新课程

初中数学

疑难全解

主 编⊙邱绿青

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

主编简介

邱绿青 江苏省中学数学特级教师，镇江市学科带头人、江苏省青少年科技先进工作者、江苏省青少年科技优秀辅导工作者、镇江市优秀教育工作者。现致力于丹阳市中学数学教师的培养。从事中学数学教学 30 年，主编参编数学书籍多部。

新课程初中疑难全解丛书

初 中 英 语 疑 难 全 解

初 中 数 学 疑 难 全 解

初 中 物 理 疑 难 全 解

初 中 化 学 疑 难 全 解

丛书策划：王礼祥 责任编辑：王书贞 装帧设计：皇甫珊珊

ISBN 978-7-81101-713-7

9 787811 017137 >

定价：25.80元

新课程

初中数学疑难全解

主　编：邱绿青

编　者：钟春明　许国荣　蒋小芳　王先进
王方明　吴春和　薛贤良　壮须平
王献忠　步　飞　虞红良　赵鸿燕
孙双荣　欧阳礼　袁　波

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

初中数学疑难全解 / 邱绿青主编. —南京：南京师范大学出版社，2008.7

ISBN 978-7-81101-713-7/G・1177

Ⅰ. 初… Ⅱ. 邱… Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 107511 号

书　　名	初中数学疑难全解
主　　编	邱绿青
责任编辑	王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编：210097)
电　　话	(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://press.njnu.edu.cn
E — mail	nspzbb@njnu.edu.cn
印　　刷	兴化印刷有限责任公司
开　　本	787×960　1/16
印　　张	21.5
字　　数	410 千
版　　次	2009 年 1 月第 1 版　2009 年 1 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-781101-713-7/G・1177
定　　价	25.80 元

前　言

新课程启动后，不少同学反映新课程内容广、难度大，迫切需要一套能辅导其解决学习中疑难问题的工具性参考书。为此，我社2006年组织了5位特、高级教师领衔，编写《新课程高中疑难全解》丛书，受到了广大读者的好评，很多经销单位也纷纷建议我们组织力量编写《新课程初中疑难全解》。经过深入调研我们决定并组织了江苏省的4位特级教师联袂编写这套《新课程初中疑难全解》。

《新课程初中疑难全解》沿袭高中版实用的编排方式，每科确定200个左右的疑难问题。每个问题分"问题提出"、"释疑解难"和"疑难突破练习"三个部分。"问题提出"以一句话概括出疑难问题。"释疑解难"针对问题，从知识脉络、拓展、学法等方面进行深入剖析，透彻讲解。"疑难突破练习"根据疑难问题，编制2～6个针对性较强的配套练习，并提供参考答案。这样的编排方式使本丛书呈现出如下特点：

◆集中破解学习中的疑难问题。学习的进步不仅在于掌握已经熟悉的内容，更在于探索新知，再攀高峰。本书就是引领你去一一攻克这些难关。

◆强力改造学习中的错题惯性。本书在讲解疑难的过程中，将为你透彻分析"为什么难"，"为什么易错"，并通过"疑难突破练习"，帮助你彻底理解所学知识，掌握知识链上的关键内容，从根本上消除错题惯性。

◆全面总结名师的经验与秘诀。4位特级教师将他们从教以来的经验与智慧浓缩于《疑难全解》。拥有《疑难全解》，你就掌握了名师的点金术。

看到本书时，或许你已经进入了初中阶段的学习，或正准备跨入初中的校门。在茫茫书海里，发现本书，是你的慧眼；选择本书，是你对我们的信任。相信你的慧眼，感谢你的信任！

南京师范大学出版社

目　录

第一章　数与式

第二章　方程与不等式

第三章　函数

第四章　图形的认识

第五章　三角形

第六章　四边形

第七章　圆

第八章　图形与变换

第九章　图形的相似

第十章　解直角三角形

第十一章　图形与证明

第十二章　统计与概率

第十三章　综合问题全解

第十四章　思想方法全解

第十五章　竞考题型全解

第一章　数与式

疑难 1　如何进行数的分类？如何利用数的分类进行分类讨论？

实数有两种分类方法，第一种分类的依据是“有理数和无理数统称实数”.

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

第二种分类的依据是“实数也有正负之分”.

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{正无理数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

第二种分类方法是“分类讨论思想”的重要依据，应用比较广泛.

例 1　化简：$|x+2|+|x-3|$.

解析　如果令 $x+2=0$，$x-3=0$，可得 $x=-2$，$x=3$，而 -2 和 3 将数轴分为三段. x 分别取这三段中的数，就可知道 $x+2$ 和 $x-3$ 的值的符号，这就是“零点分段”法. 其实质是把 $x+2$，$x-3$ 的值，按正实数、0、负实数进行分类讨论.

令 $x+2=0$，$x-3=0$，得 $x=-2$，$x=3$，因此，

(1) 当 $x<-2$ 时，$x+2<0$，$x-3<0$，$|x+2|+|x-3|=-(x+2)+(3-x)=1-2x$；

(2) 当 $-2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$x+2\geqslant 0$，$x-3\leqslant 0$，$|x+2|+|x-3|=x+2+3-x=5$；

(3) 当 $x>3$ 时，$x+2>0$，$x-3>0$，$|x+2|+|x-3|=x+2+x-3=2x-1$.

例 2　解方程：$|x+3|-|x-1|=x+1$.

解析　使用“零点分段”法，令 $x+3=0$，$x-1=0$ 得 $x=-3$，$x=1$.

将数轴分为三段：

(1)当 $x<-3$ 时,原方程化为 $-x-3+x-1=x+1$,解得 $x=-5$;

(2)当 $-3\leqslant x<1$ 时,原方程化为 $x+3+x-1=x+1$,解得 $x=-1$;

(3)当 $x\geqslant 1$ 时,原方程化为 $x+3-x+1=x+1$,解得 $x=3$.

所以原方程的解为 $x=-5,-1,3$.

疑难突破练习

1. 化简:$|x-1|+|x+1|$.
2. 解方程:$|x-5|+|x-4|=1$.

*3. 解不等式:$|x-2|>|x+1|-3$.

疑难 2 如何利用正负数解题?

例 1 电子跳蚤落在直线 l 上的某点 K_0,第一步从 K_0 向左跳 1 个单位到 K_1,第二步由 K_1 向右跳 2 个单位到 K_2,第三步由 K_2 向左跳 3 个单位到 K_3,第四步由 K_3 向右跳 4 个单位到 K_4……按以上规律跳了 100 步时,电子跳蚤落在直线 l 上的点 K_{100} 在直线 l 的定点 O 的右侧,并到定点 O 的距离是 20.01,试问电子跳蚤的初始位置 K_0 点在定点 O 的哪一侧?到定点 O 的距离是多少?

解析 根据题意,我们可以把直线 l 看成是一个数轴,向右的方向为正方向,设定点 O 是原点,设点 K_0 在数轴上对应的数为 x,由已知得 $x-1+2-3+4-5+6-\cdots-99+100=20.01$,解之得 $x=-29.99$,故电子跳蚤的初始位置 K_0 点在定点 O 的左侧,到定点 O 的距离是 29.99.

例 2 将 7 只杯子放在桌上,使 3 只杯口朝上,4 只杯口朝下.现要求每次翻转其中任意 4 只,使它们杯口朝向相反,问能否经有限次翻转后,让所有杯子杯口朝下?

解析 设杯口朝上用 $+1$ 表示,杯口朝下用 -1 表示.则开始时 7 个数的乘积为 $+1$.因为每次翻转均改变 4 个数的符号,相当于 4 个数各乘以 -1.所以其结果是 7 个数之积再乘以 $(-1)^4$,其积仍为 $+1$,经有限次翻转后,这个结果保持不变.这与 7 只杯子杯口都朝下时 7 个数之积为 -1 矛盾.由此得知,不能经有限次翻转,使 7 只杯子的杯口全部朝下.

例 3 画一圆,沿圆周均匀地放上 4 个围棋子,黑白都行,然后按下列规则变换:要是原来相邻的两个棋子颜色相同,在它们之间放上一个黑子;要是相邻的两个棋子的颜色不同,在它们之间放上一个白子,然后把原来的那 4 个棋子拿走,试说明:不管原来那 4 个棋子颜色如何,最多只需经过 4 次变换,圆周上的 4 个棋子都会变成黑子.

解析 这道题的难点在于黑白棋子的分布没有规律,而且题目中也没有可供作数学运算的对象.看来,把问题转化成明确的数学问题是最关键的一步.

仔细研究变换规则,做一些联想和对比,简单地说,变换规则是:相邻同色,中间放上黑子;相邻异色,中间放白子.这就使我们联想起乘法规则:同号相乘为正,异号相乘为负.因为只有白子、黑子之分,所以可用 $+1$ 代表黑子,-1 代表白子,黑子与白

子之间放一个白子，正好用$1\times(-1)=(-1)\times1=-1$来表示；两黑子之间及两白子之间放一黑子，正好用$(+1)\times(+1)=(-1)\times(-1)=1$来表示. 于是经过一次变换，即使相邻的两个数相乘之后所得出的4个积来代替原来的4个数.

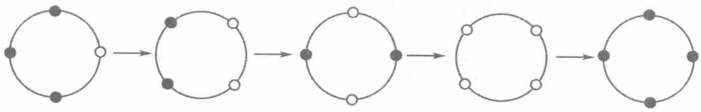
设x_1,x_2,x_3,x_4分别表示开始时圆周上均匀放置的4个棋子，由于每一个棋子可能为白子，也可能为黑子，因此x_1,x_2,x_3,x_4中的每个数，既可能是+1，也可能是−1，连续进行3次变换，可产生以下情况(如下表所示)：

原始状态	第1次变换	第2次变换	第3次变换
x_1	x_1x_2	$x_1x_2^2x_3$	$x_1x_2^3x_3^3x_4$
x_2	x_2x_3	$x_2x_3^2x_4$	$x_2x_3^3x_4^3x_1$
x_3	x_3x_4	$x_3x_4^2x_1$	$x_3x_4^3x_1^3x_2$
x_4	x_4x_1	$x_4x_1^2x_2$	$x_4x_1^3x_2^3x_3$

因为$x_1^2=x_2^2=x_3^2=x_4^2=1$，因此，经过3次变换后，4个数实际上都等于$x_1x_2x_3x_4$.

如果这个数是1，那么已知全出现黑子. 如果是−1，那么再进行一次变换，就会全部出现黑子，至此结论得证.

为了更好地理解这一结论，不妨看一个具体例子. 假设4个棋子中，3黑1白，如下图所示，果然不出4次变换，圆周上的棋子全是黑色的了.



疑难突破练习

一次团体操排练活动中，某班45名学生面向老师站成一排横队，老师每次让其中任意6名学生向后转(不论原来方向如何). 能否经过若干次后，全体学生都背向老师站立？如果能够的话，请你设计一种方案；如果不能够，请说明理由.

疑难3 如何利用数轴解题？

数轴是代数中最基本、最重要的一个概念，它是规定了原点、正方向和单位长度的一条直线. 数轴上的点与实数是一一对应的，这种对应关系沟通了“数”与“形”之间的联系，是数形结合思想的基石. 数轴在我们的数学学习中应用十分广泛，在目前我们的学习中主要有以下一些应用.

1. 利用数轴理解有理数的分类.

在数轴上，正数、负数一目了然，分别有序地排在原点的两旁，正数在原点的右边，负数在原点的左边，原点表示数“0”，它介于正数与负数之间，它既不是正数，也不

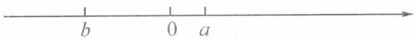
是负数.从数轴上看就清晰地知道有理数分为正有理数、零与负有理数三类.

2.利用数轴理解有理数的概念.

(1)相反数:从数轴上可以看出,像2与-2、-3.5与3.5这样与原点对称的这些点所表示的只有符号不同的两个数互为相反数.零的相反数是零.

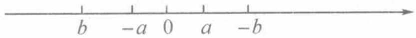
任何一个数在它的前面添上一个负号就得到它的相反数.在数轴上互为相反数的两个数总在原点左右的对称点上.

例1 数a、b在数轴上的位置如下图所示,那么下列各式正确的是(　　).



A. $b>-a$　　B. $-a>-b$　　C. $-a<b$　　D. $-b>a$

解析 先在数轴上将$-a$、$-b$的位置表示出来,如下图所示:



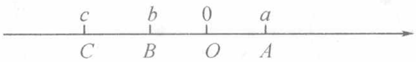
显然有$b<-a<0<a<-b$,故选D.

(2)绝对值:从数轴上可以看到,一个数的绝对值就是表示这个数对应的点离开原点的距离,如$|-5|=5$,$|+3.5|=3.5$.

一个正数的绝对值是它本身,一个负数的绝对值是它的相反数,零的绝对值是零.

到原点的距离相等的点有两个,这两点所表示的数是一对相反数,这说明两个互为相反数的数的绝对值是相等的,即$|-a|=|a|$.

例2 在下图所示的数轴中,$OA=OB=BC=n$,化简$|a-b|-|b+c|+|a+b+c|$.



解析 由数轴上各点的位置可知,$c<b<0<a$,$c=-2n$,$b=-n$,$a=n$.

于是,得$a-b=n-(-n)=n+n=2n>0$,$b+c=(-n)+(-2n)=-3n<0$,$a+b+c=n+(-3n)=-2n<0$.

所以,$|a-b|-|b+c|+|a+b+c|=|2n|-|-3n|+|-2n|=2n-3n+2n=n$.

3.利用数轴比较有理数的大小.

在数轴上两个点所表示的数,右边的数总比左边的数大,这样,我们就能形象地知道正数大于零、负数小于零、正数大于一切负数;两个负数,绝对值大的反而小.

例3 数轴上的点A、B、C、D分别表示数a、b、c、d,已知A在B的右侧,C在B的左侧,D在B、C之间,则下列式子成立的是(　　).

A. $a<b<c<d$　　B. $b<c<d<a$

C. $c<d<a<b$　　D. $c<d<b<a$

解析 先根据题意画出数轴,如下图所示:

因为“在数轴上，右边的点所表示的数一定大于左边的点所表示的数”，所以 $c<d<b<a$，故选 D.

4. 利用数轴表示复杂的数量关系.

有些复杂的数量关系，借助数轴可以将它们的大小关系明朗化.

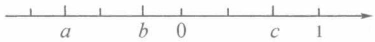
例 4 若 $a>0$，$b<0$，且 $|a|<|b|$，试比较 a、b、$-a$、$-b$ 的大小.

解析 利用数轴先把 a、b 在数轴上表示出来，$a>0$，a 在原点右侧，$b<0$，b 在原点的左侧. 又 $|a|<|b|$，说明 b 离开原点的距离比 a 离开原点的距离远. 这样可将 a、b 在数轴上表示出来，再根据相反数概念可表示出 $-a$ 与 $-b$，由图，进一步可得到 $b<-a<a<-b$.

由此题我们可以看到，借助数轴很明显地知道 a、b、$-a$、$-b$ 的大小关系，如果没有数轴这工具还真不容易说明清楚呢.

疑难突破练习

1. 有理数 a、b、c 在数轴上的位置如图所示，若 $m=|a+b|-|b-1|-|a-c|-|1-c|$，则 $1\ 000m=$______.



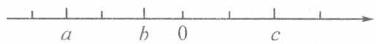
（第 1 题）

2. 数轴上表示整数的点称为整点. 某数轴的单位长度是 1 厘米，若在这个数轴上随意画出一条长为 2 004 厘米的线段 AB，则线段 AB 盖住的整点的个数是（　　）.

A. 2 002 或 2 003　　B. 2 003 或 2 004

C. 2 004 或 2 005　　D. 2 005 或 2 006

3. 已知有理数 a，b，c 在数轴上对应的点如图所示，试比较 a，$-a$，b，$-b$，c，$-c$，0 的大小，并用符号“<”连接起来.



（第 3 题）

4. 如果 $0<p<15$，那么代数式 $|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$ 在 $p\leqslant x\leqslant 15$ 上的最小值是（　　）.

A. 30　　B. 0

C. 15　　D. 一个与 p 有关的代数式

疑难 4 相反数与绝对值有什么区别和联系？如何利用它们解题？

(1)相反数的概念关键要理解"只有符号不同"的含义，规定零的相反数是零.

(2)互为相反数指的是一对数：甲、乙两数互为相反数包括甲是乙的相反数，乙也是甲的相反数.

(3)相反数的几何意义：表示互为相反数的两个点(除 0 外)分别在原点 O 的两边，并且到原点的距离相等.

(4)多重符号化简的依据就是相反数的意义，化简的结果是由"－"号的个数来决定的，简称：奇负偶正.

(5)从数轴上看，一个数的绝对值就是表示这个数的点离原点的距离. 注意，这里的距离，是以单位长度为度量单位的，是一个非负的量.

(6)一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零.

(7)两个负数，绝对值大的反而小.

1. 直接利用相反数和绝对值的概念解题.

例 1 2 的相反数是( ).

A. -2 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

解析 根据相反数的概念，选 A.

例 2 绝对值为 5 的实数是( ).

A. ±5 B. 5 C. -5 D. 25

解析 求绝对值等于 5 的数用绝对值的几何定义比较直观，绝对值等于 5 的实数即在数轴上到原点距离等于 5 的实数点表示的数，故本题选 A.

2. 利用相反数和绝对值的性质特征解题.

例 3 -3 的绝对值是( ).

A. 3 B. -3 C. ±3 D. $\frac{1}{3}$

解析 绝对值的特征：一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零. 由此特征可知，-3 的绝对值是 3，故本题选 A.

例 4 若 a 与 3 互为相反数，则 $|a+3|$ 等于( ).

A. 0 B. -3 C. 3 D. 9

解析 由相反数的特征，若 a、b 两数互为相反数，则 $a+b=0$，反之也成立. 可知 $a+3=0$，再由绝对值的特征可得本题选 A.

3. 利用相反数和绝对值解决实际问题.

例 5 质检员抽查某种零件的长度，超过规定长度的记为正数，不足规定长度的记为负数. 检查结果如下：第一个为 0.13 毫米，第二个为 -0.2 毫米，第三个为 -0.1