21世纪普通高等学校数学系列规划教材

线性代数

陈克东 主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪普通高等学校数学系列规划教材

线性代数

陈克东　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 提 要

本数学系列教材是针对二、三类高校学生特点，根据作者多年教学、教改经验和成果编写的，其特点是注意渗透数学思想和方法。本书内容包括行列式、矩阵及其运算，向量与线性方程组，矩阵相似对角化，二次型以及线性代数实验等内容。全书取材深广度适合二、三类本科各专业，编写思路清晰，论证严谨，例题丰富，可读性强，便于教学，有利于读者学习知识、启迪思维、培养素质、提高能力。全书有一定数量且难度各异的习题，书末附有习题答案或提示。

本书适合作为普通高等学校理工类各专业和经济管理类有关专业线性代数课程教材，也可供工程技术人员、报考研究生的读者以及自学者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈克东主编. —北京:中国铁道出版社,
2008.7
(21世纪普通高等学校数学系列规划教材)
ISBN 978-7-113-08825-5
Ⅰ.线… Ⅱ.陈… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.O151.2
中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第105394号

书　　名：线性代数
作　　者：陈克东　主编

策划编辑：李小军
责任编辑：李小军　　**编辑部电话**：(010) 63583215
封面设计：付　巍　　**封面制作**：白　雪
责任校对：张国成　　**责任印制**：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街8号　　邮政编码：100054）
印　　刷：北京市兴顺印刷厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　印张：12　字数：229千
版　　次：2008年7月第1版　2008年7月第1次印刷
印　　数：4 000册
书　　号：ISBN 978-7-113-08825-5/O·178
定　　价：19.00元

前　言

线性代数是代数学的理论基础之一，它以变量之间的线性关系作为主要研究对象，以向量和线性变换以及与之相联系的矩阵理论作为中心内容，是高等学校理工科各专业（非数学专业）和经济管理类学科有关专业的一门必修的基础课。

本书是21世纪普通高等学校数学系列规划教材之一。线性代数作为大学数学的一门基础课程，由于其结构严谨、理论严密、逻辑严格，具有一套特有的理论体系、思维方法与解题技巧，因而使得其抽象性、严密性、逻辑性等特点分外突出。该课程对于培养学生的数学素质、训练学生的逻辑推理能力、提高学生的抽象思维能力有着不可或缺的作用。一句话：线性代数对于提升学生的数学总体水平有着相当重要的作用。

随着21世纪知识经济时代的到来，由于科学技术的不断创新与发展，市场经济对科技人才的知识结构与科技素质，尤其是对数学素质的要求也越来越高。基于线性问题广泛存在于自然科学、工程技术乃至社会科学的诸多领域，而且某些非线性问题在一定条件下也可以转化为线性问题予以研究。因此，在计算机科学技术的飞速发展，尤其是计算机普及应用的今天，线性代数的理论与方法，已经成为人们从事自然科学、工程技术和经济管理工作必不可少的工具，从而对线性代数课程的教学也提出了更高的要求。

本书是根据编者多年教授大学数学各门课程，尤其是在线性代数课程教学实践中的探索、改革、经验、体会编写的。在编写过程中，我们博采国内诸多同类教材之所长，吸纳编者所在学校数学同仁们在该课程教学中不少有益的尝试与见解，力求在教材中**渗透现代数学思想，体现我们率先提出的“数学思想方法是数学教学的灵魂”的改革创新理念，促进线性代数与解析几何、微积分学以及其他数学课程的结合，突出线性代数的基本思想、基本理论与基本方法**。基于此，本书在每一章开始都撰写了“思想方法与内容提要”，期盼读者在学习时，对该章内容，尤其是数学思想方法有一个总体的认识和了解。同时，为了培育学习使用计算机解决数学问题的意识和能力，本书还编写了若干个具有应用背景的有关线性代数内容的数学实验，以推进线性代数理论与计算机技术的有机结合。总之，本书将追求教材编写上思想性、科学性、启发性、应用性与可读性的相互渗透与有机结合，着力体现教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》之《工科数学系列课程教学改革研究报告》的精神。

本书由陈克东主编。全书共五章，第1章由陈克东编写，第2章和第5章由段复建编写，第3章和第4章由陈利霞编写。全书配置了一定数量且深广度较为合适的习题，书末附有习题答案或提示。全书由陈克东统稿、修正、定稿。

本书适合作为普通高等学校本科理工类各专业与经济管理类有关专业线性代数课程的教材或教学参考书，也可供工程技术人员和报考研究生的读者参考。使用本书的参考学时为32～40学时。

本书在编写过程中得到桂林电子科技大学教务处、数学与计算科学学院的大力支持。中国铁道出版社李小军，桂林电子科技大学张楠、刘翠玉等同志给予了热情帮助，在此我们表示衷心感谢。

限于编者的水平，书中难免存在不妥之处，诚望读者批评指正。

陈克东

于桂林电子科技大学仁和苑

2008年3月12日

目　　录

第1章 矩　阵

思想方法与内容提要

矩阵是近代数学中一个非常重要的概念，在自然科学和工程技术乃至经管类学科中具有广泛的应用. 矩阵是线性代数的一个主要研究对象，由于其表示的简洁性、灵活性和直观性，在当今知识经济时代，越来越被广大科技工作者、管理工作者所重视，并作为一种有效的数学工具，深入应用于国民经济的各个领域.

作为代数学的一个重要概念，“矩阵”这个词是由英国数学家、剑桥大学教授希尔维斯特(1814—1897)于1850年首先提出来的. 由于矩阵是把一组相互独立的数，用一张数表的形式联系在一起，并将其看作一个整体，用一个数学符号表示，并以此参与运算，这就使得原来一批庞大且杂乱无章的数据变得简明有序. 数学发展的历史告诉我们，正是由于矩阵及其运算的引入，形成了线性代数，并且推动了线性代数以及其他数学分支理论的发展.

近数十年来，由于计算机技术的发展和计算机应用的普及，矩阵理论及其计算方法发展更加迅速，应用更加广泛. 矩阵已经在工程数学的实际应用与计算机科学技术之间架设了一条“高速公路”，成为现代工程技术人员和经济管理人员必须具备的数学基础知识.

本章介绍矩阵的基本理论. 先以直捷的方式定义矩阵，然后引入相关概念与运算，包括矩阵的加法、数乘、乘法及转置矩阵等基本运算. 其后，从 n 阶矩阵入手，定义线性代数中另一个重要概念——行列式，同时介绍行列式的性质及其计算方法，解线性方程组的克拉默法则. 由于矩阵乘法一般不可逆，因而单独用一节来讨论可逆矩阵及其性质与计算方法. 在此基础上，介绍求矩阵的秩、行阶梯型、行最简型、行标准型的方法. 最后介绍分块矩阵及其运算.

本章介绍的内容，是线性代数最基本的概念和方法，要求读者熟练掌握.

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的概念

定义 1 将 $m \times n$ 个元素,排成 m 行 n 列的一个矩形阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1-1}$$

称为一个 m 行 n 列的**矩阵**,简称为 $m \times n$ 矩阵,常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示.其中 a_{ij}表示第 i 行第 j 列的**元素**,i 称为 a_{ij}的**行指标**,j 称为 a_{ij}的**列指标**.必要时也可以用下标来区分不同的矩阵,如 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\cdots$.另外,在不致于引起混淆的情况下,可将式(1-1)简记为

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n} \tag{1-2}$$

或

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}). \tag{1-3}$$

比如,下面矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 4 \\ 7 & -2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

是 3×4 矩阵,其中元素 $a_{24} = 4, a_{32} = -2$ 等.

1.1.2 一些特殊的矩阵

矩阵(1-1)中的元素全都是实数,称之为**实矩阵**;矩阵(1-1)中的元素至少有一个是复数,称之为**复矩阵**;矩阵(1-1)中的元素本身是矩阵或其他更一般的数学对象,称之为**超矩阵**.

除非特殊说明,本书所讨论的矩阵都是实矩阵.

如果矩阵(1-1)中的 $m = n$,称之为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**,记为 $\boldsymbol{A}_n$;只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**,又称为**列向量**.作为列向量,也可以用小写黑体字母 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots$表示;只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_1\ a_2 \cdots\ a_n)$$

称为**行矩阵**,又称为**行向量**.为避免元素间的混淆,行矩阵也记为

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

作为行向量，也可以用小写黑体字母 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots$ 表示；元素全都是零的矩阵，称为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，简记为 $\boldsymbol{O}$.

对于式(1-1)中的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，记 $k=\min\{m,n\}$，称元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{kk}$ 构成矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线，并称 $a_{ii}(1\leqslant i\leqslant k)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个对角线元素.

对于方阵，主对角线就是从左上角到右下角的那一条连线.

对于方阵，如果其非零元素只出现在主对角线及其上方，则称之为**上三角形方阵**；类似地，如果其非零元素只出现在主对角线及其下方，则称之为**下三角形方阵**. 比如

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3&7&8&1\\0&2&4&5\\0&0&6&-1\\0&0&0&9\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}5&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\-4&3&8&0&0\\0&9&6&7&0\\2&1&-5&4&3\end{pmatrix}$$

分别称为四阶上三角形方阵与五阶下三角形方阵.

特别地，称 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}$$

为**对角阵**，其中 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 位于方阵的主对角线上，称为**主对角线元素**，其他未标注的部分全都为零. 对角阵是非主对角线元素全为零的方阵，简记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 比如

$$\mathrm{diag}(2,-4,5)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

如果对角阵中的元素 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=c$（$c$ 是常数），即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}c&&&\\&c&&\\&&\ddots&\\&&&c\end{pmatrix},$$

称之为**纯量矩阵**，简记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(c,c,\cdots,c)$. 更为特别的是，如果纯量矩阵中的常数 $c=1$，即

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$

称之为**单位矩阵**,简称为**单位阵**,记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$. 单位阵在矩阵运算中有着十分重要的作用. 有时为了区分不同阶的单位阵,拟用下标说明,如

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{E}_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

就分别表示二阶单位阵与四阶单位阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行数、列数分别相等,则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**. 两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,若 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.1.3 矩阵问题实例

矩阵的应用十分广泛,下面举几个实际例题.

例 1 某厂向四个商店供应三种产品,其供应产品的品种及数量可列成如下矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,3,4;j=1,2,3)$ 为工厂向第 i 个商店供应第 j 种产品的数量.

例 2 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}\tag{1-4}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换,其中 a_{ij}为常数. 线性变换(1-4)的系数 a_{ij}所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$称为**系数矩阵**,即为式(1-1).

事实上,给定了一个线性变换,它的系数所构成的矩阵就被唯一确定;反之,给定了一个矩阵作为线性变换的系数矩阵,线性变换也被唯一确定,因此线性变换和矩阵之间存在着一一对应的关系.

特别地,线性变换

$$\begin{cases}y_1=x_1\\y_2=x_2\\\cdots\cdots\\y_n=x_n\end{cases}$$

称之为**恒等变换**,其对应的系数矩阵就是一个 n 阶单位阵,即

$$E_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

例 3 图 1-1 表示了 d 国三个城市,e 国三个城市和 f 国两个城市之间的航班飞行线路. 这三个国家中的任何两国城市之间的航班飞行线路情况,都可以用通路矩阵表示.

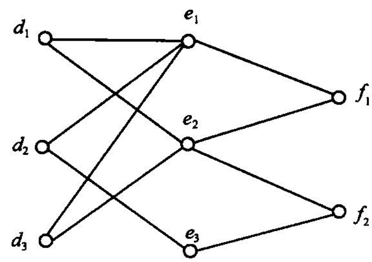

图 1-1

其中在 d 国与 e 国城市之间航班飞行线路的通路矩阵为

$$\begin{array}{c}\\ d_1\\ d_2\\ d_3\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}e_1&e_2&e_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

在 e 国与 f 国城市之间航班飞行线路以及在 d 国与 f 国城市之间航班飞行线路的通路矩阵可分别表示为

$$\begin{array}{c}\\ e_1\\ e_2\\ e_3\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}f_1&f_2\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\end{array};\qquad \begin{array}{c}\\ d_1\\ d_2\\ d_3\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}f_1&f_2\end{array}\\ \begin{pmatrix}2&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\end{array}.$$

上述三个通路矩阵中的数字 2、1 和 0,分别表示相应城市之间航班飞行线路的情况.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加法

定义 1 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

是两个同型矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以相加,且规定其和为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1-5}$$

由矩阵加法的定义,容易得到矩阵的加法运算满足以下运算规律:

(1)交换律 $\qquad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2)结合律 $\qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3)零和律 $\qquad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

定义 2 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

如果将它的每一个元素都换成其相反数,得到矩阵

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1-6}$$

称矩阵 $-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**.

对于负矩阵,显然有以下等式:

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O};$$
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

1.2.2 数与矩阵相乘

定义 3 设 k 是一个实数,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,称矩阵

$$B=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-7}$$

为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**乘积**,简称为**数乘**,记为 $\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{A}$,也可记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}k$.

由数乘矩阵的定义,不难得出其运算满足以下运算规律:

(1)分配律 $$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B};$$
$$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A};$$

(2)结合律 $$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A});$$

(3)零一律 $$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A};$$
$$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O};$$
$$k\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O};$$
$$(-1)\boldsymbol{A}=1(-\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{A}.$$

例 1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个同型矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 7\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 8\end{pmatrix}.$$

求:(1)$3\boldsymbol{A}$;(2)$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解 (1)$$3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3\times1 & 3\times(-2) & 3\times3\\ 3\times2 & 3\times5 & 3\times7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 9\\ 6 & 15 & 21\end{pmatrix};$$

(2)$$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 9\\ 6 & 15 & 21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 2 & 0\\ 8 & -2 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -8 & 9\\ -2 & 17 & 5\end{pmatrix}.$$

例 2 设 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,因为 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,所以 $ka_{ij}=0\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 于是有 $k=0$或 $a_{ij}=0\quad(i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n)$.

当 $k=0$ 时,即得证.

当 $k\neq0$ 时,用数$\dfrac{1}{k}$乘

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

的两端,左端有

$$\frac{1}{k}(k\boldsymbol{A})=\left(\frac{1}{k}\times k\right)\boldsymbol{A}=1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},$$

右端有

$$\frac{1}{k}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O},$$

所以得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

1.2.3 矩阵与矩阵相乘

定义 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$,则由元素

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \tag{1-8}$$

$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s)$ 组成的 $m \times s$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m \times s} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix} \tag{1-9}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

从矩阵乘法的定义可知,左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数必须相等,两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘,乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义;否则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不能相乘,乘积 $\boldsymbol{AB}$ 没有意义. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积有意义时,其乘积 $\boldsymbol{C}$ 的行数与列数分别等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数与 $\boldsymbol{B}$ 的列数. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中第 i 行第 j 列的元素 c_{ij} 是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的元素和 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的相应元素分别相乘后再相加得到的,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{sc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & & \cdots & & c_{1s} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & & c_{is} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{m1} & & \cdots & & c_{ms} \end{pmatrix}$$

例 3 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$.

解 本例 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$ 均有意义.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 4 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 7 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

例 4 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$.

解 本例 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$ 均有意义.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

特别指出,从例 3 与例 4 我们可以发现关于矩阵与矩阵相乘两个必须引起读者关注的结论:

1. 矩阵的乘法一般不满足交换律.

这个结论可以分三个层面来理解.其一,当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘时,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不一定可以相乘;其二,即使当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘,且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也可以相乘时,$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的阶数一般也不相等;其三,即使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也可以相乘,而且 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的阶数也相等,在一般情况下 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 仍可能不相等.

2. 当两个矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都不是零矩阵时,它们的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 可能是零矩阵.

换句话说,仅由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,在一般情况下,不能推导出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或者 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.由此可以得出消去律在矩阵运算中一般也不成立,即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,不能推导出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 这个结果.

上述两个结论都是与读者熟知的有关实数的乘积运算规律完全不同的,值得大家高度重视,以免在矩阵乘法运算中产生错误.

关于矩阵的乘法运算,尚有以下运算规则.

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{O}$ 等矩阵在相应的加法和乘法运算都能进行的情形下,则

(1)$\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$;

(2)$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$;

(3)$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$(其中 k 为数);

(4)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$(结合律);

(5)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$(左分配律),

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$(右分配律).

证 (1),(2),(3),(5)都容易证明,请读者自行完成.这里只证明(4).

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times r}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{r\times s}$,$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{s\times n}$,于是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 和 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 都有意义,且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 和 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 都是同型的 $m\times n$ 矩阵.

根据矩阵相等的定义,只需证明等式两端两个矩阵相应元素相等即可.左端 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 中第 i 行第 j 列的元素是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $(\boldsymbol{BC})$ 的第 j 列的对应元素相乘再相加得到的,即

$$\sum_{k=1}^{r}a_{ik}\Big(\sum_{l=1}^{s}b_{kl}c_{lj}\Big)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s}a_{ik}b_{kl}c_{lj}. \tag{1-10}$$

而右端 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 中第 i 行第 j 列的元素是 $(\boldsymbol{AB})$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{C}$ 的第 j 列的对应元素相乘再相加得到的,即