21世纪高等学校规划教材

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

高等数学学习指导

刘瑞芹　魏丽侠　主　编

刘　艳　王文祥　王　涛　文小艳　副主编

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

高等数学学习指导

主　编　刘瑞芹　魏丽侠

副主编　刘　艳　王文祥　王　涛　文小艳

编　写　杨　戍　王　昕

主　审　刘金铎

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。

本书共分十二章，主要内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章节包括知识结构图、疑难问题解答、典型例题分析、自测题及答案等内容。书末附录Ⅰ为工科类本科数学基础课程教学基本要求，附录Ⅱ为近年来全国硕士研究生入学考试数学试题及答案。本书围绕最新教学大纲中的教学基本要求，按章节以知识点为单位进行编排，便于学生学习。

本书主要作为理工科院校非数学专业高等数学的辅助教材，也可作为考研复习的指导用书，同时也可供高等院校相关课程教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/刘瑞芹，魏丽侠主编．—北京：中国电力出版社，2008

21世纪高等学校规划教材

ISBN 978-7-5083-7750-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①刘…　②魏…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第119815号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2008年8月第一版　2008年8月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　18.25印张　446千字

定价 **29.20** 元

前　言

高等数学是工科院校重要的基础课程，它不仅是后继课程的基础，更是将来从事理论和实际工作的基础。随着办学规模的不断扩大，对教学质量和人才培养也提出了更高的要求。为了进一步提高数学教学质量，并为后继课程和人才的培养打下坚实的基础，必须采取适当措施，用科学的方法去解决在教学过程中所遇到的各种问题。

目前，由于国内各高校招生规模的不断扩大，学生的数学基础良莠不齐，学生亟需一本能够举一反三、帮助他们理解教材内容的例题及习题类型全面的课后辅导书。为了正确引导学生学习高等数学，从繁复的深浅不一的高等数学复习资料书丛中解放出来，我们认真总结了多年来的教学经验，汲取了众多复习资料的营养，编撰了本书。

书中各种试题的类型齐全，包括选择题、填空题、计算题、证明题、应用题，例题和练习题，内容丰富、典型性强、覆盖面广、有层次，既有基本题，也有综合提高题，例题中有适当的分析过程，有些还给出了一题多解的解题思路。总体内容较为丰富，可最大限度地满足各类层次学生的需要。在本书的编写过程中，我们完全按照教学大纲的基本要求组织和编写各章节的内容，每章附有基础测试题A和技巧性较强的测试题B，并附有答案，书末还附有近几年的硕士研究生数学入学试题。本指导是大学生学习高等数学的一本理想的参考资料，可成为广大同学尤其是对数学学习感到困难的同学的有力帮手，同时也为考研同学提供了部分技巧及综合性强的题目。

本书由华北科技学院刘瑞芹、魏丽侠主编。第一、十二章由魏丽侠编写，第二、三章由刘瑞芹编写，第四、五章由刘艳编写，第六、七章由王涛编写，第八、九章由文小艳编写，第十、十一章由王文祥编写，附录Ⅰ、Ⅱ由杨成、王昕编写。本书由刘金铎教授主审。在此对刘金铎教授及所有参编老师表示衷心感谢。

由于水平有限，书中难免有纰漏与不足，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者

2008 年 7 月

目 录

第一章 函数与极限

I 知识结构图

- 第一章
  - 数列
    - $\varepsilon-N$ 定义
    - 极限的计算
    - 极限的性质：唯一性，有界性，保号性
  - 函数
    - 函数的类型：复合函数，反函数，隐函数，基本初等函数
    - 函数的极限
      - $\varepsilon-\delta$ 定义
      - 四则运算，两个重要极限
      - 无穷大，无穷小
      - 极限存在准则
      - 唯一性，有界性，保号性
    - 函数的性质
      - 奇偶性，单调性，周期性，有界性
      - 连续性
        - 函数的间断点及其类型
        - 初等函数的连续性
        - 闭区间上连续函数的性质

II 疑难问题解答

1. 若数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都发散，则数列$\{x_n+y_n\}$，$\{x_ny_n\}$也发散，对吗？

不对，例如 $x_n=n$，$y_n=-n$，则$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都发散，但$\{x_n+y_n\}$ 收敛.

$x_n=\begin{cases} n，n\text{ 为奇数} \\ 0，n\text{ 为偶数} \end{cases}$，$y_n=\begin{cases} 0，n\text{ 为奇数} \\ n，n\text{ 为偶数} \end{cases}$，那么数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都发散，但$\{x_ny_n\}$收敛.

2. 为什么在极限的定义中，ε 要任意给定？

下面以当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限是 A 来说明这个问题. 因为 ε 是描述函数 $f(x)$与常数 A 的接近程度的量，只有 ε 的任意性（无论它多么小），才能表明 $f(x)$与 A 的无限接近，又“给定”是指在通过 ε 找到 δ 的过程中，ε 是不变的常数. 因为只有 ε 暂时不变，才能通过分析 $|f(x)-A|<\varepsilon$，找到正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

3. 在极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，δ 与 ε 是什么关系？

因为 $f(x)$是 x 的函数，当 x 与 x_0 无限接近时，$f(x)$才能与 A 无限接近，只有 x 与 x_0 接近到一定的程度，才能得证$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，而 δ 正是表述 x 与 x_0 接近程度的量. 一般来说，当 ε 变化时，δ 也变化；ε 愈小，δ 也愈小，但 δ 不是由 ε 而唯一确定的. 因为若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，找到一个 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么对于所有小于 δ 的正数 δ_1，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，仍能得证$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，所以说 δ 不是唯一的，也不必找到一个最大的 δ. 通常，在利用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 时，常

常将$|f(x)-A|$适当放大，以便于通过$|f(x)-A|<\varepsilon$较容易找到δ，这也是证明极限时常用的技巧.

4. 如何掌握不同极限过程中极限的定义？

课本中共讲了 7 种极限过程：$n\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，$x\to\infty$. 所谓极限过程，也就是自变量的变化趋势，如$n\to\infty$是指自变量取正整数而无限增大的情况；$x\to-\infty$是指自变量取负实数而绝对值无限增大的情况；$x\to x_0$ 是指自变量取实数而无限接近 x_0 的情况；其余类似. 虽然自变量的变化过程不同，极限定义的表述略有差别，但它们的本质是相同的，那就是：设 $f(x)$是处在自变量 x 的某个变化过程中的函数，A 是一个常数，若对于任意给定的正数 ε，总存在一个时刻，使得这个时刻以后，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$在这个变化过程中的极限. 如：对于任意给定的正数 ε，极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的时刻是指存在整数 N，当 $n>N$ 时，恒有$|x_n-A|<\varepsilon$；极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的时刻是指存在正数 X，当$|x|>X$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$；极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的时刻是指存在正数δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 掌握了不同极限过程的极限定义的实质，再表述各种极限过程中的极限定义就不难了.

5. 如何掌握用定义证明极限的方法？

在理解了极限定义的基础上，用极限定义验证极限时，要注意推理中的逻辑关系. 去证明时一般用“正推”过程，即“如果…则…”；验证极限时用的是“反推”过程，即“要使…，只要…”. 下面以极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 为例说明证明步骤如下：

(1) 给定 $\varepsilon>0$.

(2) 写出$|f(x)-A|$并整理化简，有时要适当放大，如$|f(x)-A|\leqslant g(x)$，所谓“适当”是指放大后当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$仍能趋于零，也就是放大时 $g(x)$中要保留含有$(x-x_0)$的固式，把其余的与 x 有关的固式适当放大. 为此，常常需要先假设 $0<|x-x_0|<\delta_1$，在此条件下得到 $g(x)$；要使$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，只要 $g(x)<\varepsilon$，从中找出 $\delta_2>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，恒有 $g(x)<\varepsilon$ 成立，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) 结论：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

6. 函数极限与函数值有关系吗？

没关系. 极限是一种自变量变化时函数值的变化趋势，如 $x\to1$ 时，$\dfrac{x^2-1}{x-1}\to2$，但 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处是无意义的.

7. 关于函数的单侧极限，极限及极限不存在的几种情况.

利用极限的定义很容易证明：极限$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\to x_0}}f(x)$存在的充分必要条件是单侧极限$\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\(x\to x_0^-)}}f(x)$和$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to x_0^+)}}f(x)$都相等. 在求函数的极限时，什么情况下需要求单侧极限呢？

(1) 若 x_0 是分段函数的分界点，且在 x_0 的左右两侧函数的表达式不一样，则求分界点 x_0 的极限时一定要先考察点 x_0 的左右极限是否存在，再确定极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在. 例如，

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1\\ 2-x, & x<1\end{cases}$，若求$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，则需要先求左极限$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$及右极限$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$. 但是，并不是所有分段函数在分界点的极限都要求左右极限. 如，若 x_0 是分段函数的分界点，但在 x_0 的左右两侧表达式相同，且 $x\to x_0$ 时，x_0 的左右两侧 $f(x)$的变化趋势也一样，则不必求左右极限，可直接求极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 例如，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，若求$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$，则不必求 $x=0$ 处的左右极限，而直接求极限$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$即可.

(2) 若 $f(x)$在 x_0 的左右两侧表达式相同，但当 $x\to x_0^-$ 及 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$的变化趋势不同，则求极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$时需要考察左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$及右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，再确定极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在. 例如，$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$在 $x=0$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. 于是 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty$，所以需先考察 $x=0$ 处的左右极限，本例显然极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在. 又如 $f(x)=\arctan x$，当 $x\to-\infty$和 $x\to+\infty$时，函数的变化趋势不同，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，所以极限$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在. 类似的例子，如$\lim\limits_{x\to\infty}\arccos x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$ 也都不存在.

(3) 关于函数极限不存在的例子. 常见的大致有以下几种情况：

1) 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}f(x)$不存在是因为单侧极限 $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\(x\to x_0^-)}}f(x)$和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to x_0^+)}}f(x)$至少有一个不存在或者都不存在但不相等. 例子同以上 (1) (2) 中所述.

2) 若在自变量的某个变化过程中，$f(x)$是无穷大量，则在该过程中极限$\lim f(x)$不存在. 如极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，不存在.

3) 如在自变量的某个变化过程中，函数的变化趋势振荡不定导致函数与任何常数 A 都不能永远保持无限接近状态，则函数的极限不存在. 例如极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x^2}$及$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

其中 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2n}, & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$，不存在，都属于这种情况.

8. 函数极限与数列极限的关系的应用举例.

函数极限与数列极限的关系是：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或$\infty$)的充分必要条件是对于任何以 x_0 为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$(或$\infty$). 这里进一步举例说明它的应用.

(1) 利用函数极限求数列的极限. 例如已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1$. 以后讲了求极限的洛必达法则后，会有更多的应用.

(2) 证明函数的极限不存在. 例如，证明极限$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在，取$x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，显然当$n\to\infty$时，$x_n\to0$，$y_n\to0$. 而$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos2n\pi=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}\neq\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{y_n}$，所以极限$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

(3) 证明$f(x)$在区间I上无界. 其常用的方法是：找出数列$\{x_n\}\subset I$，而$\{f(x_n)\}$为无穷大数列. 例如，证明在(0，1]上，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$无界. 取数列$x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，显然$f(x_n)\subset$(0，1]，而$f(x_n)=\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\to\infty\ (n\to\infty)$. 所以在(0，1]上，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$无界.

(4) 证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$. 其常用的方法是：找出一个数列$x_n\to x_0\ (x_n\neq x_0)$，而$\{f(x_n)\}$收敛. 例如，证明当$x\to0^+$时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$不是无穷大. 取$x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，显然当$n\to\infty$时，$x_n\to0^+$，$x_n\neq0$，而$f(x_n)=2n\pi\sin2n\pi=0$. 显然数列$\{f(x_n)\}$收敛于零，故$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$当$x\to0^+$时不是无穷大.

9. 无穷大与无界量有什么区别和联系?

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则根据无穷大的定义，对于任意给定的正数$M$，有$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)|>M$，这表明对于$x_0$的去心$\delta$邻域的一切点$x$，都有$|f(x)|>M$. 设$f(x)$在$x_0$的去心$\delta$邻域无界，是指对于无论多么大的正数$M$，都存在点$x_1$属于该邻域；而$|f(x_1)|>M$，这表明在$x_0$的去心$\delta$邻域里可能出现$|f(x_1)|\leqslant M$的点$x_1$. 对比上述定义得知，在自变量的同一个变化过程中，无穷大量一定是无界量，但无界量不一定是无穷大量. 例如，在(0，1]上，$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$不是无穷大量.

10. 求和、差的极限时，为什么一般不能用等价无穷小代换?

当求两个无穷小之比的极限时，分子分母可以分别用与其等价的无穷小代换. 也就是说代换时，必须将分子和分母的整体分别换成与它们各自等价的无穷小；但若分子（或分母）中的和（或差）中的某几项用与它们分别等价的无穷小作代换，则不能保证代换后的新的分子（或分母）与原来的分子（或分母）是等价无穷小. 例如，求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$时，若将$\tan x$，$\sin x$均换成$x$，则分子为零，显然与$\tan x-\sin x$不等价，所以代换后得极限为零，结果是错误的. 正确的方法是：

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}，$$这说明当$x\to0$时，$\tan x-\sin x$与$\dfrac{1}{2}x^3$是等价的.

在求极限的过程中，乘除中的无穷小因子是可以用与其等价的无穷小代换的，读者可以练习利用极限的运算法则来证明.

11. 关于幂指数函数极限的求法.

所谓幂指数函数是指：形如 $f(x)^{g(x)}$ $[f(x)>0]$的函数. 它的极限一般不能直接用极限的运算法则求出来. 如重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 就是幂指数函数的极限，但是能利用该重要极限来求的幂指数函数的极限是有一定的条件的，那就是它应该是"1^∞"型的且容易化为如下形式：$\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}$，则利用该重要极限 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u=\mathrm{e}$. 对于更一般的幂指数函数的极限，常常利用指数对数恒等式将幂指数函数改写成指数函数的复合函数，即 $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$，再利用有关极限的运算法则求极限. 一般结论：若 A，B 均为常数，$\lim f(x)=A>0$，$\lim g(x)=B$，则 $\lim f(x)^{g(x)}=A^B$.

12. 刚开始学习极限运算时，常常易出现哪些错误?

请看以下几题的做法是否正确? 对于错误的请指出错误的原因并改正.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3}{1-x^3}=\infty-\infty=0.$

解法错误. 原因是：错误的运用了差的极限运算法则.

因为根据差的运算法则，必须两个函数的极限都存在才能运用，而这里极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x}=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3}{1-x^3}=\infty$，都不存在. 所以不能用差的极限运算法则，况且 ∞ 不是数，也不能当数来运算. 正确的解法是：

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0.$

解法错误. 原因是：错误的运用了加法的极限运算法则.

因为加法的运算法则只适用于有限个具有极限的函数之和的情况，而这里当 $n\to\infty$ 时，不是有限项之和，因此不能应用加法的极限运算法则.

正确的解法是：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\ \lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=0.$

解法错误. 原因是：错误的运用了乘积的极限运算法则. 因为乘积的极限运算法则中，要求每个因子的极限都存在，而这里极限 $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以不能用乘积的极限运算法则. 正确的解法是：

因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，即 x 为 $x\to0$ 时的无穷小，且 $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$，即 $\cos\dfrac{1}{x}$ 有界. 根据有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小的性质知：$\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=0.$

解法错误. 原因是：错误的运用了重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 注意：当 $x\to0$ 时$\dfrac{1}{x}\to\infty$，这里$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\neq1$. 由此可见，当利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$求极限时，不能形式地看函数式，化为$\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}$就认为它的极限一定是1. 要注意在该极限过程中 $\varphi(x)$的变化趋势. 若 $\varphi(x)\to0$ 不成立，则不能用该重要极限. 从本质上来说，重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$是"$\dfrac{0}{0}$"型的，若不是"$\dfrac{0}{0}$"型的极限，一定不能用该重要极限求解. 该题正确的解法是：利用有界函数与无穷小之积仍是无穷小的性质求解，即因为 $x\to0$ 时，x^2 是无穷小，而 $\sin\dfrac{1}{x}$有界. 于是$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

13. 任何两个无穷小都可以比吗?

不能. 例如，当 $x\to+\infty$时 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$都是无穷小量；但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在且不为无穷大，故当 $x\to+\infty$时，$f(x)$和 $g(x)$不能比较.

14. 关于无穷大有哪些运算法则?

利用无穷大的定义，不难证明无穷大有以下运算法则：

(1) 两个同号无穷大的和还是同号无穷大；

(2) 无穷大与有界变量的和还是无穷大；

(3) 无穷大与有非零极限的变量之积还是无穷大.

15. 如何确定一个无穷小（关于 x）的阶?

(1) 利用关于无穷小阶的定义，要找一个大于零的数 K，使得当 $x\to0$ 时，无穷小 $\alpha(x)$与 x^K 之比的极限存在不为零，则 $\alpha(x)$是关于 x 的 K 阶无穷小.

(2) 利用无穷小的运算性质. 设当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)$与 $\beta(x)$分别是 x 的 n 阶和 m 阶无穷小，又$\lim\limits_{x\to0}h(x)=A\neq0$，则：

1) $\alpha(x)h(x)$是 x 的 n 阶无穷小；

2) $\alpha(x)\beta(x)$是 x 的 $n+m$ 阶无穷小；

3) 当 $n>m$ 时，$\alpha(x)+\beta(x)$是 x 的 m 阶无穷小，$\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$是 x 的 $n-m$ 阶无穷小.

16. 连续函数与有间断点的函数复合，是否还有间断点?

不一定的. 如设 $f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$f[g(x)]=1$，$g[f(x)]=1$，$g^2(x)=1$，可见，连续函数与有间断点的函数复合时，间断点是可以消除的. 就是有间断点的函数

复合时，也可以变连续，如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 2, & x<0\end{cases}$，$f[f(x)]=1$.

17. 课本中关于初等函数的连续性，为什么不说“初等函数在其定义域内都是连续的”而说“初等函数在其定义区间内都是连续的”？

因为初等函数的定义域可能包含孤立点. 如初等函数 $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$，它的定义域 $D=\left\{x \,\middle|\, x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}，k\text{ 为整数}\right\}$中每一个点都是孤立点，函数在每个孤立点的邻域内不是处处有定义. 但是我们的函数在一点连续的定义中要求函数在该点的某一邻域有定义，因此不能说“初等函数在其定义域内连续”，而应该正确的叙述为“初等函数在其定义区间内都是连续的”.

Ⅲ　典型例题分析

一、映射与函数

【例 1】 已知：$A=\left\{0，1，\dfrac{1}{2}，\cdots，\dfrac{1}{n}，\cdots\right\}$，$B=\left\{1，\dfrac{1}{2}，\cdots，\dfrac{1}{n}，\cdots\right\}$，求：$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$B-A$.

解 $A\cup B=A$，$A\cap B=B$，$A-B=\{0\}$，$B-A=\varphi$.

【例 2】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

分析 上述两个函数均为初等函数，初等函数的定义域是使函数有意义的自变量的变化范围.

解 (1) 定义域为$[-1，0)\cup(0，1]$；(2) 定义域为 $R=(-\infty，+\infty)$.

【例 3】 设 $y=f(x)$的定义域为 $[1，2]$，求 $f(1-\ln x)$ 的定义域.

解 定义域为$\left[\dfrac{1}{e}，1\right]$.

【例 4】 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x(1+\sqrt{1+x^2})$，$x>0$. 求 $f(x)$.

解 $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$，$x>0$.

【例 5】 设 $f(x)$的定义域为 $[0，1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域.

解 由题意知，要使 $f(x+a)+f(x-a)$有意义，只要

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

由于 $a=\max\{-a，a\}$，$1-a=\min\{1-a，1+a\}$，当 $a<1-a$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为 $[a，1-a]$；当 $a=1-a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$时，其定义域为$\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$；当 $a>1-a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$时，其定义域为空集.

注：求复合函数的定义域时，内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内.

【例 6】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$，$g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1\end{cases}$.

【例 7】 判断函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0\\ 1+x, & x>0\end{cases}$的奇偶性.

解 由于 $f(x)=1+|x|$，所以是偶函数.

【例 8】 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(3)$，$f(0)$，$f(-0.5)$.

解 $f(3)=2$，$f(0)=2$，$f(-0.5)=2^{-0.5}=2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

【例 9】 设 $f(x)$为定义在$(-L, L)$内的奇函数，若 $f(x)$在$(0, L)$内单调增加，证明 $f(x)$ 在$(-L, 0)$内也单调增加.

证 设 x_1，x_2 为满足$-L<x_1\leqslant x_2<0$ 的两个实数，则 $L>-x_1\geqslant -x_2>0$，因 $f(x)$在$(0, L)$内单调增加，故 $f(-x_2)\leqslant f(-x_1)$，又因 $f(x)$是$(-L, L)$内的奇函数，从而 $-f(x_2)\leqslant -f(x_1)$，即 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，因此 $f(x)$在$(-L, 0)$内也单调增加.

【例 10】 指出下列初等函数由哪些基本初等函数复合而成？

(1) $y=e^{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2}$； (2) $y=\arccos\left(\sqrt{\ln\ (x^2-1)}\right)$.

解 (1) 由 $y=e^u$，$u=t^2$，$t=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$复合而成；

(2) 由 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{t}$，$t=\ln v$，$v=x^2-1$ 复合而成.

【例 11】 设映射 f：$A\rightarrow B$ 是可逆的，证明：它的逆映射是唯一的.

证 设 g_1，g_2 都是 f 的逆映射，且 $g_1=g_2$，则存在 $y\in B$，使 $g_1(y)\neq g_2(y)$.

由 $f^{-1}[g_2(y)]=y$ 得，$g_1\{f^{-1}[g_2(y)]\}=g_1(y)$，又因 f 与 g_2 互为逆映射，所以 $g_1\{f^{-1}[g_2(y)]\}=g_2(y)$，故 $g_1(y)=g_2(y)$，与假设矛盾，命题得证.

【例 12】 下列函数是否相等，为什么？

(1) $y=\dfrac{x^2}{x}$与 $y=x$； (2) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=\sqrt{x^2}$与 $y=|x|$； (4) $y=x^2+1$ 与 $u=t^2+1$.

解 (1)、(2) 不等，因定义域不同，(3)、(4) 相等，因定义域相同.

【例 13】 下列哪些函数是初等函数，哪些不是？

(1) $y=2^{-x^2}$； (2) $y=\sqrt{x}+\lg\ (\sin x)$； (3) $y=[x]$； (4) $y=\begin{cases}0, & x\geqslant 0\\ 1, & x<0\end{cases}$.

解 (1)、(2) 是；(3)、(4) 不是.

二、数列的极限

【例 1】 用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=1$.

分析 因对 $\forall\varepsilon>0$，若要 $\left|\dfrac{n-1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可.

证 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{n-1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=1$ 成立.

【例 2】 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\cdot(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)$（$k$ 为常数）；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\cdot(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\times 2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=2$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}$，因 $\left|-\dfrac{2}{3}\right|<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n^{k-1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{k-2}}+\dfrac{1}{n^{k-1}}\right)=\begin{cases}0, & k>2\\ \dfrac{1}{2}, & k=2.\\ \infty, & k<2\end{cases}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times4}+\dfrac{1}{4\times7}+\dfrac{1}{7\times10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$
$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{1}{3}$.

(6) 因为 $1\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\leqslant1+\dfrac{1}{n}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$，故由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$.

【例 3】 计算：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+\cdots+20^n}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解 (1) 因为 $20=\sqrt[n]{20^n}\leqslant\sqrt[n]{2^n+4^n+\cdots+20^n}\leqslant\sqrt[n]{10\times20^n}\leqslant\sqrt[n]{10}\times20$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}\times20=20$，由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+\cdots+20^n}=20$.

(2) $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e(n\to\infty)$. 另一方面，当 $n>1$ 时有

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geqslant\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}$$

取 $x_n=\frac{n^2}{n-1}$，$n=2, 3, \cdots$，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

于是，由数列极限的夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=e.$$

三、极限与连续

1. 求极限的常用方法：

(1) 用定义；

(2) 代入法（对连续函数，可用因式分解或有理化消除零因子）；

(3) 变量替换法；

(4) 两个重要极限法；

(5) 用夹逼准则和单调有界准则；

(6) 等价无穷小量代换.

常用的等价无穷小有：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；$\ln(1+x)\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$e^x-1\sim x$；$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$；$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$.

2. 函数的连续性主要用连续函数的定义来确定某个点是否为间断点，用函数的左右极限确定间断点的类型.

【例 1】 用定义证明：

(1) 当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$；

(2) 当 $0<a<1$ 时，(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$；(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$.

(1) **分析** 对任给 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），为使 $|a^x-1|<\varepsilon$，即 $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$，只要 $-\log_a(1+\varepsilon)<\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon)$，即 $|x-0|<\log_a(1+\varepsilon)$.

证 对任给 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），取 $\delta=\log_a(1+\varepsilon)$，则当 $|x-0|<\log_a(1+\varepsilon)$ 时，有 $|a^x-1|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$.

(2) **分析** 对任给 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），要使 $a^x<\varepsilon$，只要 $x<\log_a\varepsilon$ 即可.

证 对任给 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），取 $\delta=\log_a\varepsilon$，令 $M=\log_a G$，则当 $|x-0|=x<\log_a\varepsilon$ 时，有 $|a^x-0|=a^x<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=0$.

同理可证：当 $a>1$ 时，(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$；(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$.

【例 2】 用定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{2}{3}$.

(1) **分析**　由于当 $x\neq 2$ 时，$|f(x)-4|=\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x+2-4|=|x-2|$，故对给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$ 即可.

证　对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有 $|f(x)-4|<\varepsilon$，这就证明了 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

(2) **分析**　当 $x\neq 1$ 时有 $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|=\left|\dfrac{x+1}{2x+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{|x-1|}{3|2x+1|}$，若限制 x 于 $0<|x-1|<1$（此时 $x>0$），则 $|2x+1|>1$. 于是，对任给的 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\min\{3\varepsilon,\ 1\}$即可.

证　对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{3\varepsilon,\ 1\}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|<\dfrac{|x-1|}{3}<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$.

【例 3】　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\right]$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x+1)}{x-3}=\dfrac{-2\times(-2+1)}{-2-3}$

$$=-\frac{2}{5}.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

(3) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

(4) $$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to -1}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1.$$

(5) 设 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\right]=\lim\limits_{t\to +\infty}(\sqrt{t+\sqrt{t}}-\sqrt{t-\sqrt{t}})$