

Xianxing Daishu Jieti Zhidao

# 线性代数 解题指导

周华任 滕兴虎 赵 颖 陈 琦 ◎ 编



東南大學出版社  
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

## 介 容 内

苦，增长数学知识，提高解题能力。本教材由周华任、滕兴虎、赵颖、陈琦编著。全书共分八章，每章由基础概念、基本定理、典型例题分析、习题与练习四部分组成。每章最后还附有综合测试题，帮助读者巩固所学知识。

# 线性代数解题指导

周华任 滕兴虎 赵 颖 陈 琦 编

学大南京：京南一·线性代数解题指导

出版时间：2003-3

ISBN 978-7-5641-1046-8

I·II·III·IV·V·VI·VII·VIII

中国图书馆分类号：O151.21

## 前 言

线性代数是一门重要的基础课程，也是大多数专业研究生考试出题大都出自此书。它在自然科学、技术科学、金融学、经济学等领域有着广泛的应用。对于大学生来说，掌握线性代数的精髓和灵活运用所学知识，我们根据多年的教学经验，精选出了一般章节顺序编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

(1) 学习目的要求：指出了每一章教材的学习目的要求，使学生能够明确学习中的重点、难点，有的放矢。

(2) 基本内容提要：列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式，帮助学生掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

(3) 解题方法归纳：把各种题型的解题方法、解题技巧及应注意的问题告诉给同学们，进行点对点、面对面的学法指导，目的是使同学们掌握解题的一般规律，通过训练，使解题技巧后做题能起到事半功倍的效果。

(4) 考研真题精解：精选历年全国大学生入学考试(数学一)中具有代表性的题目，由周华任、滕兴虎、赵颖、陈琦等编著，帮助读者开阔解题思路，对广大同学可以起到举一反三、触类旁通的作用，更好的掌握线性代数的基本内容和解题方法。

东南大学出版社

• 南京 •

本书分为两大部分：

第一部分为历年真题及详细解答。

## 内 容 简 介

本书按照《线性代数》教材的一般章节顺序编写,包括了学习目的要求、基本内容提要、解题方法归纳、考研真题精解、单元测试题、四套综合测试题等部分,并通过研究生入学考试的数学一、数学二、数学三和数学四历年的考研真题精解,分析了考试的热点以及出题的角度和重点考察的知识点,加强了知识的应用性和针对性。

本书题目丰富,难度适中,以研究生入学考试的题目难度标准选题,循序渐进,在笔者的课程教学和考研辅导中都取得了很好的效果。本书可作为工科学生学习线性代数课程的参考书,也可供报考硕士研究生的读者、有关教师和科技工作者参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题指导/周华任等编. —南京:东南大学出版社, 2009. 2

ISBN 978-7-5641-1046-8

I. 线… II. 周… III. 线性代数—高等学校—解题 IV. O151. 2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 008097 号

出版发行: 东南大学出版社

社址: 南京四牌楼 2 号 邮编: 210096

出版人: 江汉

网址: <http://press. seu. edu. cn>

电子邮件: press@seu.edu.cn

经 销: 全国各地新华书店

印 刷: 溧阳市晨明印刷有限公司

开 本: 700mm×1000mm 1/16

印 张: 16.5

字 数: 294 千字

版 次: 2009 年 2 月第 1 版

印 次: 2009 年 2 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5641-1046-8/O · 65

定 价: 36.00 元

---

本社图书若有印装质量问题, 请直接与读者服务部联系。电话(传真): 025—83792328

## 前　　言

线性代数是一门重要的基础课程,也是大多数专业研究生入学考试必考科目,它在自然科学、社会科学、金融学、经济学等方面都有着广泛的应用。为了帮助广大学生扎实地掌握线性代数的精髓和灵活运用所学知识,我们根据《线性代数》教材的一般章节顺序编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成:

(1) 学习目的要求:指出了每一章教材的学习目的要求,使同学们学习做到心中有数,有的放矢。

(2) 基本内容提要:列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式,突出了必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

(3) 解题方法归纳:把各种题型的解题方法、解题技巧归纳起来,对同学们实行点对点、面对面的学习指导,目的是使同学们掌握了这些题型的解题方法、解题技巧后做题能起到事半功倍的功效。

(4) 考研真题精解:精选历年全国研究生入学考试(数学一~数学四)试题中具有代表性的题目进行了详细的解答。这些考题涉及内容广、题型多、技巧性强,对广大同学可以起到举一反三、触类旁通开阔解题思路的作用,更好地掌握线性代数的基本内容和解题方法。

(5) 单元测试题及详细解答。

(6) 四套综合测试题及详细解答。

在编写过程中,编者参考了众多的教材和辅导书。在此谨向有关作者表示衷心感谢。

在本书的策划、编写、审稿等方面,东南大学出版社给予了大力支持和热情帮助,在此深表感谢。

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,希望广大读者批评指正。

编　者  
2009年1月



## 目 录

第一章 行列式	1
学习目的要求	1
基本内容提要	1
解题方法归纳	4
考研真题精解	24
单元测试题及答案	30
第二章 矩阵及其运算	39
学习目的要求	39
基本内容提要	39
解题方法归纳	42
考研真题精解	55
单元测试题及答案	65
第三章 矩阵的初等变换与线性方程组	73
学习目的要求	73
基本内容提要	73
解题方法归纳	75
考研真题精解	91
单元测试题及答案	97
第四章 向量组的线性相关性	106
学习目的要求	106
基本内容提要	106
解题方法归纳	109
考研真题精解	127
单元测试题及答案	148
第五章 相似矩阵及二次型	157



学习目的要求	157
基本内容提要	157
解题方法归纳	161
考研真题精解	185
单元测试题及答案	200
第六章 线性空间与线性变换	
学习目的要求	205
基本内容提要	205
解题方法归纳	208
考研真题精解	216
单元测试题及答案	218
综合测试题(A卷)	
学习目的要求	227
基本内容提要	227
解题方法归纳	233
考研真题精解	239
综合测试题(B卷)	
学习目的要求	247
基本内容提要	247
解题方法归纳	253
考研真题精解	259
单元测试题及答案	261
综合测试题(C卷)	
学习目的要求	269
基本内容提要	269
解题方法归纳	275
考研真题精解	281
单元测试题及答案	283
综合测试题(D卷)	
学习目的要求	291
基本内容提要	291
解题方法归纳	297
考研真题精解	303
单元测试题及答案	305
第七章 矩阵的特征值与特征向量	
学习目的要求	313
基本内容提要	313
解题方法归纳	317
考研真题精解	323
单元测试题及答案	325
第八章 二次型	
学习目的要求	333
基本内容提要	333
解题方法归纳	337
考研真题精解	343
单元测试题及答案	345



# 1 第一章 行列式

## 学习目的要求

- (1) 掌握对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式.
- (2) 掌握  $n$  阶行列式的定义及性质.
- (3) 了解余子式的概念, 掌握代数余子式的定义及性质.
- (4) 掌握行列式的性质及按行(列)展开计算简单的  $n$  阶行列式.
- (5) 掌握克拉默法则.

## 基本内容提要

### 1. 全排列及其逆序数

- (1) 全排列: 把  $n$  个不同的元素排成一列, 叫做这  $n$  个元素的全排列.
  - (2) 逆序和逆序数: 在一个排列  $(i_1 i_2 \dots i_l \dots i_n)$  中, 若一对数的前后位置与大小顺序相反, 则称这两个数组成一个逆序.
- 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数, 记作  $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$ . 若  $\tau$  为奇数, 则称  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  为奇排列; 若  $\tau$  为偶数, 则称此排列为偶排列.

### 2. $n$ 阶行列式的定义

- (1) 定义:  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 \dots p_n)} (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (1)$$

其中,  $(p_1 p_2 \dots p_n)$  为自然数  $1, 2, \dots, n$  的一个排列,  $\tau$  为这个排列的逆序数, 求和符号  $\sum_{(p_1 p_2 \dots p_n)}$  是对所有排列  $(p_1 p_2 \dots p_n)$  求和.

$n$  阶行列式  $D$  中所含  $n^2$  个数叫做  $D$  的元素,  $a_{ij}$  表示位于第  $i$  行第  $j$  列的元素.



(2) 2 阶和 3 阶行列式还适用对角线法则.

(3) 由  $n$  阶行列式的定义可得到一些特殊行列式的值.

① 上、下三角行列式等于主对角线上的元素的乘积, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

② 对角行列式等于对角线元素之积, 即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

③ 次对角线行列式的值为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

### 3. 行列式的性质

(1) 行列式  $D$  和它的转置行列式  $D^T$  的值相等.

(2) 互换行列式的两行(列), 行列式改变符号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数  $k$ , 等于用这个数  $k$  乘以此行列式, 即行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和, 则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



方法(5)把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一个数然后加到另一列(行)对应的元素上,行列式的值不变.

#### 4. 行列式按行(列)展开

(1) 代数余子式: 把  $n$  阶行列式元素  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列划去后所成的  $(n-1)$  阶行列式称为元素  $a_{ij}$  的余子式, 记作  $M_{ij}$ .  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  称为元素  $a_{ij}$  的代数余子式.

(2) 一个  $n$  阶行列式, 如果其中第  $i$  行所有元素除第  $i$  行第  $j$  列元素  $a_{ij}$  外都为 0, 则该行列式等于  $a_{ij}$  与它的代数余子式的乘积, 即  $D = a_{ij} A_{ij}$ .

(3) 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即行列式按行(列)展开法则:

按第  $i$  行展开, 有

$$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

按第  $j$  列展开, 有

$$D = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(4) 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0, 即

$$a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \cdots + a_{ni} A_{nj} = 0, \quad i \neq j$$

或

$$a_{1j} A_{1i} + a_{2j} A_{2i} + \cdots + a_{nj} A_{ni} = 0, \quad i \neq j$$

#### (5) 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

#### 5. 克拉默法则

考虑含有  $n$  个方程的  $n$  元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{(1-w)x}{S} = 1 \quad (\text{将 } (1-w)x \text{ 项移到等式右侧})$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1-w)x = S$$



**旗标** 当  $b_1, b_2, \dots, b_n$  全为 0 时, 称为齐次线性方程组, 否则称为非齐次线性方程组.

(1) 若上述方程组的系数行列式  $D \neq 0$ , 则它有惟一解:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中  $D_i$  是把  $D$  中第  $i$  列元素用方程组右端的自由项替代后所得到的  $n$  阶行列式.

(2) 若线性方程组无解或者有两个不同的解, 那么其系数行列式  $D = 0$ .

(3) 若齐次线性方程组的系数行列式  $D \neq 0$ , 那么它只有零解; 若齐次线性方程组有非零解, 那么它的系数行列式等于 0.

## 6. 拉普拉斯定理

(1) 位于  $n$  阶行列式的第  $i_1, \dots, i_k$  行及第  $j_1, \dots, j_k$  列 ( $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ ) 交叉位置上的元素, 按原来相对位置所构成的  $k$  阶行列式  $D_1$  称为  $D$  的一个  $k$  阶子式, 不在这  $k$  行  $k$  列上的元素, 按原来相对位置所构成的  $(n-k)$  阶子式  $D_2$  叫做  $D_1$  的余子式, 而称  $(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} D_2$  为  $D_1$  的代数余子式.

(2) 拉普拉斯定理: 任意取定  $n$  阶行列式的某  $k$  行(列), 位于这  $k$  行(列)中的  $k$  阶子式共有  $C_n^k$  个, 则这  $C_n^k$  个子式与其相应的代数余子式乘积的和等于  $D$ .

## 解题方法归纳

### 题型 1 计算排列的逆序数

计算逆序数的方法: 看有多少数码排在 1 的前面, 设为  $m_1$  个, 那么就有  $m_1$  个数码与 1 构成逆序; 然后把 1 划去, 再看有多少数码排在 2 前面, 设有  $m_2$  个, 那么就有  $m_2$  个数码与 2 构成逆序, 再把 2 划去. 依此类推, 最后设在  $n$  前面有  $m_n$  个数码(显然  $m_n = 0$ ), 那么这个排列的逆序数为  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

**例 1** 求下列排列的逆序数, 并确定它们的奇偶性.

$$(1) 1347265; \quad (2) n(n-1)\dots2 \cdot 1.$$

解: (1)  $\tau(1347265) = 0 + 3 + 0 + 0 + 2 + 1 = 6$ , 为偶排列.

$$(2) \tau(n(n-1)\dots2 \cdot 1) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**例 2** 选择  $i$  和  $k$ , 使: (1)  $1i25k4897$  成奇排列; (2)  $1274i56k9$  成偶排列.



解：(1) 由题意， $i, k$  只有两种选择： $i = 3, k = 6$  或  $i = 6, k = 3$ . 一般取小数在先，大数在后，如果符合要求即为所求，否则后一种情况则符合要求。

而  $\tau(132564897) = 5$ , 即为所有, 故  $i = 3, k = 6$ .

(2) 由题意： $i = 3, k = 8$  或  $i = 8, k = 3$ .

而  $\tau(127435689) = 5$ , 则  $i = 8, k = 3$ .



## 题型 2 利用行列式性质进行行列式计算

**方法** 利用性质将行列式化为上(或下)三角形行列式以及利用其他性质计算(如提取公因式、逐行或列相加减等等).

### 例 3 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = 0$$

解：将第  $2, 3, \dots, n$  行加到第 1 行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x + (n-1)a & x + (n-1)a & \cdots & x + (n-1)a \\ a & 0 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第 1 行的  $-a$  倍加到第  $2, 3, \dots, n$  行，有

$$D_n = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$



## 例4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解：由于  $D$  的主对角线及第 1 行与第 1 列元素非 0，其余元素为 0，把第 2 行的  $(-\frac{1}{2})$  倍，第 3 行的  $(-\frac{1}{3})$  倍，…，第  $n$  行的  $(-\frac{1}{n})$  倍都加到第 1 行上，使  $D$  化成下三角行列式，得

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n! \left( 1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right)$$

## 例5 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

解：利用逐行（列）相加减的技巧将该行列式化为三角形行列式，即有

$$D \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$



**例 6** 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$$

解：所有行(列)对应元素相加后相等的行列式，可把所有行(列)加到第1行(或第1列)，提取公因子后再化简计算。该行列式所有列对应元素相加后均为  $b + \sum_{i=1}^n a_i$ ，将第2至第n列对应元素加到第1列，然后提出公因子  $(b + \sum_{i=1}^n a_i)$ ，有

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} b + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} \\ &= (b + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} \end{aligned}$$

再将第1行乘(-1)倍加到其余各行，得

$$D_n = (b + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (b + \sum_{i=1}^n a_i) b^{n-1}$$

**例 7** 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$



解：这是一个“爪”型行列式，通常提取公因式化为三角形行列式。从第  $i$  行提出  $a_{i-1}$  ( $i = 2, 3, \dots, n+1$ )，得

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

将第 2 行的  $(-1)$  倍， $\cdots$ ，第  $n$  行的  $(-1)$  倍加到第 1 行，得

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left( a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$$

### 例 8 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & \end{vmatrix}$$

其中  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 。

解：利用行列式性质直接将它化成“爪”型行列式。第 2 行，第 3 行， $\cdots$ ，第  $n$  行分别减去第 1 行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$



将第  $i$  行分别提出因子  $a_i (i=2, \dots, n)$ , 得

$$D_n = a_2 a_3 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\frac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_1}{a_{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = C_1$$

将第 1 行分别减去第 2 行, 第 3 行, ..., 第  $n$  行, 得

$$D_n = a_2 a_3 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = C_2$$

$$= a_2 a_3 \cdots a_n \left( 1 + a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_1}{a_i} \right) = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$$



### 题型 3 利用行列式按行(列)展开定理

**方法** 当行列式的某一行(列)中的零元素较多时才能显出展开定理的优势, 所以往往先利用行列式性质使行列式的某一行(列)出现较多的零元素, 然后再利用定理.

#### 例 9 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & x+1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x-1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+x & -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \alpha$$

**解:** 行列式中各行元素之和都相等, 可先把各行的每一个元素都加到第 1 列, 则有



$$D = \frac{c_1 + c_2}{c_1 + c_3} \frac{c_1 + c_3}{c_1 + c_4} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1} \cdot x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^4$$

例 10 计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解：利用行列式的性质，将第 1 行的  $(-1)$  倍加到第  $i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) 行上去，则

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^{n-1}$$

例 11 计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

解：由于第 2, 3, ...,  $n$  行的元素的和都是零，将第 2, 3, ...,  $n$  列都加到第 1 列上，有



$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} (n+1)!$$

中D表示, (1, 2, 3, ..., n) 为余数分组, 在计算中D式中A式因-1去负: 例

### 例 12 计算下列n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & a & a & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ a & a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

中D式中A, A, A, A而1元负a集中0或奇数, 因-3去负

S表示元负a集中0或奇数, A8+A4+A5+A6, 为余数分组, D式因-1去负: 例

解: 按第1行展开, 得

$$D_n = (-1)^{1+n} a \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

式按1集正a<sup>n</sup>+(-1)<sup>1+n</sup>(-1)<sup>1+(n-1)</sup>

集负a<sup>n</sup>-(-1)<sup>1+n</sup>(-1)<sup>1+(n-1)</sup>

$$= a^n + (-1)^{2n+1} a^{n-2} = a^n - a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1)$$