經济数学基础

第一册

经济信息系数学教研室编

中南财经大学·武汉

一九八五年

经济数学基础

第一册

经济信息系数学教研室编

中南财经大学·武汉

一九八五年

前　　言

随着我国社会主义建设的发展，高等数学不断地被应用到经济工作的各个领域，学习和使用经济数学方法越来越重要。为了适应大、专院校经济专修科教学的需要，为了适应广大经济工作者自学的需要，我们编写了《经济数学基础》一书。

本书分三册。第一册包括一元函数微分学，第二册包括一元函数积分学和级数，第三册线性代数。各章节均配有习题，书末附有习题答案。

考虑到专修科学员和广大在职干部的特点，本书在叙述高等数学的理论和方法时，力图采用启发式，由浅入深，通俗易懂；对定义的理解，定理和重要公式的推导尽可能准确详细；为了便于理解和记忆，还配有较多的例题和图形；大多数习题难度适中，对于少数较难的题目加了“*”号并给了提示。

针对各专业的不同要求，对加有“*”号的章节，可根据需要进行取舍。

参加本书编写工作的有谭德安（第一册第一、二章）、贾启禹（第一册第三、四、第二册第三章）、谢凯臣（第二册第一、二章）、余尚智（第三册）等。

审稿的同志有薛国英、邓顺生、高潮等同志，尚在病中的金涛同志也审阅了部分章节。他们都认真审阅了原稿，提出了许多宝贵意见，对此我们表示衷心感谢。

由于我们水平有限，编写时间仓促，书中如有缺点错误，恳切希望广大读者提出批评和指正。

编　者　　一九八五年八月

目　　录

第　一　册

第一章 函　　数

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学。函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是微积分学研究的主要对象。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系。经济管理中的数量关系很多就是函数关系。在中学数学里我们已学过函数概念和一些简单的初等函数。由于函数的重要性，在本章将对函数进行较系统的复习和提高。

§1 实　　数

一、实数与数轴

（一）实数

在微积分中所考虑的数都是实数。实数分有理数和无理数两大类。有理数包括所有的正负整数、正负分数和零。除有理数外，其余实数都是无理数，如$\sqrt{2}$，园周率π等。有理数都可以写成比值$\frac{p}{q}$的形式，这里p、q是互质整数，且$q \neq 0$；而无理数则不能写成$\frac{p}{q}$的形式。另外，有理数可以用有限小数或无限循环小数表示，如$\frac{1}{4}=0.25$，$\frac{1}{3}=0.33\cdots$等；而无理数只能用无限不循环小数表示，如$\sqrt{2}=1.414\cdots$，

$\pi=3.14159\cdots$等。

（二）数轴

实数通常可用“数轴” l 上的点形象地表示出来。在直线 l 上取定一点 0 作为原点，另外一点取作 1，这两点之间的距离作为度量的单位，并将从 0 到 1 的方向规定为“正方向”。称这样规定了原点、方向和单位的直线 l 为数轴 l（图1—1）。习惯上常取向右的方向为数轴的正方向。数轴 l 上的每一个点都有一个实数 x 与之对应。此实数称为该点的坐标。为简便记，以后我们将不区分点 x 或实数 x。例如实数 $\sqrt{2}$ 也可以说成点 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ 点。

图1—1

在数学上，常把全体实数组成的集合叫做实数集。因为数可以代表点，所以“数集”也常称为“点集”。

二、绝对值与区间

（一）绝对值

在数轴上从原点 0 到表示实数 x 的点之间的距离称为实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，于是

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{当} x\geqslant 0\\ -x, & \text{当} x<0\end{cases}\qquad (1.1)$$

对于两个实数 x 与 y 来说，$|y-x|$（或 $|x-y|$）可表示点 x 与点 y 之间的距离。

绝对值及其运算有下列性质：

1. $|x|\geqslant 0$；

2. $|x|=\sqrt{x^2}$；

3. $|-x|=|x|$；

4. $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$。　　(1.2)

这是因为当$x>0$时有 $-|x|<x=|x|$

当$x<0$时有　　$-|x|=x<|x|$

当$x=0$时有　　$-|x|=x=|x|$

于是，对任何实数x，(1.2)式总是成立。

5. 绝对值不等式$|x|<k$与$-k<x<k$是等价的。其中$k>0$。

记为 $|x|<k \Longleftrightarrow -k<x<k$ $(k>0)$　　(1.3)

这就是说，如果$|x|<k$，则有$-k<x<k$；反之，如果$-k<x<k$，则有$|x|<k$。从几何上看是显然的。

同样，$|x|\leqslant k \Longleftrightarrow -k\leqslant x\leqslant k$　　(1.4)

6. $|x|>k \Longleftrightarrow x>k$或$x<-k$，

其中$k>0$；　　(1.5)

7. $|x+y|\leqslant|x|+|y|$　　(1.6)

证　由(1.2)式得

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,$$

$$-|y|\leqslant y\leqslant|y|,$$

将两式相加得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|,$$

由(1.4)式得　$|x+y|\leqslant|x|+|y|$。

8. $|x-y|\geqslant|x|-|y|$。　　(1.7)

证　因为$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$，

所以$|x-y|\geqslant|x|-|y|$。

9. $|xy|=|x|\cdot|y|$。

10. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$。　$(y \neq 0)$

（二）区间

区间是指介于某两个实数之间的全体实数。区间可分为下面几种类型：

设a与b是两个实数，且$a<b$，那末

1. 满足不等式$a \leqslant x \leqslant b$的一切实数$x$的全体称为闭区间，记为$[a, b]$；

2. 满足不等式$a<x<b$的一切实数x的全体称为开区间，记为(a, b)；

3. 满足不等式$a<x \leqslant b$或$a \leqslant x<b$的一切实数x的全体称为半开区间，分别记为$(a, b]$或$[a, b)$。

在以上各种情形中，a和b称为区间的端点，$b-a$称为区间的长度。

在数轴上来说，区间是指介于某两个点之间的线段上点的全体，这两点就是区间的端点，以上各种情况在数轴上表示出来，分别如图1—2（a）、（b）、（c）、（d）。

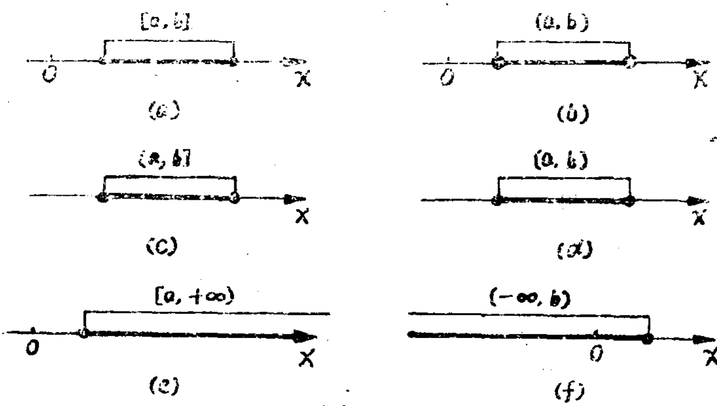

图1—2

除以上那些有限区间外，还有下列无限区间：

4.$[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的实数的全体（图1—2(e)），有时也写作$a \leqslant x < +\infty$；

$(a, +\infty)$ 表示大于a的实数的全体，有时也写作$a < x < +\infty$；

5. $(-\infty, b]$表示不大于b的实数的全体，有时也写作$-\infty < x \leqslant b$；

$(-\infty, b)$ 表示小于b的实数的全体（图1—2(f)），有时也写作$-\infty < x < b$；

6. $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数，有时也写作$-\infty < x < +\infty$。

注意，$+\infty$和$-\infty$分别读作“正无穷大”与“负无穷大”，它们不是数，仅仅是记号。

今后，我们要用到与区间有关的邻域概念。

设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$，满足不等式

$$|x-a| < \delta$$

的实数x的全体称为点a的δ邻域，点a称为这邻域的中心，δ称为这邻域的半径。

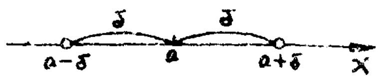

图1—3

$$|x-a| < \delta \Longleftrightarrow -\delta < x-a < \delta$$

因此有 $a-\delta < x < a+\delta$

所以，点a的δ邻域就是以点a为中心、长度为2δ的开区间（图1—3）

由此得知任何一个包含点a的开区间(c, d)总包含有点a的一个邻域。

例1　解不等式：

$$|x+3| < 4。$$

解　不等式 $|x+3|<4$ 与不等式　$-4<x+3<4$ 等价，

所以得　　$-7<x<1$

或者说x应在开区间$(-7,1)$内取值，

例 2　解不等式

$$(x-1)^2\geqslant 4。$$

解　　$(x-1)^2\geqslant 4,$

$$|x-1|\geqslant 2,$$

$$x-1\geqslant 2 \quad 或 \quad x-1\leqslant -2,$$

所以得　$x\geqslant 3$　或　$x\leqslant -1$。或者说x应在无限区间$[3,+\infty)$、$(-\infty,-1]$内取值。

例 3　解不等式

$$0<(x-2)^2\leqslant 9。$$

解　　$0<(x-2)^2\leqslant 9,$

$$0<|x-2|\leqslant 3,$$

$$\begin{cases} |x-2|>0, & (1) \\ |x-2|\leqslant 3。 & (2) \end{cases}$$

由（1）得　　$x\neq 2$。

由（2）得　　$-1\leqslant x\leqslant 5$。

综合（1）（2）得 $-1\leqslant x\leqslant 5$ 且 $x\neq 2$

或者说x应在半开区间$[-1,2)$、$(2,5]$内取值，

例 4　解不等式

$$|x|>x。$$

解　　$|x|>x,$　　　　（1）

当$x\geqslant 0$时，根据绝对值的定义，$|x|=x$，代入（1）式有

$$x>x,$$

这是不可能的。

当$x<0$时，根据定义，$|x|=-x$，代入（1）式有

$$-x>x,$$

移项得$2x<0$，即

$$x<0,$$

故得$|x|>x$的解为$x<0$。

习　题　1.1

1.解下列不等式，并将其解用区间表示出来：

（1）$|x|\leqslant 3$；　　（2）$|x+1|\geqslant 2$；

（3）$|x-2|\leqslant 4$；　　（4）$|x-2|>4$；

（5）$x^2<4$　　（6）$(x-2)^2<4$；

（7）$|x-4|<\delta(\delta>0)$；

（8）$0<(x-3)^2<4$；

（9）$|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$；

（10）$\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$

*（11）$\dfrac{x+2}{(2x-1)(x+1)}\leqslant 0$；

*（12）$2<\dfrac{1}{|x+2|}<3$。

2.求下列方程的实根：

（1）$|x|=-x$；　　（2）$|2x+3|=x^2$。

*3.证明：$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$。

§2 函数概念

一、常量与变量

在生产实践或科学实验的过程中，经常可以直接或间接地观察到反映物质运动的各种各样的量，如长度、体积、重量、温度、速度、成本、产品产量等。在所考虑的问题或过程中，有一些量大小不变，这种保持同一数值的量称为常量；有一些量大小变化，这种可取不同数值的量称为变量。例如某工厂于某时期内在职工人数和机床台数保持一定的条件下进行有效改革，产品产量大大增加，质量也有所提高。这里职工人数和机床台数是常量，产品产量和质量指标则是变量。

要注意的是，一个量是常量还是变量，并不是绝对的，它与所考虑的具体问题和具体条件有关，要辩证地去看。例如火车行驶时的速度，在开始阶段或刹车阶段是变化的，因而在此过程中是变量；但在正常行驶阶段变化很小，速度相对地可看作不变，因而是常量。

在数学中讨论的量，常抽去其实际意义，而只考虑其数值，因此也把常量与变量分别地称为常数与变数。一般用字母a、b、c、d等表示常数，用t、x、y、z等表示变数。在几何上，如果一个数a是常数，则用数轴上的一个定点表示；如果数x是变数，则用数轴上的一个动点表示。

设有一个变数x，它所取的一切数值的集合D（该集合也可以是一个或几个区间，动点x在区间上变化），这个数集合D就称为变数x的变域。