工程数学

概率论与数理统计

主　编　朱荣升

NEUPRESS
东北大学出版社

工程数学

概率论与数理统计

主　编　朱荣升
副主编　孙洪波

东北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/朱荣升主编．—沈阳：东北大学出版社，1998.7

ISBN 7-81054-335-10

Ⅰ．概…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．①概率论 ②数理统计　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 21044 号

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110006）

东北大学印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：850×1168　1/32　字数：269 千字　印张：10.375

印数：1～3000 册

1998 年 7 月第 1 版　　1998 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑：何永连　　责任校对：米戎

封面设计：唐敏智　　责任出版：秦力

定价：14.00 元

前　言

在素质教育的大讨论中产生了系列教材改革的新思想。根据高等学校工科数学课程指导委员会1997年5月在景德镇召开的《工科数学转变教学思想专题研讨会》的精神，我们编写了这套工程数学系列改革教材，这是系列改革教材的第二部，第一部教材（线性代数）出版后，已得到一些院校同行的认可，并来信请求参加研编与实践。从本书开始，我们准备吸收部分同行参加研编与实践。

本项研究申报了“国家天元基金”，在第一部教材（线性代数）的研编过程中尚未批复下来，现在已正式批下来了。本系列改革教材，是宋国华教授主持的国家自然科学基金数学天元基金资助课题“普通工科院校数学教育现代化研究”的主要部分，本书是这套系列改革教材的第二部。

本系列改革教材的特点是改传统教材的一体式为模块式知识分流。各章都将知识分为A.基础知识和B.欣赏与提高两个模块。A.基础知识模块，保证了国家教委制定的课程教学基本要求的全面贯彻实施，是发展共性的素材，这一部分，对学生是统一要求的，是通过统一教学来完成的；B.欣赏与提高模块，是为那些学有余力，又有兴趣、希望扩大知识面或希望再学习深造的学生准备的，这一部分不作统一要求。主要是通过学生自学来完成的或在老师指导下学生自学来完成，这一部分则是为了让学生的个性发展有个良好的氛围。

如果说，我们希望在A中举一的话，那么，我们更希望有兴趣的学生在B中反三，从而达到提高。

本教材注意了分析归纳及创造性思维的启迪，组织科学，思路清晰、顺理成章，好读易懂，每章都能使读者在获得新知识的同时产生新的追求。

本教材基础知识部分主要是创造性地讨论了经典内容，而欣赏与提高部分则是基础部分知识内涵与外延的深化讨论，数学味道更浓一些，但是注意到读者的具体情况，这种讨论也是很有局限性的，仅管如此，至少对思路有某种开通和启迪的作用。这种限度，还有待进一步地研究和实践来确定最后的取舍，希望能在广大读者的褒贬中完美化。

本教材基础知识部分的内容，大约可在 50 学时左右完成。

本教材由朱荣升提出编写大纲，经孙洪波，边文利、陈宝巍等讨论，分头由朱荣升执笔撰写概率论部分（即第一至第五章），由孙洪波撰写数理统计部分（即第六至第八章），最后由朱荣升统定。参加研编的还有靖新、朱宝彦、缪淑贤、戚中和李汉龙等老师。本教材在编写过程中，一直得到沈阳建筑工程学院教务处、基础部领导的关心和支持及数学教研室很多老师的支持和帮助，编者在此对他们一并表示深切的感谢。

编者于沈阳建筑工程学院

1998.4

目　录

第一章　随机事件及其概率

A　基础知识

一切社会现象和自然现象都是一定社会条件或自然条件实现的结果，只是有的条件实现了一定会出现某一个确定结果，相同的条件再实现就会再次出现相同的结果，这种现象称为确定性现象。例如一电池串入电阻为 R 的闭合回路中，回路中将有电流 $I=E/R$，这种现象是确定的；而有的条件虽然实现了，但不一定出现某一确定结果，即相同条件再次实现，出现的结果不一定与上次相同，这种现象称为不确定现象。例如某个传呼台记录 24 小时收到的呼叫次数，每天都可能不一样，这种现象是非确定性的，具有偶然性。初等数学，微积分学以及线性代数所讨论的数学模型，都是揭示确定性现象的。而非确定现象是概率论所讨论的问题。概率论的任务就是研究偶然现象（非确定现象）的必然规律性的一门科学。应用极广，几乎遍及所有科学领域。

§1　随机事件及其运算

一、随机试验与随机事件

偶然现象又叫做随机现象。偶然现象的必然性是通过随机试验来认识的。所谓随机试验，它是一种较通过仪器设备进行科学技术试验更为广泛的术语，以至于对某种事物的某项特征进行观察都可以认为是一种随机试验。一般说来，如果一个试验具备以下三个特点：

(1)可以在相同条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，且事先可明确试验的全部

可能结果;

(3)每次试验前无法预言哪一个结果一定会出现或一定不出现。

在概率论中,具备上述三个特点的试验,叫做随机试验。为简便起见,以后也常称随机试验为试验。并记为 E。例如:

E_1:投掷一个篮球,观察球是否入筐。

E_2:抛两枚硬币,观察正、反面出现的情况。

E_3:从含 3 件次品的 10 件产品中任取 3 件产品,观察取到的次品件数。

E_4:从一批灯泡中任取一只,测试它的使用寿命。

E_5:将一枚骰子掷在桌面上,观察向上一面的点数。

E_6:记录某射手射击半径一米的圆盘靶弹着点的位置。

E_7:记录某传呼台一日内接到的呼唤次数。

这些都是随机试验。每个试验的所有结果构成一个集合,我们称一个随机试验的所有结果构成的集合为这个随机试验的样本空间,并记为 S,而试验的每一个可能结果就是集合样本空间的元素,叫做样本点或基本事件,记为 ω,例如上述试验 E_k 的样本空间 S_k 及样本点可表述如下:

$S_1=\{$投中,没投中$\}$,含两个样本点:

$S_2=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$,含 4 个样本点。其中 H 表示正面,T 表示反面;

$S_3=\{0,1,2,3\}$,含 4 个样本点;

$S_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$,含样本点,不可数无穷多;

$S_5=\{1,2,3,4,5,6\}$,含 6 个样本点;

$S_6=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,样本点为不可数无穷多;

$S_7=\{0,1,2,3,\cdots\}$样本点为可数无穷多。

样本空间的任何一个子集合,叫做随机事件,记为 $A,B,C,\cdots$,为方便起见,今后我们常简称随机事件为事件。它在一次试验

中可能发生也可能不发生。在一次试验中一定发生或一定不发生的事件,前者称为必然事件,记为 S,后者称为不可能事件,记为 $\varnothing$。

所谓事件的发生或出现是指该事件包含的某个样本点出现。如掷骰子,记 A 表示出现偶数点的事件,则只要二、四、六点中的一个出现就算事件 A 发生。

二、事件间的关系及运算

既然事件是一种样本点的集合,自然可以把集合的关系及运算推广到事件上来。下面给出事件的关系及运算在概率论中的提法,并根据"事件发生"的含义,给出它们在概率论中的含意。

设试验 E 的样本空间为 $S, A, B, A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集(随机事件)。

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必导致事件 B 发生,则称事件 B 包含了事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记为 $A \subset B$,并称 A 为 B 的子事件(见图 1-1)

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与 B 相等,记为 $A=B$。如 E_5 中记 A_k 表示骰子向上一面的点子为 $k(k=1,2,\cdots,6)$ 点,B 表示骰子向上一面的点数为偶数,则 A_2, A_4, A_6 都是 B 的子事件,即 $A_2, A_4, A_6 \subset B$。

显然任何事件 A 都是样本空间 S 的子集,即 $A \subset S$。

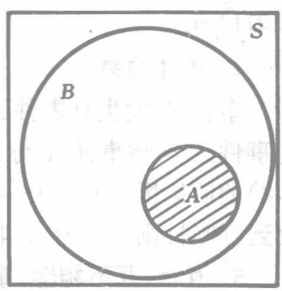

图 1-1 $A \subset B$

2. 事件的和(并)

事件 A 与 B 至少一个发生的事件 C,称为事件 A 与 B 的并(和事件),记为 $A \cup B$(见图 1-2),即

$$A \cup B = C$$

如上述，E_5 中假设下，有

$$A_2 \cup A_4 \cup A_6 = B$$

推广到任意 n 个事件的和有事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少一个发生的事件 C 称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件(并)发生，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$。

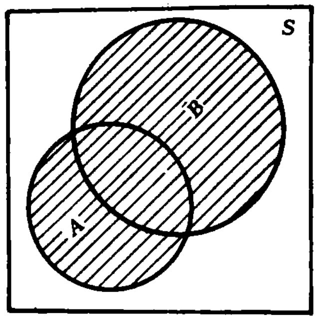

图 1-2　$A \cup B$

3. 事件的积(交) 表示事件 A 与 B 同时发生的事件 C 称为事件 A 与 B 的积(交)事件。记为 $A \cap B$，简记为 AB(见图 1-3)，即 $C = A \cap B$。如 E_4 中，设 $A = \{$寿命不小于 500 小时$\}$ $B = \{$寿命不大于 1000 小时$\}$，则 $A \cap B = \{500 \leqslant$ 寿命 $\leqslant 1000\}$。

推广到任意 n 个事件的积事件有 $A_1, \cdots, A_n$，同时发生的事件记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$。

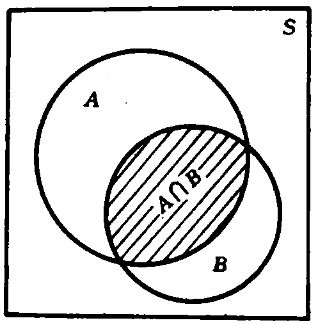

图 1-3　$A \cap B$

4. 事件的差

事件 A 发生且事件 B 不发生的事件 C 叫做事件 A 与 B 的差，记为 $A - B$，即 $C = A - B$(如图 1-4)的阴影区，如 E_7 中 $A = \{$收到呼唤次数不大于 2$\}$，$B = \{$没有收到呼唤$\}$，则 $A - B = \{$收到呼唤次数为 1 次或 2 次$\}$。

5. 互斥(互不相容)事件

若事件 A 与 B 不能同时发生，记为 $A \cap B = \varnothing$ 则称事件 A 与 B 互斥或互不相容，(见图 1-5)。

任何两个基本事件是互斥的。在 E_5 中设 $A = \{$出现奇数点$\}$ $B = \{$出现偶数点$\}$，则 A 与 B 互斥。即 $A \cap B = \varnothing$。

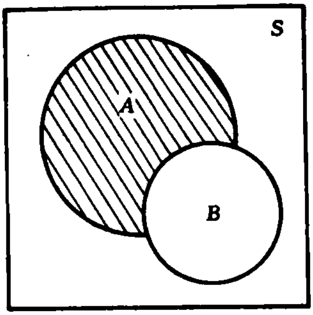

图 1-4　$A-B$

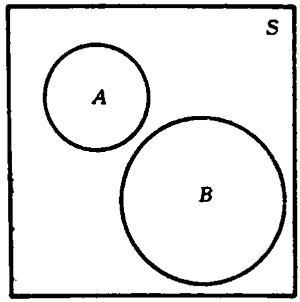

图 1-5　$A\cap B=\emptyset$

如果一组事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都是互斥的，则称这组事件两两互斥。显然任何一个试验的所有基本事件是两两互斥的事件组。

6. 对立事件

如果每次试验中事件 A 与 B 必有且仅有一个发生，即 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\emptyset$，则称事件 B 为事件 A 的逆事件，记作 $\overline{A}=B$（见图 1-6）。若 $\overline{A}=B$，则 $\overline{B}=A$，即 A 与 B 互逆（相互对立）。

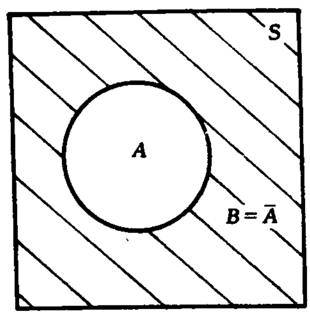

图 1-6　$\overline{A}$

在进行事件的运算时，经常要用到下述的定律：

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A$;

$$A\cap B=B\cap A$$

(2)结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

(3)分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(4)迪·摩根(De. Morgan)对偶律：

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$； $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

(5)$A-B=A\cap\overline{B}$,即 A 与 B 的差事件等于事件 A 与 $\overline{B}$ 的积事件。

证:只证明(4),注意到 $\forall\omega\in S$, $\omega\in A$ 与 $\omega\in\overline{A}$ 有且仅有一个成立。即若 $\omega\in A$,则 $\omega\notin\overline{A}$,反之也对。事实上。

$\forall\omega\in\overline{A\cup B}$,则 $\omega\notin A\cup B$,即 $\omega\notin A$ 且 $\omega\notin B$,因此,$\omega\in\overline{A}$ 且 $\omega\in\overline{B}$,从而 $\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$,亦即 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$。

另一方面,$\forall\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$ 即 $\omega\in\overline{A}$ 且 $\omega\in\overline{B}$,从而 $\omega\notin A$ 且 $\omega\notin B$ 即 $\omega\notin A\cup B$,因此,$\omega\in\overline{A\cup B}$,于是 $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$

所以,
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

一样可证 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 与其他运算律。

熟练随机事件的运算,对于以后遇到复杂事件的表达及其概率的计算通常是十分有益的。不妨我们再用两个例子来体会如何运用事件的运算。

例1 如图1-7所示的电路中,以 A 表示“信号灯亮”,以 B, C, D 分别表示事件:继电器Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ闭合,那么易知 $BC\subset A$, $BD\subset A$,于是 $BC\cup BD=A$,而 $\overline{B}A=\varnothing$,即事件 $\overline{B}$ 与 A 互不相容。

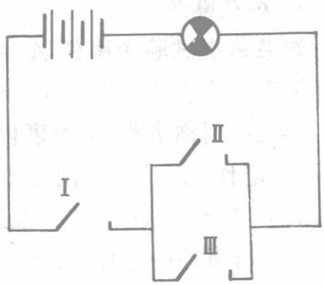

图 1-7

反之,灯不亮。

$$\begin{aligned}\overline{A}&=\overline{BC\cup BD}\\&=\overline{B\cap(C\cup D)}\\&=\overline{B}\cup(\overline{C\cup D})\\&=\overline{B}\cup\overline{CD}\end{aligned}$$

即灯(是好的)不亮,说明继电器Ⅰ不闭合或Ⅱ、Ⅲ同时没闭合。

例2 向指定目标射击3枪,以 A_i 表示“第 i 次射击,击中目标”($i=1,2,3$)。将下列事件用 A_i 表示出来。

(1)只击中第一枪;(2)只击中一枪;

(3)三枪均未中;(4)至少中一枪;

(5)最多中两枪;(6)至少中两枪。

【解】 (1)"只击中第一枪",说明第二,三次射击都没有击中目标,所以可表示为 $A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}$。

(2)"只击中一枪"未指明哪一枪击中,因此是"只击中第一枪"、"只击中第二枪"和"只击中第三枪"中的三个两两互斥的事件中的某一个发生。所以可表示为

$$A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3$$

(3)"三枪均未中"显然是$\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$。

(4)"至少中一枪"为 $A_1\cup A_2\cup A_3$。(4)显然是(3)的逆事件,所以也可表示为$\overline{\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}}=A_1\cup A_2\cup A_3$。

(5)"最多中两枪"意味着未中三枪或者说$\overline{A_1}$,$\overline{A_2}$,$\overline{A_3}$中至少一个发生,因此可表示为:

$\overline{A_1A_2A_3}$或$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$。

(6)"至少中两枪"即 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 中至少一个发生,所以可表示为:

$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$。

§2 概率

对于一个随机事件来说,它在一次试验中发生与否具有偶然性。但人们还是希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大。例如,为了合理地确定安全系数,就需要知道建筑物所在地的风压达到某一值的事件发生的可能性大小。我们希望找到一个可以度量随机事件在一次试验中发生可能性大小的数,称之为随机事件的概率。

一、概率的概念

人们无论是否学习过概率论,凭借实践和经验,往往能作出某

些事件发生可能性大小的估计。譬如说，某人观看甲、乙两队进行了 10 次比赛，乙队取胜了 7 次。再次比赛，该人估计乙队有 70% 的可能取胜甲队。这就给出了度量一次比赛乙队取胜可能性大小的数值，是不是乙队取胜的概率呢？

频率的定义 在相同条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生了 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频数**。并称 n_A/n 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$。

由定义可知频率的性质：

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2)$f_n(S)=1$；

(3)若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互斥的事件，则有

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)。$$

从频率的定义不难看出，事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 是依赖于试验次数 n 的，就是同样作 n 次试验，频数也未必相同，这就是说，频率是一个随机数，有人做过投硬币的试验，分别取 $n=5$, 50, 500 各做了十次，得数据如表 1 所示。（表中，n_H 表示在 n 次试验中 H 出现的次数）。

表 1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表 1 可见，频率具有随机波动性，当试验次数较小时 $f_n(H)$ 的波动幅度较大；但当试验次数增多时，频率明显呈现稳定性。K·皮尔逊曾分别取 $n=1200$ 和 2400 作试验得到频率分别为