Xianxing Daishu Jieti Zhidao

线性代数 解题指导

周华任　滕兴虎　赵　颖　陈　琦◎编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

线性代数解题指导

周华任　滕兴虎　赵　颖　陈　琦　编

东南大学出版社
·南京·

内 容 简 介

本书按照《线性代数》教材的一般章节顺序编写，包括了学习目的要求、基本内容提要、解题方法归纳、考研真题精解、单元测试题、四套综合测试题等部分，并通过研究生入学考试的数学一、数学二、数学三和数学四历年的考研真题精解，分析了考试的热点以及出题的角度和重点考察的知识点，加强了知识的应用性和针对性。

本书题目丰富，难度适中，以研究生入学考试的题目难度标准选题，循序渐进，在笔者的课程教学和考研辅导中都取得了很好的效果。本书可作为工科学生学习线性代数课程的参考书，也可供报考硕士研究生的读者、有关教师和科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题指导/周华任等编. —南京：东南大学出版社，2009.2
ISBN 978-7-5641-1046-8

Ⅰ.线… Ⅱ.周… Ⅲ.线性代数—高等学校—解题 Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 008097 号

出版发行：东南大学出版社
社　　址：南京四牌楼 2 号　邮编：210096
出 版 人：江　汉
网　　址：http://press.seu.edu.cn
电子邮件：press@seu.edu.cn
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：溧阳市晨明印刷有限公司
开　　本：700mm×1000mm　1/16
印　　张：16.5
字　　数：294 千字
版　　次：2009 年 2 月第 1 版
印　　次：2009 年 2 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5641-1046-8/O·65
定　　价：36.00 元

前　言

线性代数是一门重要的基础课程，也是大多数专业研究生入学考试必考科目，它在自然科学、社会科学、金融学、经济学等方面都有着广泛的应用。为了帮助广大学生扎实地掌握线性代数的精髓和灵活运用所学知识，我们根据《线性代数》教材的一般章节顺序编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

(1) 学习目的要求：指出了每一章教材的学习目的要求，使同学们学习做到心中有数，有的放矢。

(2) 基本内容提要：列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出了必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

(3) 解题方法归纳：把各种题型的解题方法、解题技巧归纳起来，对同学们实行点对点、面对面的学习指导，目的是使同学们掌握了这些题型的解题方法、解题技巧后做题能起到事半功倍的功效。

(4) 考研真题精解：精选历年全国研究生入学考试(数学一～数学四)试题中具有代表性的题目进行了详细的解答。这些考题涉及内容广、题型多、技巧性强，对广大同学可以起到举一反三、触类旁通开阔解题思路的作用，更好地掌握线性代数的基本内容和解题方法。

(5) 单元测试题及详细解答。

(6) 四套综合测试题及详细解答。

在编写过程中，编者参考了众多的教材和辅导书。在此谨向有关作者表示衷心感谢。

在本书的策划、编写、审稿等方面，东南大学出版社给予了大力支持和热情帮助，在此深表感谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正。

编　者

2009 年 1 月

目 录

1 第一章 行 列 式

学习目的要求

(1) 掌握对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式.

(2) 掌握 n 阶行列式的定义及性质.

(3) 了解余子式的概念,掌握代数余子式的定义及性质.

(4) 掌握行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.

(5) 掌握克拉默法则.

基本内容提要

1. 全排列及其逆序数

(1) 全排列:把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列.

(2) 逆序和逆序数:在一个排列$(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s)$中,若一对数的前后位置与大小顺序相反,则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数,记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 若 τ 为奇数,则称$(i_1 i_2 \cdots i_n)$为奇排列;若 τ 为偶数,则称此排列为偶排列.

2. n 阶行列式的定义

(1) 定义:n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中,$(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为自然数 1, 2, …, n 的一个排列,τ 为这个排列的逆序数,求和符号 $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是对所有排列$(p_1 p_2 \cdots p_n)$求和.

n 阶行列式 D 中所含 n^2 个数叫做 D 的元素,a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的元素.

（2）2 阶和 3 阶行列式还适用对角线法则.

（3）由 n 阶行列式的定义可得到一些特殊行列式的值.

① 上、下三角行列式等于主对角线上的元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

② 对角行列式等于对角线元素之积，即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

③ 次对角线行列式的值为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

3. 行列式的性质

（1）行列式 D 和它的转置行列式 D^T 的值相等.

（2）互换行列式的两行(列)，行列式改变符号.

（3）行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用这个数 k 乘以此行列式，即行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

（4）若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5) 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一个数然后加到另一列(行)对应的元素上,行列式的值不变.

4. 行列式按行(列)展开

(1) 代数余子式:把 n 阶行列式元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $(n-1)$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 外都为 0,则该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

(3) 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.即行列式按行(列)展开法则:

按第 i 行展开,有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n$$

按第 j 列展开,有

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n$$

(4) 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j$$

(5) 范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

5. 克拉默法则

考虑含有 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为 0 时,称为齐次线性方程组,否则称为非齐次线性方程组.

(1) 若上述方程组的系数行列式 $D \neq 0$,则它有惟一解:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 D_i 是把 D 中第 i 列元素用方程组右端的自由项替代后所得到的 n 阶行列式.

(2) 若线性方程组无解或者有两个不同的解,那么其系数行列式 $D = 0$.

(3) 若齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,那么它只有零解;若齐次线性方程组有非零解,那么它的系数行列式等于 0.

6. 拉普拉斯定理

(1) 位于 n 阶行列式的第 $i_1, \cdots, i_k$ 行及第 $j_1, \cdots, j_k$ 列($1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$) 交叉位置上的元素,按原来相对位置所构成的 k 阶行列式 D_1 称为 D 的一个 k 阶子式,不在这 k 行 k 列上的元素,按原来相对位置所构成的 $(n-k)$ 阶子式 D_2 叫做 D_1 的余子式,而称 $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}D_2$ 为 D_1 的代数余子式.

(2) 拉普拉斯定理:任意取定 n 阶行列式的某 k 行(列),位于这 k 行(列)中的 k 阶子式共有 C_n^k 个,则这 C_n^k 个子式与其相应的代数余子式乘积的和等于 D.

解题方法归纳

题型 1　计算排列的逆序数

计算逆序数的方法:看有多少数码排在 1 的前面,设为 m_1 个,那么就有 m_1 个数码与 1 构成逆序;然后把 1 划去,再看有多少数码排在 2 前面,设有 m_2 个,那么就有 m_2 个数码与 2 构成逆序,再把 2 划去. 依此类推,最后设在 n 前面有 m_n 个数码(显然 $m_n = 0$),那么这个排列的逆序数为 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

例 1　求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1) 1347265;　　　(2) $n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$.

解:(1) $\tau(1347265) = 0+3+0+0+2+1 = 6$,为偶排列.

(2) $\tau(n(n-1)\cdots 2 \cdot 1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

例 2　选择 i 和 k,使:(1) $1i25k4897$ 成奇排列;(2) $1274i56k9$ 成偶排列.

解：(1) 由题意，i，k 只有两种选择：$i=3$，$k=6$ 或 $i=6$，$k=3$. 一般取小数在先，大数在后，如果符合要求即为所求，否则后一种情况则符合要求.

而 $\tau(132564897)=5$，即为所有，故 $i=3$，$k=6$.

(2) 由题意：$i=3$，$k=8$ 或 $i=8$，$k=3$.

而 $\tau(127435689)=5$，则 $i=8$，$k=3$.

题型 2 利用行列式性质进行行列式计算

方法 利用性质将行列式化为上(或下)三角形行列式以及利用其他性质计算(如提取公因式、逐行或列相加减等等).

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解：将第 2，3，…，n 行加到第 1 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第 1 行的 $-a$ 倍加到第 2，3，…，n 行，有

$$D_n=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解：由于 D 的主对角线及第 1 行与第 1 列元素非 0，其余元素为 0，把第 2 行的 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 倍，第 3 行的 $\left(-\frac{1}{3}\right)$ 倍，…，第 n 行的 $\left(-\frac{1}{n}\right)$ 倍都加到第 1 行上，使 D 化成下三角行列式，得

$$D=\begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

解：利用逐行(列)相加减的技巧将该行列式化为三角形行列式，即有

$$D\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

例 6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

解：所有行(列)对应元素相加后相等的行列式，可把所有行(列)加到第 1 行(或第 1 列)，提取公因子后再化简计算. 该行列式所有列对应元素相加后均为 $b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，将第 2 至第 n 列对应元素加到第 1 列，然后提出公因子$(b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)$，有

$$D_n=\begin{vmatrix} b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

再将第 1 行乘(−1)倍加到其余各行，得

$$D_n=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}$$

例 7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解：这是一个“爪”型行列式，通常提取公因式化为三角形行列式. 从第 i 行提出 $a_{i-1}(i=2,3,\cdots,n+1)$，得

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

将第 2 行的(−1)倍，…，第 n 行的(−1)倍加到第 1 行，得

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解：利用行列式性质直接将它化成“爪”型行列式. 第 2 行，第 3 行，…，第 n 行分别减去第 1 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

将第 i 行分别提出因子 $a_i(i=2,\cdots,n)$,得

$$D_n=a_2a_3\cdots a_n\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -\dfrac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -\dfrac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -\dfrac{a_1}{a_{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ -\dfrac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

将第 1 行分别减去第 2 行,第 3 行,…,第 n 行,得

$$D_n=a_2a_3\cdots a_n\begin{vmatrix}1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -\dfrac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\dfrac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\dfrac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=a_2a_3\cdots a_n\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)=a_1a_2a_3\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

题型 3 利用行列式按行(列)展开定理

方法 当行列式的某一行(列)中的零元素较多时才能显出展开定理的优势,所以往往先利用行列式性质使行列式的某一行(列)出现较多的零元素,然后再利用定理.

例 9 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ 1+x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

解:行列式中各行元素之和都相等,可先把各行的每一个元素都加到第 1 列,则有

$$D\xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}}\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 列展开}}x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=x^4$$

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解：利用行列式的性质，将第 1 行的 (-1) 倍加到第 $i(i=2,3,\cdots,n)$ 行上去，则

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix}=(-2)^{n-1}$$

例 11 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

解：由于第 $2,3,\cdots,n$ 行的元素的和都是零，将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列上，有

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}(n+1)!$$

例 12　计算下列 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解：按第 1 行展开，得

$$D_n=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=a^n+(-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$=a^n+(-1)^{2n+1}a^{n-2}=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1)$$