法.

例6 设x,y为正无理数,且$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$,作数列

$A:[x],[2x],[3x],\cdots,[nx],\cdots$

$B:[y],[2y],[3y],\cdots,[ny],\cdots$

试证任一正整数k属于且仅属于A,B中的一个.

经分析,要证明 $(i)A\cup B=N^+$;$(ii)A\cap B=\phi$.

证 $\because$ $x,y>0$,而$\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}$均小于1,故$x,y$均大于1.于是$x$的任何两个不同倍数不可能有相同的整数部分,同样$y$的任何两个不同倍数也不可能有相同的整数部分,即$A,B$中的元素都是互异的,因此,任何整数在这两个序列中无论哪一个里不可能出现1次以上.

先证 $A\cap B=\phi$,

假设某自然数k出现在两个序列中,于是可找正整数p,q,使

$$k<px<k+1,k<qy<k+1$$

于是有 $\dfrac{p}{k+1}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{p}{k},\dfrac{q}{k+1}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{q}{k}$

相加得
$$\frac{p+q}{k+1}<1<\frac{p+q}{k}$$

或
$$k<p+q<k+1$$

这不可能,从而$A\cap B=\phi$.

再证 $A\cup B=N^+$

因为 $A\cup B\subset N^+$ 已成立,若有一 $m\notin A\cup B$,则可以找正整数 r,s,使得

$$rx<m,(r+1)x>m+1,$$
$$sy<m,(s+1)y>m+1$$

于是

$$\frac{r}{m}<\frac{1}{x}<\frac{r+1}{m+1},\frac{s}{m}<\frac{1}{y}<\frac{s+1}{m+1}$$

两不等式对应相加得

$$\frac{r+s}{m}<1<\frac{r+s+2}{m+1}$$

故 $$r+s<m,r+s+2>m+1$$

即 $$m-1<r+s<m$$

这也不可能,故 $A\cup B=N^+$.

例 4 到例 6 虽仍是考虑数列的构造,但已有很高的技巧了,有的甚至与求极限无关了.

2)利用 *stoly* 定理求某些类型数列的极限(等价于连续型的洛必达法则).

定理 1 若 $i)\ y_n\uparrow\infty$,且从某项起,单调性是严格的.

$ii)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 有意义,(存在有限或为 ∞).

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$.

证 首先设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$ 为有限数,则

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$,当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2},\text{且 } y_n-y_{n-1}>0$$

或 $$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N},\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\cdots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由合分比知识得

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}<l+\frac{\varepsilon}{2}$$

但注意到

$$\frac{x_n}{y_n}-l=\frac{s_N-ly_N}{y_n}+(1-\frac{y_N}{y_n})(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l)$$

于是由 $y_n\uparrow\infty$，得

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<\varepsilon$$

无穷极限的情形可化为上面已研究过的情形，例如设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$$

由此推得对充分大的 n 有：

$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}$$

因此随着 $y_n\to+\infty$，$x_n\to\infty$，这时可考虑 y_n/x_n，即可化为已研究过的情形.

注意：1° 定理对“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限提出来的，但当 $x_n\to a$ 时结论亦真.

2° 将条件 ii）换成 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ 有意义，得不到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 存在.

例7 求 $z_n=\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ $(k>-1)$ 的极限.

解 由 *Stole* 定理

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

例8 设实数序列 $\{s_n\}$，定义它的算术平均数 δ_n 为：

$$\delta_n=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\qquad n=0,1,2,\cdots$$

对 $n\geqslant 1$，令 $a_n=s_n-s_{n-1}$，证明，若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$

且 $\{\delta_n\}$ 收敛，则 $\{s_n\}$ 收敛，并有 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n$

（若 $s_n\to s$，则 $\delta_n\to s$，这是数学分析中已证明过了的）

证　首先有

$$s_n-\delta_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

利用 *Stole* 定理

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}ka_k &=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}ka_k-\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{(n+2)-(n+1)}\\ &=\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=0\end{aligned}$$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n$

例 9　命 $x_1\in(0,1)$ 及 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1,2,\cdots$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$

证　由 $x_1\in(0,1)$，$x_2=x_1(1-x_1)$ 知 $x_2\in(0,1)$

由归纳法易知

$$x_n\in(0,1),n=1,2,\cdots$$

于是得

$$0<\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-x_n<1\quad n=1,2,\cdots$$

所以序列 $\{x_n\}$ 单调下降且有界. 从而

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

存在，在递推公式两边令 $n\to\infty$，得

$$x=x(1-x)$$

故 $x=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x=0$

为证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，记 $b_n=\dfrac{1}{x_n}$，$n=1,2,\cdots$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，且 $b_n<b_{n+1}\quad n=1,2,\cdots$