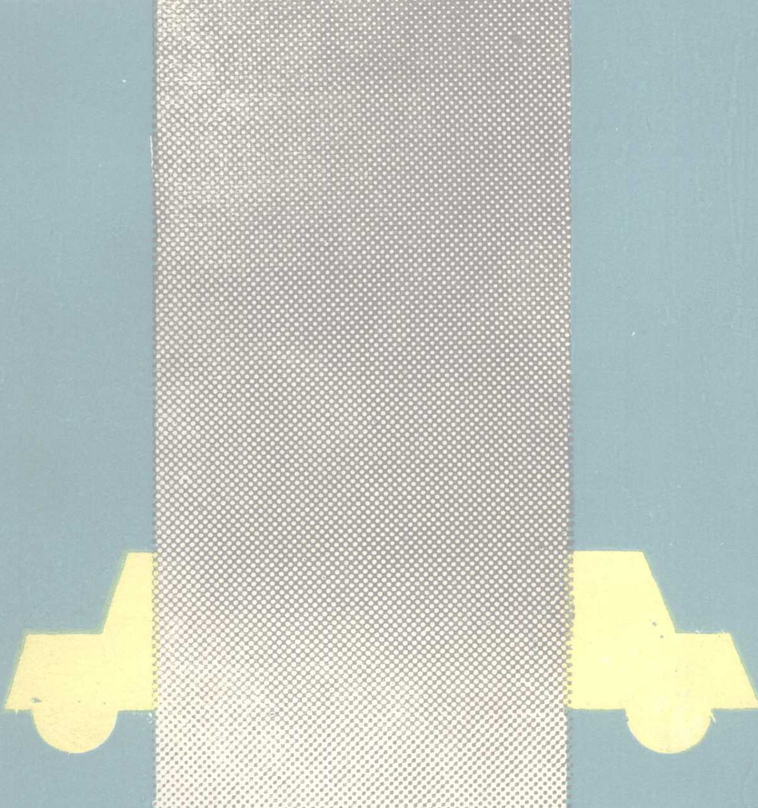
吴浩珪 编著



汽车结构计算的有限元法

华南理工大学出版社

汽车结构计算的有限元法

吴诒珪　编著

华南理工大学出版社

内 容 提 要

本书是工程应用有限元法入门读物。它从力学原理出发，用汽车结构计算较常用的几种单元，推导出有限元法的基本原理，并编入应用实例，以帮助读者正确掌握有限元计算的基本方法。各章附有思考题，便于读者复习、巩固所学知识。

此书可作高等学校本科、专科汽车、运输及机械工程类专业教材和研究生的教学参考书，也适合有关工程技术人员自学。

【粤】新登字12号

汽车结构计算的有限元法

吴诰珪 编著

责任编辑 谢艳桂

华南理工大学出版社出版发行

（广州 五山 邮码：510641）

广东省新华书店经销

华南理工大学出版社电脑排版室排版

华南理工大学印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：6.875 字数：154千

1993年6月第1版 1993年6月第1次印刷

印数：1—3 000

ISBN 7—5623—0476—9/TH・21

定价：3.15元

前　言

“有限元法”是一种有十分广泛适应性和灵活性的力学计算方法，不仅在结构分析中普遍采用，而且也是连续体分析的有力工具。有限元法早期建立在对结构进行矩阵分析的基础上，但当将问题表述为泛函变分或加权余数的形式后，进行有限元散离化，就能建立有限元方程并求解，大大地拓宽了有限元法的使用范围。随着计算机和有限元分析通用程序的推广使用，有限元法已经成为一种通用分析手段，几乎适用于整体工程分析领域。

汽车的机械结构复杂。用有限元法不但能完成车身、车架等结构分析，也能对如高压喷嘴、活塞、齿轮、转向节等零、部件进行包含传热过程的应力分析，而且还能进行动力学计算，因此，是汽车设计计算的重要工具。

在教学讲义的基础上，结合科研和教学经验编写成此书，作为基础和入门教材，力求讲清楚有限元法的基本概念和计算步骤，尽量引用汽车结构计算实例，便于读者理解。考虑教学的需要和为了帮助读者掌握计算方法，适当选编了计算例题和思考题。本书主要供高等学校汽车专业学生使用，也可供机械工程类学生和有关技术人员参考。

限于编者水平，书中错漏难免，敬请批评指正，不胜感谢。

编　者

目　　录

第一章 绪 论

§1-1 有限元法思想的产生

一、工程上有限元法思想的产生

日常生活中人们经常看到复杂的建筑是由许多梁、柱、板构成。工程上完成一个复杂建筑物的计算并非易事，因为这些建筑物是整体承载的。而组成这些结构的构件都是工程技术人员十分熟悉的，相当简单的(标准化)的部件，如柱、梁、板等，这些部件力学性质很简单，只要用有限几个参数(如端点载荷、位移等)就可以表征该构件的力学状态。既然整个结构就是由这些部件(单元)组成，那么表征每一个部件力学状态的参数的集合，也就反映了整体结构的力学状态了。一个复杂结构分解为若干部件来分析，显然可以把问题简化。这就是人们常用的化整为零、去繁就简的方法。

完成工程分析，会碰到求解反映整体结构的微分方程问题。从工程角度看求解这种微分方程工作量浩繁，解的精度也不高。分析部件只需要一些代数方程就可以得到相当满意的精度的解。如果利用反映每一部件(单元)力学状态的代数方程，组集成反映整体结构状态的代数方程组，那么方程组解就是整体结构中每一构件(单元)的力学参数，各部件(单元)力学状态参数的集合，自然描写出整体结构的力学状态了。这样

把零散孤立的部件，构造成一个整体结构，完成了整体结构的分析计算。从求解的角度考虑，解代数方程组比解微分方程简单快捷得多，这就促使人们努力把描写整体结构的微分方程，转化为离散结构的代数方程组。

随着工程技术水平的提高和数学的发展，人们不单考虑那些明显由各零部件构成的结构（如板梁结构组成飞机、汽车、轮船的承载结构）的求解，而且进一步考虑连续体也可以分割成若干小部件（单元），许多部件（单元）按一定的方式联接起来，也构成一个整体，只要我们清楚每一个部件（单元）的性质，并按部件（单元）间实际联接的要求组集成整体，那么这些被人为划分成的部件（单元）的性质集合，无疑也能精确地反映整体结构的连续性和真实性。这样复杂的连续体就转化为若干离散的、力学关系较简单的小部件（单元）了。

把复杂的实际整体结构，分割成若干工程上能够分析计算的简单的单元，再把这些单元的力学关系方程，按结构的实际联接要求组集成代数方程组，求解得到的各单元的力学参数的集合，表征整体结构的解，这就是工程上有限元法的思想。

二、数学上的有限元法思想的产生

求解数理方程，只有几种特殊的微分方程才能得出简洁的解析解函数。这些微分方程对边界条件要求严格，一但边界条件改变，或者边界条件无法用解析式子表示，用解析法求解微分方程也成为不可能。实际上连续和离散是相对的，连续是有条件的，即使在技术发展程度已经如此高超的今天，人们能够测量到的物理量也仅仅是间隔较小的离散值而已。数学上解析解的正确性，人们只能用离散数值来验证，工程技术的边

界条件，也只能用离散方法(数值)给出，由此可见，用数值方法解微分方程是普遍的要求。

数值法解微分方程本身就已经把连续的(解析的)关系，划分成若干段(点)的离散关系。数值法解微分方程有“有限差分法”、“数值积分法”、里兹法等。在定义域内寻找一个，包括着若干可能函数的线性组合 y 为测试函数

$$y = \sum a_i \Phi_i \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1-1}$$

式中 Φ_i—— 可能函数；

a_i—— 可能函数的系数，待定系数。

根据边界条件确定待定系数 a_i 的值，得到测试函数 y 为方程的解，这种数值解法，就是里兹法。

数值积分和有限差分法是纯数值法，计算工作量大，精度差，特别是当部件种类较多，几何形状复杂的结构，各阶导数很难用较准确式子表示时，计算结果误差较大，使用受到较大的限制。里兹法用可能函数的组合来表示测试函数，当对结构具有的特征性质(函数)了解较清楚时，待定系数 a_i 很易确定，误差也小。但是实际结构必定由种类较多的部件组成，很难用有限个可能函数来表征整体解。某一可能函数 Φ_i 可能反映某部件(如 i) 的特征，却无法反映另一部件(如 j) 的特征，使得在整个定义域内测试函数的寻找工作难于进行，这就使里兹法的使用受到限制。

有限元法数学上可以看成从里兹法的基础上发展起来。针对里兹法的缺点，分段使用里兹法即按实际结构的特点，把整体结构划分成若干个部件(单元)，与之对应把微分方程的定义域划分成若干个子域，整体结构变成离散结构之后，可以很方便地在各个子域(单元)上找出较简单的 (j) 子域可能函

数 Φ_{ij}，并求出子域 j 的测试函数 y_j

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\Phi_{ji}$$

由于划分子域（单元）是根据结构的特点，故较易根据不同的部件（单元），找出不同的子域测试函数，大大地提高了里兹法的适应性，简化了计算。

数学上已证明，求泛函极值问题的解，与就该问题建立的求微分方程边值问题的解是一致的。不少问题用泛函变分求泛函极值的近似解，比用微分方程求近似解更方便，故经常把某些物理问题或微分方程转化为通过变分求泛函的极值问题；有些问题不存在泛函形式，可以用加权余数法直接求近似解，有限元法在这些数学基础上产生。

三、有限元法实用化的基础

把整体结构划分成许多单元，再把许多单元组集成整体结构，可见求解结构必须解决大量参数（每个单元间的参数）的相互关系运算问题。解决大量参数之间的数学运算的矩阵理论的完善，提供了解决由许多单元组成整体结构的大量参数之间的运算方法，使有限元法有简洁而准确的数学形式便于演算。大量的参数运算，大型的方程求解，其计算工作量浩繁，非人力所能。电子计算机的出现，计算速度、精度的提高，计算机容量的扩大，才有可能完成有限元的数值计算工作，所以可以认为矩阵代数和电子计算机是有限元法产生的主要前提，是有限元法实用化的基础。

§1-2　有限元法分析的主要内容

有限元法的数学基础是变分原理和分割近似原理。一根连续曲线，经过分割成若干段，如每段用直线代替这段内的曲线．当分割得足够细时，折线就非常接近原来的连续曲线。这就是日常生活中大家熟知的原理，数学上称这种方法为分片插值。整体结构分割成有限个线、面、体等基本单元(分割)，将解函数在每一个单元进行分片插值(近似)；就力学而言，结构总体能量泛函可以合理地简化为单元能量的累加，把无限自由度的二次泛函极值问题，离散为有限自由度多元二次泛函的极值问题，进一步将有限自由度二次泛函的极值问题等价为代数方程组进行数值求解，可求出待定系数。所以在数学上也有人称有限元法为“基于变分原理，构造一个逼近边值问题的差分格式”。

一、单元分析

根据整体结构的特点，按照求解的目标，划分成若干个(有限个)单元，选取合适的插值函数，在单元内进行近似插值，建立单元内已知条件和求解目标之间的关系，完成单元分析。以静力学问题为例，求解目标为变形、应力、支承反力等，已知的条件是结构的特性和材料的力学性质、载荷、支承条件；选取的插值函数常用位移函数、力函数；用力学定理的力平衡条件或虚功原理或能量原理，建立已知条件和求解目标之间的关系。当然这种关系应符合约束的要求，满足相容条件。

最常用的方法是以位移函数为插值函数，通过单元分析

建立反映单元节点力向量和单元节点位移向量之间关系的矩阵,即单元刚度矩阵,这是单元分析的主要工作。

二、整体分析

各个单元之间按一定的条件(即整体结构的实际)联接起来,建立整体结构的已知条件(如静力学问题的结构、载荷、支承条件)和求解目标(如静力学问题的位移、应力、支承反力)的关系,就是整体分析的主要工作。

根据问题的边界条件约束的实际,求出解函数(解向量表示的函数),完成整体分析的计算。

本书是有限元法的入门教材,希望通过本课程的学习,了解有限元法的数学力学基础,并将有限元法应用于汽车结构计算之中,故主要在于介绍比较简单,比较常用的方法,并且适当地介绍我们完成的计算实例,以便帮助读者掌握这种方法。

§1-3 有限元法应用概况

1956 年美国贝克策大学 R. W. Clough 教授首先公开发表飞机结构计算的矩阵分析论文,宣告结构的矩阵分析法在工程应用上的成功。1960 年 Clough 首次将结构计算的矩阵分析称为有限单元法,得到学术界的承认,从此将这种数值计算方法叫为有限元法。近二、三十年来,由于电子计算机运算速度和精度的提高,计算机容量的增加,计算机功能的改善,数值计算技术的发展,使有限元法得到广泛的应用。

有限元法最早是为解决结构计算而提出,并成功地应用于工程实践中,故建立的手段主要依据力学原理。用直接法推

导单元的载荷和位移(变形)之间的关系矩阵——单元刚度矩阵,这种方法理论概念明确,关系简单、直观,比较容易接受理解,是最广泛使用的方法。变分法用泛函的极值原理,推导单元的插值解函数,当微分方程的边值问题与泛函的极值问题存在等价关系时,就可以将前者的关系经变分原理化为有限元法,大大地拓宽有限元法的应用范围;有的物理问题用泛函描述,虽然无法以变分法建立有限元算法,但可以用加权余数法求出微分方程的近似解。由此可见有限元法已经不单是一种解决力学问题的分析计算法,而且是一种数学上解微分方程的数值计算方法。只要微分方程经分割近似(分片插值),能得到满足要求的解,就可以用有限元法进行计算。除连续体弹性力学之外,塑性力学、流体力学、传热学、结构分析动力学、变流力学等都广泛地使用有限元法计算。有限元法已经成为一种广泛使用的数学力学计算方法。

当然并非什么问题都适宜用有限元法求解。例如有些问题分片插值时,很难求出比较简单、近似程度较好(能满足计算要求)的插值函数,则无法利用分割近似方法求解;有些问题结构边界十分简单统一,利用有限差分法就能相当精确地表达解函数,就不必另外寻找分片插值函数,用有限差分法计算简单、快捷,这类问题用有限差分法计算更为方便。各类物理问题使用什么计算方法为好,应根据实际决定。

汽车工程的结构计算问题,是汽车工程技术十分重要的课题。有限元法产生后,立刻就应用在汽车结构计算之中。1974 年美国汽车工程师协会(SAE)曾召开有限元法在汽车结构计算中应用的学术会议,总结交流有限元法在汽车设计、计算中应用的经验,会议宣读的论文内容十分广泛,从小至柴油机喷油嘴,大至车身、车架,均应用有限元法进行计算。有限元

法已经被认为是汽车工程计算中一种重要的方法。

我国有限元法在60年代末、70年代初首先应用于大型水利工程(如水库大坝)的计算,70年代中后期,随着电子计算机的推广使用而应用领域不断推广。汽车工程中先后应用车架、车身计算,发动机的曲杆、活塞、连杆、轴承计算,传动系统的箱体、轴、齿轮计算,应用范围十分广泛。前期计算多数自编程序解决特定问题,近年已逐渐使计算程序通用化,扩大应用范围。由于程序的编制、调试工作量大,故国际上已集中大量科学工作者编大型的通用计算程序,大大地推广有限元法应用。

我国目前较普遍使用的有限元通用计算程序之一是1979年由美籍华裔教授张之勇先生提供的SPA-5计算程序(A structral Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear System 线性结构的动、静态分析程序)。更新一代的计算程序是功能更强,并有前处理、自动编排节点、后处理显示功能,只要输入图纸等有关原始资料,就能把变形图、应力图等自动画出,并提供设计计算者所要的特征数据。有限元计算的另一个发展趋势是把计算程序移植到微型电脑上,普及应用方面,国内已有若干商品化软件,可以预料,有限元计算法在不太长时间内将成为使用十分普遍的数学力学计算法。

第二章　有限元法分析步骤

§2-1　结构的离散化

有限元法是利用分割近似原理，把连续结构分割成若干个（有限个）子结构，再在每一个子结构上寻找求出满足一定精度要求的近似解，可见将结构划分成子结构（单元）必须考虑：

（1）单元比较容易找到表达式简单的插值函数，计算单元的已知条件和解的关系矩阵比较简便；

（2）单元种类尽量减少，可以使整体结构关系矩阵易建立；

（3）在满足计算精度要求的前提下，减少单元个数，可以减少计算工作量。

以上三点有时是相互矛盾的，所以必须根据问题的实际情况进行结构划分。实际结构若是由几何特点十分明显的若干子结构组成，首先应按几何特点来划分单元；连续结构的划分由计算者决定，一般根据结构的几何形状，边界条件、载荷特点来划分。

整体结构划分为子结构，各个子结构之间的载荷仅通过节点传递。子结构之间变形应满足连续和协调条件，但是由于有限元法是一种近似的数值计算方法，故有些单元的插值函数在边界上不能全部满足协调条件是很自然的。

在解力学问题时单元的插值函数可以选位移函数，力（应力）函数，也可以二者混合使用。使用最多，推导最简便的是用位移函数，故下面选取的插值函数均为位移函数。什么样的位移函数才能满足有限元计算收敛要求？必须令位移函数满足：

（1）单元内位移连续，单元间不会开裂、重迭或错位；

（2）有单元的刚体位移项及常应变项；

（3）单元间变形协调。

符合 1～3 条件的单元称完备单元，是测试函数收敛的充要条件；仅符合第 1,2 项要求的单元称非完备单元，是测试函数收敛的必要条件。实际计算中有的非完备单元也有很好的精度，可以这样理解：位移函数是人为规定的变形约束条件，使单元的计算刚度比实际刚度更强，放松了单元间的变形协调要求，使单元在边界上变柔，两者作用互相抵消，故非完备单元计算精度有时也可能很高。

§2-2 单 元 分 析

利用一个简单的平面桁架例子，从泛函变分和直接法二个角度进行单元分析，能从讨论中更进一步沟通在建立有限元算法方面力学原理和数学原理之间的联系。

已知平面桁架 ABC（如轮船、码头的简单吊杆）结构如图 2-1，杆 AB、CB 长分别为 l_1，l_2，截面积均为 A，材料的弹性模量为 E，与水平面夹角分别为 θ_1，θ_2，A、C 点为铰链支承，B 点吊重物力为 P，这是一个超静定结构，可以用一般结构分析法，求解得出 A、B 支座反力和 B 点的变形。如果用有限元法，同样可以求解。

一、利用泛函变分进行单元分析

1．应变能

图 2-1b 为二力杆 AB，内力沿轴线方向。设其首端点为 i，末端点 j，相应内力为 f_i，f_j。沿轴线在横截面内取任一微元

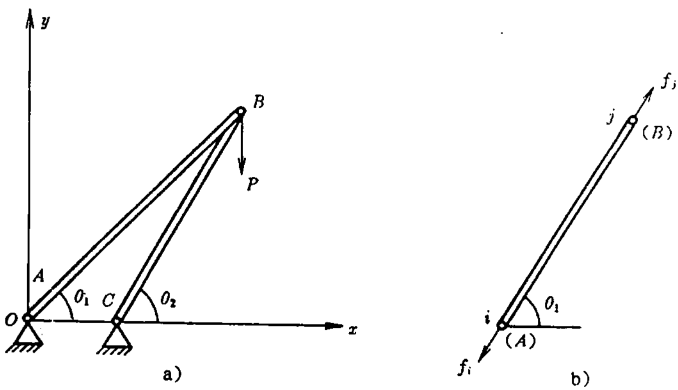


图 2-1

$ABCD—A'B'C'D'$，应力垂直于截面 $ABCD$，与杆的轴线平行。如图 2-2，微元各边长分别为 dx，dy，dz，轴向应力 σ_x 作用于 $ABCD$ 平面，设轴向位移函数为 u，则 $A'B'C'D'$ 面位移为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$，应力从 $0\rightarrow\sigma_x$ 位移必从 $0\rightarrow u$。

微元应变能 dU

$$dU=\int_0^{\sigma_x}\sigma_x\,d\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)\cdot dy\,dz-\int_0^{\sigma_x}\sigma_x\,du\,dy\,dz \quad (2\text{-}1)$$