普通高等教育基础课规划教材

高等数学同步练习（下册）

◆ 米翠兰 何亚丽 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等数学同步练习

（下　册）

主编　米翠兰　何亚丽
参编　马醒花　孟祥云　梁彦冰　李　颖
主审　刘春凤

机械工业出版社

本书根据《高等数学教学大纲》要求的内容，从微分学、积分学、空间解析几何、微分方程等方面精选了许多典型习题。书中习题覆盖面广，综合性强，重点突出，难易程度适中，适合理工院校学生练习使用，也可作为报考研究生人员的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步练习．下册/米翠兰，何亚丽主编．
—北京：机械工业出版社，2005.1
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 7－111－15561－0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①米…②何…　Ⅲ．高等数学－高等学校－习题　Ⅳ．013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 114365 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：李永联　版式设计：张世琴　责任校对：魏俊云
封面设计：饶　薇　责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2005 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷
787mm × 1092mm 1/16·10 印张·250 千字
定价：16.00 元

前　言

本书是根据国家教育部颁发的《高等数学教学大纲》要求的内容编写的。作者依据大纲和多年的教学经验，应广大学生的强烈要求编写了本书。可以说，这是一本掌握高等数学知识的必备之书。

本书包括函数与极限、导数和微分、导数的应用、不定积分和定积分、定积分的应用、空间解析几何、多元微分学、多元积分、级数、微分方程等内容。

本书具有如下特点：

(1) 代表性强。给出的习题针对《高等数学教学大纲》要求的重要概念、公式、定理及基本算法精选而出，且覆盖面广、突出了《高等数学》教材中的重点和难点。

(2) 典型性强。针对《高等数学教学大纲》要求，注意对基本概念、公式、定理的准确理解、表述和应用。每节中设置典型题型，分为“单选题”、“填空题”、“证明及计算题”等。带 * 号的题可供学生参考。

(3) 同步检测。每一章都有三份自测题，用以检验学生是否掌握了本章的基本概念、基本定理和公式，以及能否准确地应用。

(4) 本书的形式为学生的同步练习本，既规范又便于任课教师批改，同时既减轻了学生抄作业的负担，也便于保留。

本书还可供考研的学生学习和参考。

本书附录为河北理工大学2000年～2003年高等数学期末试题，以便学生能更好地复习和掌握要点，把握考试方向，做到有的放矢。

本书由刘春凤教授主审，参加编写的作者有：梁彦冰（第八章）、米翠兰（第九章）、何亚丽（第十章）、孟祥云（第十一章）、马醒花（第十二章）等。李颖对习题进行了演算。在本书的编写过程中，河北理工大学数学教研室的教师提出了大量宝贵意见，编者在此表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，加上时间仓促，书中难免有疏漏与不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2004年9月

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的基本概念

姓名：________班级：________学号：________

一、选择题

1. 函数 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 的定义域为 B.

(A) $x>0,\ y>0$　　(B) $x\geqslant\sqrt{y},\ y\geqslant0$

(C) $x>\sqrt{y},\ y>0$　　(D) $x\geqslant0,\ y\geqslant0$

?2. 二元函数 $z=\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}}$ 的定义域是 ~~A~~ B.

$\sin\theta=1$　$\ln 1$　$x=1$

(A) $1\leqslant x^2+y^2\leqslant4$　　(B) $1<x^2+y^2\leqslant4$

(C) $1\leqslant x^2+y^2<4$　　(D) $1<x^2+y^2<4$

?3. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 是 B.

(A) 存在　(B) 不存在　(C) 0　(D) 不一定存在

二、填空题

1. 函数 $z=\ln|x-y|$ 的间断点为 在 $x=y$ 上的点

2. 函数 $z=\ln(y^2-2x+1)$ 的定义域 $\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$

三、求下列各极限

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(xy)}{x}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y=0$

【解】

2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

【解】

$\frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$=\frac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}$

P63　6(4)

3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

【解】

四、设 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$x\neq0$，如果当 $x=1$ 时，$z=\sqrt{1+y^2}$，试确定 f 及 z.

【解】

$y=1$时 $z=xf(\frac{1}{x})=z$

$y=x=1$ $z=xf(1)$ $\sqrt{2}=f(1)$

$y=0$ $z=xf(0)$

当$x=1$时 $z=f(y)$ $=\sqrt{1+y^2}$

$f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$z=x\cdot\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$ → 化简后 $x\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|}=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

五、证明下列极限不存在

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x+y}{x-y}$

【证明】

$y=kx$ $\dfrac{kx+x}{x-kx}=\dfrac{k+1}{k-1}$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$

【证明】

$y=kx$ $y=k^2x$

$y^2=(kx)^2=k^2x^2$

$\dfrac{x^4+k^2x^2}{x^2+k^4x^4}=\dfrac{x^2+k^2}{1+k^4x^2}=k^2=A$

$\dfrac{x^4+k^4x^2}{x^2+k^8}$

第二节 偏 导 数

姓名：________ 班级：________ 学号：________

一、选择题

1. 函数 $z(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在（0，0）处 __D__.

(A) 连续但不可导　　(B) 不连续但可导

(C) 可导且连续　　(D) 既不连续也不可导

2. 设 $z=2x^2+3xy-y^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ __B__.

$\frac{\partial z}{\partial x}=4x+3y$　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3$

(A) 6　(B) 3　(C) −2　(D) 2

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，则 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __C__.

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot(-\frac{1}{x^2})\,x^2$　$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot(-\frac{1}{y^2})\,y^2$

(A) $2x$　(B) $2y$　(C) $2z$　(D) 0

二、填空题

1. 曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ 上的点(2，4，5)处的切线对于 x 轴的倾角为 __45__.

$z_x=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}=1$

2. 设 $z=e^{xy}(x+y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ __$e^{xy}\cdot y(x+y)+e^{xy}$__，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __$e^{xy}\cdot y(x+y)+e^{xy}$__.

3. 设 $u=x^{y^z}$，则 $u_x(3,2,2)=$ __108__.

$u_x=y^z\cdot x^{y^z-1}$

$=2^2\cdot 3^{2^2-1}=4\cdot 3^3=27\times 4$

三、设 $z=(1+xy)^{x+y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解】

$\frac{\partial z}{\partial x}=(x+y)(1+xy)^{x+y-1}\cdot y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)(1+xy)^{x+y-1}\cdot x$　$(1+xy)^{x+y}\ln(1+xy)\frac{xy+1}{1+xy}$

四、设 $z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

【解】

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}+\frac{-y}{x^2}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}$　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{y^3}x$

五、设 $z = x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

【解】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy}$$

$$= \ln(xy) + 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

X $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \cancel{x^2} \quad \frac{1}{x}$$

六、验证：$y = e^{-kn^2 t}\sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

【证明】

$$\because \frac{\partial y}{\partial t} = e^{-kn^2 t} \cdot (-kn^2)\sin nx$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{-kn^2 t}(\cos nx) \cdot n$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^{-kn^2 t}(-\sin nx) \cdot n^2$$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

第三节　全　微　分

姓名：________ 班级：________ 学号：________

一、选择题

1. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，且两个偏导数 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点可微的 ____B____.

(A) 充分条件，但不是必要条件

(B) 必要条件，但不是充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不是充分条件，又不是必要条件

2. 对于二元函数，下列有关偏导数与全微分关系中正确的命题是 ____B____.

(A) 偏导数不连续，则全微分必不存在

(B) 偏导数连续，则全微分必存在

(C) 全微分存在，则偏导数必连续

(D) 全微分存在，则偏导数不一定存在

$\frac{\partial z}{\partial x} = y\sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$

3. 设 $f(x, y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$，则在原点 $(0, 0)$，$f(x, y)$ 是 ____B____.

(A) 偏导数不存在　　(B) 不可微

(C) 偏导数存在且连续　　(D) 可微

二、填空题

1. 设 $z = e^{\frac{y}{x}}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ $e^{\frac{y}{x}}\cdot(-\frac{y}{x^2})$，$\frac{\partial z}{\partial y} =$ $e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}$，$dz = e^{\frac{y}{x}}(-\frac{y}{x^2})dx + e^{\frac{y}{x}}\frac{1}{x}dy$.

2. 设 $z = f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$，则 $df(1, 2) =$ $\frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$

3. 设 $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，则 $df(1, 1, 1) =$ $dx - dy$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}\cdot\frac{1}{y} = 1$，$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -1$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right) = 0$

三、求下列函数的全微分 dz.

1. $z = \tan\frac{y^2}{x}$

【解】

$\frac{\partial z}{\partial x} = \sec^2\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \sec^2\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\frac{2y}{x}$

$dz = \sec^2\left(\frac{y^2}{x}\right)\left[\frac{2y}{x}dy - \frac{y^2}{x^2}dx\right]$

2. $z=e^{\frac{y}{x}}$

【解】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{-y}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$dz=e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{-y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)$$

四、求 $u=(x^2+yz^3)^3$ 的全微分 du.

【解】

$$du=3(x^2+yz^3)^2(2xdx+z^3dy+3yz^2dz)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3(x^2+yz^3)^2\cdot 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^2+yz^3)^2\cdot z^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=3(x^2+yz^3)^2\cdot 3yz^2$$

第四节　多元复合函数的求导法则

姓名：________ 班级：________ 学号：________

一、选择题

1. 设 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ C .

$x\frac{\partial z}{\partial x}=f'\frac{-y}{x^2}x$　$\frac{\partial z}{\partial y}y=f'\frac{1}{x}y$

(A) $\frac{y}{x}f'+\frac{x}{y}f'$　(B) $\frac{y}{x}f'+\frac{1}{x}f'$　(C) 0　(D) 1

$f'\frac{-y}{x}+f'\frac{y}{x}$

2. 设 $z=3^{xy}$，而 $x=f(y)$，且 f 可导，则 $\frac{dz}{dy}=$ B .

(A) $3^{xy}[y+xf'(y)]\ln3$　$z=3^{f(y)y}$

(B) $3^{xy}[x+yf'(y)]\ln3$　$=3^{f(y)y}\cdot\ln3\cdot[f(y)+yf'(y)]$

(C) $\frac{3^{xy}}{\ln3}[x+yf'(y)]$

(D) $z_xf'(y)+z_y-3^{xy}[x+yf'(y)]\ln3$

3. 设 $z=f(x,v)$，$v=v(x,y)$，其中 f，v 具有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ ~~A~~ C .

$(\frac{\partial z}{\partial y})'=f_u\frac{\partial u}{\partial y}=(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y})'$

$=\frac{\partial f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y^2}$

(A) $\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$　(B) $\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$　(D) $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$?

二、填空题

1. 设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y$，$v=x-y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ $4(x+y)$

$z=(x+y)^2+(x-y)^2$

$\frac{\partial z}{\partial x}=2u+2v$　$\frac{\partial z}{\partial y}=2u-2v$

2. 设 $z=e^{xy}$，而 $y=\varphi(x)$ 且 $\varphi(x)$ 为可导函数，则 $\frac{dz}{dx}=$ $e^{xy}(y+xy_x)$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x))$　$e^{x\varphi(x)}$

3. 设 $z=xf\left(\frac{y^2}{x}\right)$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $xf_y\cdot\frac{2y}{x}=2yf_y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ~~$2yf_{yx}$~~ .

$-\frac{2y^3}{x^2}f''$

三、设 $u=f(r,s,t)$，而 $r=x$，$s=xy$，$t=xyz$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

x　xy　xyz

$2yf_{yx}\cdot\frac{-y^2}{x^2}$

【解】

$\frac{\partial u}{\partial x}=f_r+f_s\cdot y+f_t\cdot zy$

$\frac{\partial u}{\partial y}=f_s\cdot x+f_t\cdot xz$

$\frac{\partial u}{\partial z}=f_t\cdot xy$

四、设 $u=\arctan(xy)$，$x=s+2t$，$y=3s-t$，求$\frac{\partial u}{\partial s}$，$\frac{\partial u}{\partial t}$.

【解】

$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{y+3x}{1+(xy)^2}$ $\quad$ $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{2y-x}{1+(xy)^2}$

五、设 $z=\frac{y}{x}$，而 $x=e^t$，$y=1-e^{2t}$，求$\frac{dz}{dt}$.

【解】

$z=\frac{1-e^{2t}}{e^t}=\frac{1}{e^t}-e^t$

$\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{e^{2t}}-e^t$

$=-\frac{y}{x^2}e^t-\frac{1}{x}e^{2t}$

$\frac{1-e^{2t}}{-e^{2t}}\cdot e^t-\frac{2}{e^t}\cdot e^{2t}$

$=\frac{e^{2t}-1}{e^t}-2e^t=\frac{-1}{e^t}-e^t$

六、设 $z=f(u,v,w)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x)$，$w=\omega(x)$，其中 $z=f(u,v,w)$具有连续的一阶偏导数，φ，ψ，ω 均可导，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\varphi_x+f_v\cdot\psi_x+f_w W_x$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_u\varphi_y$

注意格式!!正确应是

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\varphi_x(x,y)+f_v\cdot\psi'(x)+f_w W'(x)$

区别!!!!!

七、设 $z=\arctan\frac{u}{v}$，而 $u=x+y$，$v=x-y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{uv-vu}{v^2}}{1+(\frac{u}{v})^2}=\frac{\frac{v-u}{v^2}}{1+(\frac{u}{v})^2}$ $\quad$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{v+u}{v^2}}{1+(\frac{u}{v})^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{2v}{v^2}}{1+(\frac{u}{v})^2}$

$=\frac{2}{v+\frac{u^2}{v}}=\frac{2}{x-y+\frac{(x+y)^2}{x-y}}$

一定要写成这样！全微

八、设 $z=f(u,v)$，$u=xy^2$，$v=x^2y$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解】

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot y^2+f_v\cdot 2xy$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_u\cdot 2xy+f_v\cdot x^2$

$\frac{\partial(f_u\cdot y^2+f_v 2xy)}{\partial y}=\frac{\partial(f_u\cdot y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(f_v\cdot 2xy)}{\partial y}$

$=2y\cdot f_u+y^2f_{uu}+2xf_v+2xyf_{vv}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf_1'+y^2f_{11}''+2xf_2'+2xyf_{22}'$

$\to 2x^3yf_{uv}''+2xy^3f_{uu}''+4x^3yf_{uv}+x^4f_{vv}''$

九、设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解】

错在此~~!!

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x\cdot 2x$

$=f_x(x^2+y^2)2x$

f_x

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_x+4x^2f_{xx}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xf_{xy}\cdot y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y\cdot 2y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f_y+4y^2f_{yy}$

十、设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，验证：$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

【证明】

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-f_x\cdot 2x}{f^2(x^2-y^2)}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(x^2-y^2)+f_y\,2y}{f^2(x^2-y^2)}$

$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2f_x}{f^2(x^2-y^2)}$

$\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(x^2-y^2)+f_y\,2y}{y\,f^2(x^2-y^2)}=\frac{z}{y^2}+\frac{2f_y}{f^2(x^2-y^2)}$

?

$\frac{2(f_y-f_x)}{f^2(x^2-y^2)}=0?$

第五节　隐函数的求导公式

姓名：________ 班级：________ 学号：________

$x^{-1}-y^{-1}-z^{-1}$

一、选择题

1. 函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}$ 所确定，其中 F 为可微函数，则 $x^2z_x+y^2z_y=$ ________ B.

(A) $\frac{z^2}{1+F_x}(F_x-F_y)$　　(B) $\frac{z^2}{1+F_x}F_x-\frac{z^2}{1+F_y}F_y$

(C) $\frac{z^2}{1+F_y}(F_x-F_y)$　　(D) 0

2. 设 $e^z-xyz=0$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ____C____.

(A) $\frac{2y^2ze^z-2xy^3z}{(e^z-xy)^3}$

(B) $\frac{2y^2ze^z-2xy^3z}{(e^z-xy)^2}$

(C) $\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$

(D) $\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^2}$

$e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(e^z-xy)-yz\cdot(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y)}{(e^z-xy)^2}$

$y^2z(2e^z-2xy-ze^z)$

二、填空题

1. 设 $z^x=y^z$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\frac{\ln z}{\ln y-\frac{x}{z}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\frac{\frac{z}{y}}{\frac{x}{z}-\ln y}$.

2. 设 $e^{-xy}-2z+e^{-z}=0$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\frac{-ye^{-xy}}{2+e^{-z}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ $=$ $\frac{-xe^{-xy}}{2+e^{-z}}$.

3. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx}=$ $\frac{x+y}{x-y}$.

三、设 $u=f(x,\ z)$，而 $z(x,\ y)$ 是由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 所确定的函数，求 du.

【解】

$z(x,y)=x+y\varphi(z)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=1+y\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial x}(1-y\frac{\partial\varphi}{\partial z})=1$　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$

$\frac{du}{dx}=f_x+f_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

$du=f_xdx+f_z\cdot\frac{dx}{1-y\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$

四、设$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$，求$\dfrac{dx}{dz}$，$\dfrac{dy}{dz}$.

【解】

$x=F(z)\quad y=f(z)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}+1=0 \\ 2x\cdot\dfrac{dx}{dz}+2y\cdot\dfrac{dy}{dz}+2z=0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -z & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}}=\frac{-z+y}{x-y}=\frac{y-z}{x-y}\qquad \frac{dy}{dz}=-\frac{-x+z}{x-y}=\frac{x-z}{x-y}$$

五、设$x+y+z=e^z$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】

$1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$1=(e^z-1)\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{e^z-1}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-(e^z-1)\cdot e^z\frac{\partial z}{\partial x}}{(e^z-1)^2}=\frac{-e^z\cdot\frac{1}{e^z-1}}{e^z-1}=\frac{-e^z}{(e^z-1)^2}$$

六、已知$z=z(x,y)$由方程$F(x^2-y^2,y^2-z^2)=0$确定，F为任意可微函数，求证：$yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+zx\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

【证明】

$x^2-y^2=u\qquad F(u,v)=0$

$y^2-z^2(x,y)=v$

$F_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\qquad F_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+F_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$

$F_u\cdot 2x+F_v(-2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x})=0\qquad \dfrac{\partial v}{\partial y}=2y-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$xF_u-z\cdot F_v\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\qquad -2y\cdot F_u+F_v\cdot(2y-2z\dfrac{\partial z}{\partial y})=0$

$xF_u=zF_v\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\qquad -yF_u+yF_v-zF_v\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{xF_u}{zF_v}\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y(F_v-F_u)}{zF_v}$

$$yz\cdot\frac{xF_u}{zF_v}+zx\cdot\frac{y(F_v-F_u)}{zF_v}=\frac{xyF_u+xyF_v-xyF_u}{F_v}=xy$$