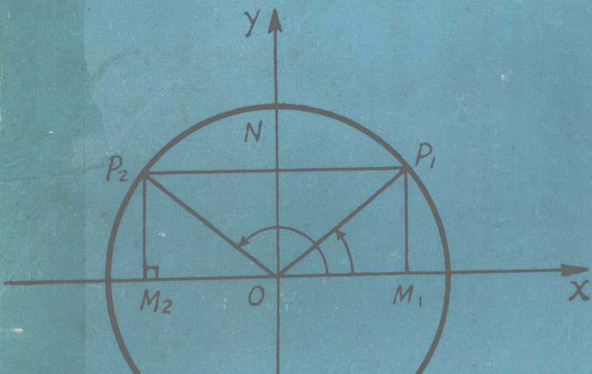
三角

北京市教育科学研究所 编

《高中数、理、化教与学指导丛书》



教育科学出版社

高中数、理、化教与学指导丛书

三　角

贺信谆　徐有标　韩家榘　编著

教育科学出版社

高中数、理、化教与学指导丛书

三　角

北京市教育科学研究所 主编

责任编辑　余淳林

教育科学出版社出版

（北京·北太平庄·北三环中路46号）

新华书店北京发行所发行

中国科学院印刷厂印装

开本：787毫米×1092毫米　1/32　印张：11.625　字数：261,000

1990年6月 第1版　1990年6月 第1次印刷

印数：00,001—11,000册

ISBN 7-5041-0222-9

G·194/定价：4.60元

前　言

北京市有一批具有一定教学水平的中学骨干教师，他们在各级教育行政部门的关怀和支持下，以辩证唯物主义的认识论为指导思想，以教育心理学、逻辑学、思维学为理论基础，结合本学科特点，对“教什么？怎么教？学什么？怎么学”的问题，进行了不同程度的教改实验，并取得了一定成果。1983年，我所学科实验研究组的同志，在他们教改实验的基础上，与其中十八位高中数、理、化教师，按照教育科学研究的步骤，又做了深入的探索，使这部分同志的实验工作，日趋科学化、系列化。

为了使这些同志的改革成果，对面上的教学工作有所启示，在教育科学出版社同志的支持下，我们编了一套《高中数、理、化教与学指导丛书》，这本《三角》是其中的成果之一。

这本书的主要特点是，根据国家教委颁布的《高中数、理、化教学大纲》的基本要求和改革精神，运用现代的教学论观点，对整体与部分的关系；掌握知识与发展智力、培养能力；教与学；讲例题与讲思维方法等方面，从理论和实践的结合上作了较好的论述。

本书第一章，主要讲三角函数的历史演进及目前教材编写的特点。作者试图提供一些简要的史料，以便教师从史料的角度来看三角函数发展的来龙去脉，和从发展的观点来处

理三角函数的教学。

本书的第二章至第五章，基本上是按照五个层次来阐述的。

知识特点。主要讲本章知识的特点以及它在整个三角函数中的地位与作用。

教材分析。着重讲本章教材的一些特点、主要内容、思想、方法以及重点、难点。

教学建议。这是本书的重点。作者提出的各项教学建议，是广大教师在教学中经常遇到的一些问题。它既提出了如何讲清概念，又提出了怎样培养概念思维能力；既提出了如何进行基本知识、基本技能的教学，又提出了怎样发展智力、培养能力；既重视教法，又注意学法；既有明确的教学目标，又有多样的教学方法。这对教师开阔教学思路是十分有益的。

能力培养。根据各章知识的特点，提出了应培养学生的哪些能力，以及怎样去培养能力。

例题分析。本书各章均列举了一些为本章教学目的服务的，对巩固、加深本章知识能起到一定作用的，对发展智力、培养能力具有一定价值的典型例题，并对这些例题的解法做了详细的分析。这对提高解题能力会起到很好的促进作用，可供教师举例时选用。

本书第一、五章由徐有标、韩家粲撰写；第二、三、四章由贺信谔撰写。全书统一修订工作由徐有标完成。

鉴于我们水平有限，本书难免存在缺点和错误，我们热切希望广大读者予以批评指正。

北京市教育科学研究所

1989年9月

目 录

第一章　三角学的历史演进及教材分析

一、三角学的历史演进

天有多高？

在上古时代，人类虽然还处在蒙昧时期，但当他们仰望苍穹时，也会引起无穷的遐想，经常有人提出这样的问题：天有多高？

约在公元前十二世纪，我国周朝的政治家姬旦（周公）就曾考虑到确定“天高”的问题。当时，他要搞一番建设事业，需要广泛的科学技术知识，当然也包括测量问题。于是，他就把知名的学者商高找来，问道：听说您的数学造诣很深，请您谈谈，古代伏羲是怎样确定天球的度数的？没有台阶可以走上天廷，也没有办法用尺子量测大地，那么，怎么知道天高地广的数据呢？这就是数学史上有名的“周公问数”问题，记载在公元前二世纪左右问世的《周髀算径》一书中。

周公在三千多年前能够这样大胆地提出要测天量地的问题，实在是难能可贵。不过，被问者商高也很有水平，他当即胸有成竹地做出了合乎科学的回答。商高测天量地的主要方法就是使用直角三角形中的勾、股、弦关系，并且确信，除非数学被应用于水工技术，否则大禹是不可能战胜洪水的。

商高认为：“数文法出自圆方”，就是说，一切数理的基础就是圆和方。他还认为“圆出于方，方出于矩”，就是说，圆是

从方转化来的，方则是由使用“矩”来获得的（矩就是直角R）。

商高根据存在于矩中的内在关系：“故折矩，以为勾广三，股修四，径隅五，”发现了直角三角形中的三边间的关系，即“勾三股四弦五”的关系，这就是古老的“勾股定理”。

关于用矩来进行测量的方法，商高用六句话概括了这种“用矩之道”：

平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，

卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。

前四句是叙述测量方法，后两句则说明圆与方如何形成。用现代语言来解释，这六句话的意思是说：把矩放平了，可以确定水平和铅直方向；把矩立起来，就能测得高度；把矩反过来倒放，可以测量深度；把矩平放着，就能测得水平距离；将矩旋转一圈，便获得圆形；将两矩合在一起，就得到方形。

例如“偃矩以望高”，就是把矩竖着放置如图 1-1，从矩的一端 A，仰望高处 E，若视线 AE 与垂线 CB 相交于 D，则有 $FE = AF \cdot \dfrac{CD}{AC}$，因为 AF、CD、AC 都可以直接测量，所以不可以直接测量的高度 FE，就可利用上式，通过计算求得。

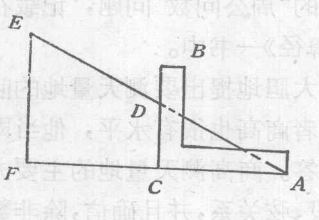


图 1-1

按照现代三角学的理论，上式中的比值 $\dfrac{CD}{AC}$，就是 $\angle A$ 的正切值。可见，在商高的测量方法中，已经有了现代三角测量方法的萌芽。后来，我国古代数学家刘徽又发展了商高的方法，进行了许多实际的测量

工作。

公元前六百年左右，古希腊的七贤之一的“泰利斯”，曾用一根棍棒测量出了埃及金字塔的高度，这件事被广为传播。泰利斯的测量方法也是根据几何学中“相似三角形的对应线段成比例”的定理。在计算过程中，已经出现了被后来称为角的正切值的比值。由此可见，三角学的起源与古代测天量地的实际需要密切联系着。事实上，“三角学”一词的希腊文原意，也正是“三角形之量度”。

第一张弦表。

在古代，三角学只是几何学中研究“三角形之量度”的那个部分。使三角学从几何学中分离出来，成为一门独立学科的标志是第一张弦表的问世。

公元前二世纪中叶，古希腊的天文学家希巴诸斯，为了天文观察工作的需要，进行了造表的工作。他在一个固定的圆内，计算给定度数的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对应的弦 AB 的长度，如图1-2。可以看出，希巴诸斯得到的一系列弦值，不是现代三角学理论中的正弦值，而是所谓的“全弦值”。

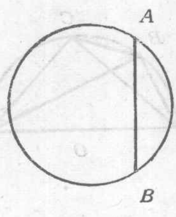


图 1-2

由于希巴诸斯的原著早已失传，所以关于他在三角学上的成就，人们是从托勒密的著作中得知的，因此有人就干脆把第一张弦表不叫做“希巴诸斯弦表”，而叫做“托勒密弦表”。

托勒密也是一位天文学家，他在公元二世纪中叶所著的“算学总览”一书中，给出了从0°到180°，每隔半度的弦表。他的造表方法简介如下：

第一步：建立半径与圆周的度量单位。

托勒密把圆周分为360等分，而把圆的半径分为60等分，在圆周和半径的每一等分中再等分成60份，每一小份又分成60等分。

第二步：求出一些特殊圆弧所对应的弦的长度。

例如求出60°弧所对应的弦长是60个"半径单位"(以半径长的$\frac{1}{60}$为一个单位)。90°圆弧、72°圆弧、36°圆弧所对应的弦的长度都可以求出来。

第三步：运用几何学中的托勒密定理，利用两个角的弦长，计算它们的和的弦长或差的弦长或半角的弦长。

例如，如图1-3，已知$\overset{\frown}{AC}$弧所对应的弦AC的长为c，$\overset{\frown}{AB}$弧所对应的弦AB的长为b，求$\overset{\frown}{BC}$弧所对应的弦BC的长？其中已知圆的直径$AOD=2R$。

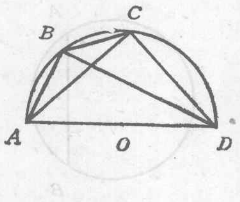


图 1-3

解 设BC弦长为x，由托勒密定理，有

$$AC\cdot BD=BC\cdot AD+AB\cdot CD$$

得 $$c\cdot BD=x\cdot 2R+b\cdot CD,$$

$$x=\frac{c\cdot BD-b\cdot CD}{2R}$$

又由勾股定理得

$$BD^2=AD^2-AB^2,\ BD=\sqrt{4R^2-b^2},$$
$$CD^2=AD^2-AC^2,\ CD=\sqrt{4R^2-c^2},$$
$$\therefore\ x=\frac{c\sqrt{4R^2-b^2}-b\sqrt{4R^2-c^2}}{2R}。$$

因为b、c、R都是已知的长度，所以x可以计算出来。

上述公式给出了已知两个角的弦长计算这两个角的差的弦长的方法，类似地可以得到已知两个角的弦长，计算这两个

角的和的弦长公式，以及求半角的弦长公式。利用这些公式和第二步中得到的一些特殊圆弧所对应的弦的长度，托勒密就造出了包含有从 0° 到 180°，每隔半度的角所对的弦长值的第一张弦表。

在公元五世纪左右，印度数学家阿耶波多在造表工作中，不再研究对应于中心角 $\angle MOM'$ 的全弦 MM'（如图 1-4），而是研究它的一半 PM，这就是现代三角学中所称的角 α 的正弦线，它把三角学的研究又推进了一步。

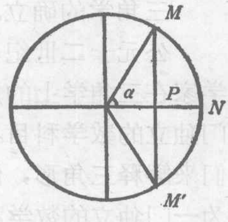


图 1-4

阿耶波多造出了第一张包含有从 0° 到 90°；每隔 3°45′ 的正弦表。阿耶波多"正弦表"和托勒密"全弦表"比较，有两个新的特点：

1. 等分圆周的方法相同，而等分半径的方法不同。

托勒密对半径仍然采用 60 分法来等分，而阿耶波多则将半径分成 3438 等分。这里的 3438 是怎样想出来的呢？若采用现代的符号，可以解释如下：由圆周长公式得 $R=\dfrac{c}{2\pi}$，取 $c=360\times 60$，$\pi\approx 3.1416$，则有 $R\approx\dfrac{21600}{6.2832}\approx 3437.7$，四舍五入之后就得到 3438 这个数字。

2. 阿耶波多是将半弦与全弦所对弦的一半相对应的，因此他造出的不是全弦表，而是正弦表，从而推进了三角学的研究工作。

在公元九世纪左右，阿拉伯数学家阿尔·巴坦尼，在吸收了托勒密全弦表和阿耶波多正弦表的优点的基础上，还造出了一张包含从 0° 到 90°、每隔 1° 的余切表。半个多世纪后，

阿布尔·威发又造出了间隔仅为10′的正弦表和正切表，并首次引入正割和余割这两个概念，使六个三角函数概念全部出现了。

三角学的确立。

公元十二世纪，阿拉伯天文学家纳速拉丁，总结了前期数学家在三角学上的成就，力图使三角学脱离天文学而成为一门独立的数学科目。他提出了正弦定理和正切定理，并用它们来解释三角形，但他没有实现他的愿望。真正使三角学成为一门独立的数学科目的学者是德国人约翰·米勒。

公元十五世纪，约翰·米勒以笔名列基蒙塔发表了第一本系统论述三角学的著作《论一般三角形》。该书全面地叙述了平面三角形和球面三角形的解法，并明确指出三角学是一门独立的数学科目，无需从属于天文学。

十六世纪，法国数学家韦达又将三角学进一步系统化，将三角学中的公式以拉丁字母来表示，从而使三角学具有了现代的形式。

十八世纪，欧拉给出了三角函数的概念，而原来意义下的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割等概念，都可以脱离开几何图形来进行数学的推演，一切三角关系公式也很容易地从三角函数的定义出发而推导出来。欧拉的研究工作，使三角学从只是研究三角形的解法这一狭隘的天地中解放出来，使三角学有可能去研究现实世界中一切可以用三角函数来反映的运动和变化过程。因此，严格地说，此时才是三角学的真正的确立。欧拉应被推为三角函数近代理论的创始人。

笛卡尔在研究《解析几何》时创立的坐标方法，又一次推进了三角学的研究，为了研究任意角的三角函数，人们可以不再局限于直角三角形中用两边的比值来定义三角函数，也可

以不象欧拉那样局限于圆中，认为“三角函数是一种函数线与圆半径的比值”，而是可以采用坐标方法来给出三角函数的定义，采用坐标方法来证明正弦定理、余弦定理，导出同角公式、诱导公式、和差公式，从而使三角学理论具有了更为广泛的、统一的形式。现行中学数学教材中，关于三角学的内容，就是采用这种统一的形式来编写的。

二、三角学的教材分析

按照习惯，三角学的内容一般分成三角函数的定义、图象和性质；三角变换；反三角函数和三角方程；解三角形等四大部分，其核心和基础是第一部分。因为所有的三角公式都是从三角函数的定义出发，逐步推演出来的。例如同角三角函数的关系式是三角函数定义的直接结果；诱导公式一般是根据任意角的概念和三角函数的定义推证出来的；和差公式的证明也离不开三角函数的定义。第三部分中研究的反三角函数，乃是三角函数的反函数，三角方程则是三角函数及其关系式的值等于零时的特殊形式。第四部分解三角形则完全是三角函数的应用。

我们编的这本三角教与学指导丛书也是按照这样的四大部分来写的。但是作为中学数学的教学内容，三角学部分的编写都不完全同上述四大部分的顺序一致，这是因为编写教材不仅要受数学知识科学性的制约，还要受学生的心理发展和中学教学的目的性的制约。为此，我国现行中学数学教材中，关于三角学的内容，具有如下三个明显的特点：

（一）三角学内容的两个层次

在初中阶段，先学习 $0°$ 到 $180°$ 的三角函数的概念，但对

函数的性质不作充分的研究，重点在于利用三角函数的定义及正、余弦定理解决解三角形的问题，以弥补几何知识在解三角形问题上的不足。

在高中阶段，则系统引入任意角三角函数的概念。图象和性质，进而学习以和差公式为代表的一系列三角变换公式，学习反三角函数和三角方程等内容，最后使学生获得关于三角学理论的较为全面的知识，并能应用它来解决一些实际问题。

教材的这种编排方法，基本上同人类认识三角学的发展过程相一致。人类研究三角学就是从解决由已知三角形的一些元素来决定其未知元素的实际问题开始的。这类被称为"解三角形"的问题不仅在实际中广泛存在，而且也较易被中学生所接受，因此，将"解三角形"的内容作为初中阶段学习三角学的重点内容是恰当的。学好了初中阶段规定的内容，也就为高中阶段系统学习三角学理论增加了感性认识和奠定了理论基础。

教材的这种编排方法，还有利于体现"数和形"的初步结合，使初中阶段学习的代数、几何知识，通过三角内容而联系起来。大家知道，"数形结合"是在高中阶段学习"解析几何"之后才完全实现的，但是在学习三角学内容的过程中，学生也会受到"数形结合"的培养和训练，这是因为，三角学的基本理论是以相似三角形的性质为基础而建立起来的，后来又和圆的有关性质紧密相联，并应用于解三角形的问题，体现了"形"的一面；但是三角学内容的表达和处理方式又完全是采用代数中的一系列方法，它是两类十分重要的基本初等函数，即三角函数和反三角函数。因此完全可以说，三角学是初步地将几何和代数联系起来的一个数学科目。当然，这种联系还是