1987-1997

研究生入学考试数学试题选解

（概率论与数理统计）

主编：欧维义 潘伟 黎英

YAN JIU SHENG RU XUE KAO SHI SHU XUE SHI TI XUAN JIE

吉林大学出版社

研究生入学考试数学试题选解

（概率论与数理统计）

（1987～1997）

欧维义 潘 伟 黎 英

吉 林 大 学 出 版 社

研究生入学考试数学试题选解

欧维义　潘　伟　黎　英　主编

责任编辑、责任校对：卢喜观　　封面设计：孙　群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行

（长春市东中华路37号）　　长春市东方印刷厂印刷

开本：850×1168毫米　1/32　　1997年8月第1版

印张：8　　1997年8月第1次印刷

字数：196千字　　印数：1—5000册

I SBN 7-5601-2048-2/O・224　　定价：12.00元

内 容 提 要

本书的主要内容是选解1987年—1997年全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学试题一、数学试题三和数学试题四中包含的概率论与数理统计试题。这些试题比较准确、全面地体现了国家对工学、经济学硕士考生在概率论与数理统计方面的要求，同时由于试题新颖、灵活，类型多样，体现了课程的精髓、思维特点并包括了解题的诸多技巧。本书对参加研究生数学考试的应试生和正在学习该课程的广大读者而言，能起到把握课程重点，扩大视野，启迪思维，提高能力，扩展学习深度和广度的效果，对考试和学习具有导向功能和指导意义。

前　言

对于工科和经济类的多数学生而言，概率论和数理统计是他们最难学的数学课程，难就难在“解题没思路，一道题半天下不了手”.

1997 年国家教委在关于研究生入学数学考试调整中，一方面扩大了必考概率论与数理统计内容的考生范围（包括调整前的 1—5 类中的 1、2、4、5 类），同时还增加了概率论与数理统计在试题中的份量（1 类占 20％，3、4 类占 25％）.

本书作者在 1994 年出版《研究生入学考试数学试题选解》后，几年来不断收到读者和从事数学教学同行的来信，热切希望作者编写概率论与数理统计和线性代数部分的试题选解.现在献给读者的是概率论与数理统计试题选解，感谢读者的促进和厚爱.

本书内容由考研必备的基本知识、题型精析、试题选解和习题四部分组成，书后附有答案。最后附录摘录了国家教委 1997 年关于全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲中概率论和数理统计方面的要求.

编　者

1997 年 4 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

内　容　提　要
● 随机事件的概念、相互关系及其运算
● 概率的公理化定义及其性质
● 古典概型及其概率公式
● 条件概率、乘法定理，全概率公式，贝叶斯公式
● 相互独立的随机事件

§1　随机事件及其概率

1.1　随机试验与样本空间

设 E 为一试验，如果 E 满足以下条件：

1. 试验可以在相同的条件下重复地进行；

2. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则称 E 是一个随机试验(简称试验).

设 E 为一随机试验. 我们将试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间(记为 S 或 Ω)，样本空间的元素(即 E 的每个结果)称为样本点.

1.2　随机事件、事件间的关系及其运算

随机事件、基本事件

设 E 为一随机试验，称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件(简称事件，记为 $A,B,C,\cdots$). 由一个样本点组成的单点集，称为基本事件，记为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$.

在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，

称这一事件发生.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

事件间的关系

(1) 若 $A \subset B$，则称事件 B 包含事件 A. 这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记成 $A=B$.

(2) 事件 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件. 当且仅当 A,B 中至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生. $A \cup B$ 也记作 $A+B$.

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

(3) 事件 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件. 当且仅当 A,B 同时发生，事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记作 AB.

称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

(4) 事件 $A-B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件. 当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A-B$ 发生.

(5) 若 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的. 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

(6) 若 $A \cup B=S$ 且 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件. 也称事件 A 与事件 B 互为对立事件. 这指的是对每次试验而言，事件 A,B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$. $\overline{A}=S-A$.

事件的运算

设 A,B,C 为三个事件，则有：

交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

德·摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

1.3　概率的公理化定义及其性质

概率的公理化定义

设 E 为一随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$. 如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件：

(1) 对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) $P(S)=1$；

(3) 概率的可列可加性成立. 即若 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件：

$$A_iA_j=\varnothing \qquad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$$

有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

概率的基本性质

性质 1　不可能事件的概率为 0，即

$$P(\varnothing)=0$$

性质 2　概率具有有限可加性. 即若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{u=1}^{n}P(A_k)$$

性质 3　设 A,B 为两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$
$$P(A)\leqslant P(B)$$

性质 4　对于任一事件 A,有
$$P(A)\leqslant 1$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 5(概率的加法公式)　对于任意事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 有
$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$
$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)+P(A_1A_2A_3)$$
$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=0}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

1.4　条件概率与乘法定理

条件概率

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称
$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$
为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

条件概率 $P(\cdot|A)$符合概率定义中的三个条件:

(1) 对于每一事件 B,有 $P(B|A)\geqslant 0$;

(2) $P(S|A)=1$;

(3) 设 $B_1,B_2,\cdots$是两两不相容的事件,则有
$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k|A)=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k|A)$$
因而概率的基本性质都适用于条件概率.例如,对于任意事件 B_1,B_2,有

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$$

乘法定理

(1) 设 A,B 为事件,且 $P(A)>0$,则有

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

(2) 设 A,B,C 为事件,且 $P(AB)>0$,则有

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

1.5　事件的独立性及其性质

事件的独立性

设 A,B 是两事件,如果有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A,B 为相互独立的事件.

设 A,B,C 是三事件,如果有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A,B,C 为相互独立的事件.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,如果对于任意 $k(1<k\leqslant n)$,任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件.

独立性的性质

(1) 若事件 A 与事件 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(2) 若 $P(A)>0,P(B)>0$,则 A,B 相互独立,与 A,B 互不相容不能同时成立.

(3) 设 A,B 是两事件，且 $P(A)>0$. 则 A,B 相互独立的充要条件是

$$P(B|A)=P(B)$$

1.6 基本公式

等可能概型（古典概型）

如果试验 E 具有性质：

(1) 试验的样本空间的元素只有有限个；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

则称 E 为**等可能概型**，也称为**古典概型**.

设 E 为一等可能概型. E 的样本空间 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. A 为 E 的一事件. 若 A 包含 m 个基本事件，则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}=\frac{m}{n}$$

全概率公式和贝叶斯公式

定义 设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件. 若

(1) $B_iB_j=\varnothing \qquad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$；

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.

全概率公式　设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(A|B_k)P(B_k)$$

贝叶斯(Bayes)公式　在全概率公式的条件下，且 $P(A)>0$，则有

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

1.7 概率计算中的加法原理与乘法原理

加法原理　做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方

法，…，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法. 那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

乘法原理　做一件事，需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，…. 做第 n 步有 m_n 种不同的方法. 那么完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法.

排列种数计算公式

选排列　$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

全排列　$P_n = A_n^n = n!$；　　可重复排列　$N = n^m$

组合种数计算公式

1. 从 n 个元素中取 r 个元素组合总数为

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

2. 若要把 n 个不同元素分成 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 组，使第一组有元素 r_1 个，第二组有 r_2 个，…，第 k 组有 r_k 个，$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$，则总共不同分法种数是

$$\frac{n!}{r_1!(n-r_1)!} \frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!}$$

$$\times \cdots \frac{(n-r_1-\cdots-r_{k-2})!}{r_{k-1}!(n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1})!} = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

3. 重复组合　从 n 个不同元素里，每次取 m 个元素，元素可以重复选取，不管怎样的顺序并成一组，叫做从 n 个元素取 m 个元素的重复组合，其组合种数记为 $\widetilde{C}_n^m$.

重复组合种数与不重复组合种数有下面关系：