

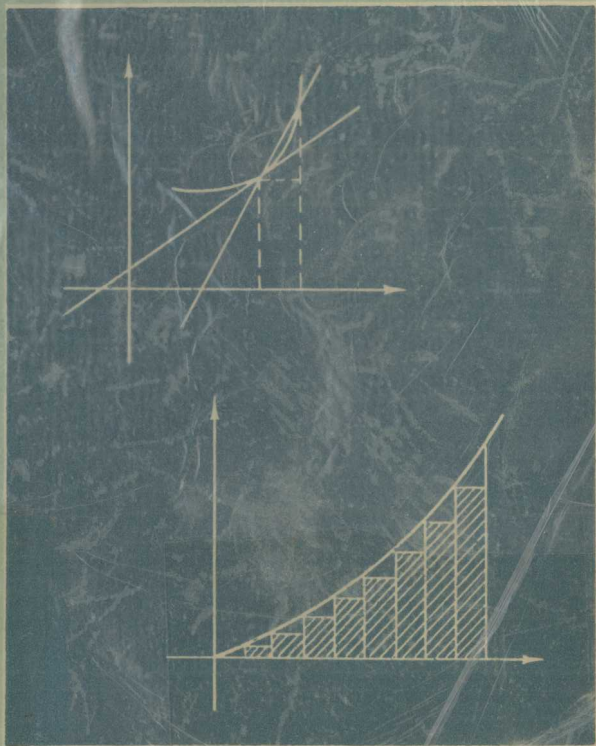
高等学校文科教材

经济应用数学基础(一)

微积分

(修订本)

赵树嫄 主编



中国人民大学出版社

高等学校文科教材
经济应用数学基础(一)

微 积 分

(修订本)

赵树嫄 主编

高等学校文科教材
经济应用数学基础(一)
微 积 分

(修订本)

赵树嫖 主编

中国人民大学出版社出版

(北京西郊海淀路39号)

人大印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本: 850×1168毫米32开 印张: 15.25

1982年5月第1版

1988年5月第2版 1989年2月第8次印刷

字数: 374000 册数: 3585 001 - 3785 000

ISBN 7 - 300 - 00105 - x

O·3

定价: 4.20元

目 录

第一章 函数	1
§ 1.1 集合.....	1
§ 1.2 实数集.....	11
§ 1.3 函数关系.....	16
§ 1.4 函数表示法.....	22
§ 1.5 建立函数关系的例题.....	25
§ 1.6 函数的几种简单性质.....	27
§ 1.7 反函数, 复合函数.....	31
§ 1.8 初等函数.....	34
§ 1.9 函数图形的简单组合与变换.....	38
习题一 (A)	40
(B)	46
第二章 极限与连续	50
§ 2.1 数列的极限.....	50
§ 2.2 函数的极限.....	54
§ 2.3 变量的极限.....	63
§ 2.4 无穷大量与无穷小量.....	65
§ 2.5 极限的运算法则.....	69
§ 2.6 两个重要的极限.....	74
§ 2.7 函数的连续性.....	82
习题二 (A)	92
(B)	99

第三章 导数与微分	103
§ 3.1 引出导数概念的例题	103
§ 3.2 导数概念	106
§ 3.3 导数的基本公式与运算法则	114
§ 3.4 高阶导数	134
§ 3.5 微分	136
习题三(A)	144
(B)	151
第四章 中值定理, 导数的应用	154
§ 4.1 中值定理	154
§ 4.2 未定式的定值法——罗彼塔法则	160
§ 4.3 函数的增减性	167
§ 4.4 函数的极值	169
§ 4.5 最大值与最小值, 极值的应用问题	175
§ 4.6 曲线的凹向与拐点	179
§ 4.7 函数图形的作法	182
§ 4.8 变化率及相对变化率在经济中的应用——边际分析与 弹性分析介绍	191
习题四(A)	207
(B)	214
第五章 不定积分	217
§ 5.1 不定积分的概念	217
§ 5.2 不定积分的性质	220
§ 5.3 基本积分公式	221
§ 5.4 换元积分法	224
§ 5.5 分部积分法	229
※§ 5.6 有理函数的积分	232
习题五(A)	239

(B)	244
第六章 定积分	246
§ 6.1 引出定积分概念的例题	246
§ 6.2 定积分的定义	250
§ 6.3 定积分的基本性质	251
§ 6.4 定积分与不定积分的关系	255
§ 6.5 定积分的换元积分法	261
§ 6.6 定积分的分部积分法	263
§ 6.7 定积分的应用	264
※§ 6.8 定积分的近似计算	272
§ 6.9 广义积分与 Γ 函数	278
习题六(A)	285
(B)	290
第七章 无穷级数	294
§ 7.1 无穷级数的概念	294
§ 7.2 无穷级数的基本性质	297
§ 7.3 正项级数	301
§ 7.4 任意项级数, 绝对收敛	306
§ 7.5 幂级数	311
§ 7.6 泰勒公式与泰勒级数	318
§ 7.7 某些初等函数的幂级数展开式	323
§ 7.8 幂级数的应用举例	330
习题七(A)	332
(B)	337
第八章 多元函数	341
§ 8.1 空间解析几何简介	341
§ 8.2 多元函数的概念	347

§ 8.3	二元函数的极限与连续	351
§ 8.4	偏导数	352
§ 8.5	全微分	356
§ 8.6	复合函数的微分法	360
§ 8.7	隐函数的微分法	363
§ 8.8	二元函数的极值	364
§ 8.9	二重积分	373
习题八(A)	388
(B)	394
第九章	微分方程与差分方程简介	398
§ 9.1	微分方程的一般概念	398
§ 9.2	一阶微分方程	400
§ 9.3	几种二阶微分方程	410
§ 9.4	二阶常系数线性微分方程	413
§ 9.5	差分方程的一般概念	420
§ 9.6	一阶和二阶常系数线性差分方程	423
习题九(A)	434
(B)	438
习题答案	440

第一章 函 数

§ 1.1 集合

(一) 集合的概念

“集合”是数学中一个重要的概念，它在现代数学中起着非常重要的作用。

我们常常研究某些事物组成的集体，例如一班学生、一批产品、全体正整数等等，这些事物组成的集体都是集合（有时简称集）。

一般说来，集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总，构成集合的事物或对象，称为集合的元素。

下面举几个集合的例子：

例1 1980年2月1日在北京市出生的人。

例2 彩电，电冰箱，录像机。

例3 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根。

例4 全体偶数。

例5 直线 $x + y - 1 = 0$ 上所有的点。

由有限个元素构成的集合，称为有限集合，如例1、2、3；由无限多个元素构成的集合，称为无限集合，如例4、5。

通常，我们用大写字母 A 、 B 、 C ……等表示集合，用小写字母 a 、 b 、 c ……等表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a \in A$ ，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a \notin A$ ，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中。

例如 如果 F 表示全体有理数的集合, 则 $\frac{3}{5} \in F$, $\sqrt{2} \notin F$ 。

我们这里讲的集合, 具有确定性的特征, 即对于某一个元素是否属于某个集合是确定的, “是”或者“不是”二者必居其一。如前面例2中的集合是彩电, 电冰箱, 录像机三个对象的汇总。但是假如说“高档消费品”的汇总, 则不是我们这里所讨论的集合, 因为对构成它的对象, 人们的看法是不一致的。

(二) 集合的表示法

(1) 列举法: 按任意顺序列出集合的所有元素, 并用花括号 $\{ \}$ 括起来。

例1 由 a, b, c, d 四个元素组成的集合 A , 可表示为

$$A = \{ a, b, c, d \}$$

例2 由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根所构成的集合 A , 可表示为

$$A = \{ 2, 3 \}$$

用列举法表示集合时, 必须列出集合的所有元素, 不得遗漏和重复。

(2) 描述法: 设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则, A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合, 则记为

$$A = \{ a | P(a) \}$$

例3 设 A 为 $x^2 + 5x + 6 = 0$ 的根构成的集合, 可表示为

$$A = \{ x | x^2 + 5x + 6 = 0 \}$$

例4 设 A 为全体偶数的集合, 可表示为

$$A = \{ x | x = 2n, n \text{ 为整数} \}$$

集合以及集合间的关系可以用图形表示, 称为文氏图。文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合, 如图1-1。集合内的元素以区域内的点表示。

(三) 全集与空集

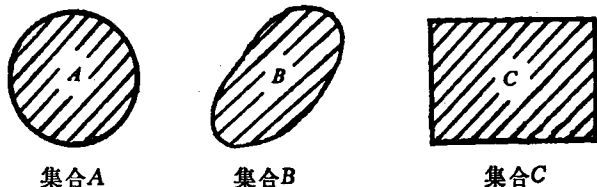


图 1-1

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 U 。全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集。例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；讨论的问题包括正整数和负整数，则全体正整数的集合就不是全集。又如，要检查某工厂产品的优劣，则全厂产品为全集；如只检查某车间，则该车间产品为全集。

不包含任何元素的集合称为空集，记作 Φ 。

例1 $x^2 + 1 = 0$ 的实数根集合为空集。

例2 平面上两条平行线的交点集合为空集。

注意 $\{0\}$ 及 $\{\Phi\}$ 都不是空集，前者含有元素“0”，后者以空集“ Φ ”为其元素。

(四) 子集

定义1.1 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即“如果 $a \in A$ ，则 $a \in B$ ”，则称 A 为 B 的子集。记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A 。如图1-2。

例1 设 N 表示全体自然数的集合， F 表示全体有理数的集合，则有

$$N \subset F$$

例2 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B = \{1, 3, 5\}$ ，则

$$B \subset A$$

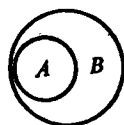


图 1-2

定义1.2 设有集合 A 和 B ，如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$ 。

例3 设 $A = \{x | x \text{ 为大于 } 1 \text{ 小于 } 4 \text{ 的整数}\}$

$$B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

则 $A = B$

关于子集有下列结论:

- (1) $A \subset A$, 即“集合 A 是其自己的子集”;
- (2) 对任意集合 A , 有 $\emptyset \subset A$, 即“空集是任意集合的子集”;
- (3) 如果 $A \subset B$, $B \subset C$, 则 $A \subset C$, 即“集合的包含关系有传递性”。

(五) 集合的运算

前面我们给出了集合的概念, 下面我们将定义集合的运算。这些运算与数的运算一样都是来源于实践, 反映了客观世界中数量间的关系。

先看一个例子。

例 某工地设有一个日用品代销点, 代销商品有: 香烟, 啤酒, 糖果, 肥皂, 洗衣粉, 毛巾, 牙刷, 牙膏, 搪瓷杯, 手电筒共10种。该店每周进货两次。

某周第一次进货的商品品种集合 $A_1 = \{\text{香烟, 啤酒, 肥皂, 洗衣粉, 搪瓷杯}\}$; 第二次进货的商品品种集合 $A_2 = \{\text{香烟, 啤酒, 肥皂, 牙膏, 毛巾, 搪瓷杯}\}$ 。

两次共进货的商品品种集合 $B = \{\text{香烟, 啤酒, 肥皂, 洗衣粉, 搪瓷杯, 牙膏, 毛巾}\}$; 两次都进货的商品品种的集合为 $C = \{\text{香烟, 啤酒, 肥皂, 搪瓷杯}\}$; 该周没进货的商品品种集合 $D = \{\text{糖果, 牙刷, 手电筒}\}$ 。

这些关系都是集合间的运算关系。下面给出集合运算的定义。

定义1.3 设有集合 A 和 B , 由 A 和 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的并, 记为 $A \cup B$; 如图1-3。即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

集合的并有下列性质:

(1) $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$

(2) 对任何集合 A , 有

$$A \cup \emptyset = A, A \cup U = U, A \cup A = A$$

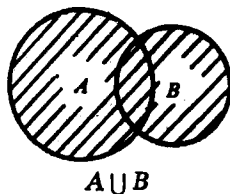


图 1-3

定义1.4 设有集合 A 和 B , 由 A 和 B 的

所有公共元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交, 记为 $A \cap B$, 如图 1-4 的阴影部分。即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

集合的交有下列性质:

(1) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$

(2) 对任何集合 A , 有

$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap U = A, A \cap A = A$$

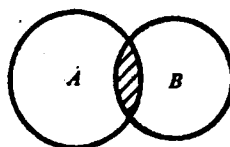


图 1-4

例1 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

例2 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b\}$, 则

$$A \cup B = \{a, b, c\}, A \cap B = \{a, b\}$$

例3 设 A 为某单位会英语的人的集合, B 为会日语的人的集合, 则

$A \cup B$ 表示会英语或会日语的人的集合,

$A \cap B$ 表示既会英语又会日语的人的集合。

例4 设 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}, B = \{x | x > 0\}$, 则

$$A \cup B = \{x | x \geq -1\}$$

$$A \cap B = \{x | 0 < x \leq 1\}$$

例5 如果 A 为奇数集合, B 为偶数集合, 则

$$A \cup B = \{x | x \text{ 为奇数或偶数}\}$$

$$A \cap B = \Phi$$

如果 $A \cap B = \Phi$ ，则称 A 、 B 是分离的，如图 1-5。

定义 1.5 设有集合 A 和 B ，属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记为 $A - B$ ，如图 1-6 的阴影部分。

即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

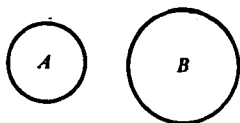


图 1-5

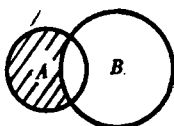


图 1-6

例 6 如果 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ，则

$$A - B = \{2, 4\}$$

定义 1.6 全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的补集，记为 A' ，如图 1-7。即

$$A' = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$$

补集有下列性质：

$$A \cup A' = U, \quad A \cap A' = \Phi$$

例 7 设参加考试的学生为全集 U 。

如果 A 表示及格的学生集合，则 A' 表示不及格的学生集合。

如果将考分分为优秀、良好、及格和不及格四类，以 A 表示考分为优秀或良好的学生集合，则 A' 表示考分为及格或不及格的学生集合。

例 8 前面工地代销点的例子中，全集 $U = \{\text{香烟, 啤酒, 糖果, 肥皂, 洗衣粉, 毛巾, 牙刷, 牙膏, 搪瓷杯, 手电筒}\}$ 。

第一次进货品种集合 $A_1 = \{\text{香烟, 啤酒, 肥皂, 洗衣粉, 搪瓷杯}\}$ 。

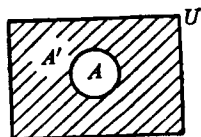


图 1-7

第二次进货品种集合 $A_2 = \{ \text{香烟, 啤酒, 肥皂, 牙膏, 毛巾, 搪瓷杯} \}$ 。

两次共进货品种集合 $B = A_1 \cup A_2 = \{ \text{香烟, 啤酒, 肥皂, 洗衣粉, 搪瓷杯, 牙膏, 毛巾} \}$ 。

两次均进货品种集合 $C = A_1 \cap A_2 = \{ \text{香烟, 啤酒, 肥皂, 搪瓷杯} \}$ 。

该周没进货的品种集合 $D = (A_1 \cup A_2)' = \{ \text{糖果, 牙刷, 手电筒} \}$ 。

设第一次进货而第二次未进货的品种集合为 E , 则 $E = A_1 - A_2 = \{ \text{洗衣粉} \}$ 。

例9 某地区的100个工厂,有80个工厂生产甲种机床,以集合 A 表示这些厂,有61个厂生产乙种机床,以集合 B 表示这些厂,有55个厂两种机床都生产。试用集合表示下列各类工厂,并计算出各类工厂的数目:

- (1) 生产甲种机床而不生产乙种机床的工厂;
- (2) 生产乙种机床而不生产甲种机床的工厂;
- (3) 甲、乙两种机床中至少生产其中一种的工厂;
- (4) 甲、乙两种机床都不生产的工厂。

解: (1) 生产甲种机床而不生产乙种机床的工厂的集合为 $A - B$, 工厂数目为

$$80 - 55 = 25(\text{个})$$

(2) 生产乙种机床而不生产甲种机床的工厂集合为 $B - A$, 工厂数目为

$$61 - 55 = 6(\text{个})$$

(3) 甲、乙两种机床中至少生产其中一种的工厂的集合为 $A \cup B$, 工厂数目为

$$55 + 25 + 6 = 86(\text{个}), \text{ 或 } 80 + 61 - 55 = 86(\text{个})$$

(4) 甲、乙两种机床都不生产的工厂集合为 $(A \cup B)'$, 工厂

数目为

$$100 - 86 = 14(\text{个})$$

文氏图见图1-8。

(六) 集合运算律

(1) 交换律: (i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律: (i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律: (i) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(ii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(4) 摩根律: (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

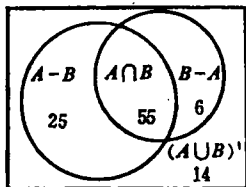


图 1-8

下面证明结合律的(i)和摩根律的(i), 作为示范, 其它几条定律可类似地证明。

结合律(i)的证明:

如果 $x \in (A \cup B) \cup C$

则 $x \in A \cup B$ 或 $x \in C$

即 $x \in A$ 或 $x \in B$ 或 $x \in C$

因而 $x \in A$ 或 $x \in B \cup C$

所以 $x \in A \cup (B \cup C)$

由此可得 $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

同理可证 $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

所以 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

说明结合律(i)成立的文氏图见图1-9。

摩根律(i)的证明:

如果 $x \in (A \cup B)'$, 则 $x \notin A \cup B$

即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$

亦即 $x \in A'$ 且 $x \in B'$

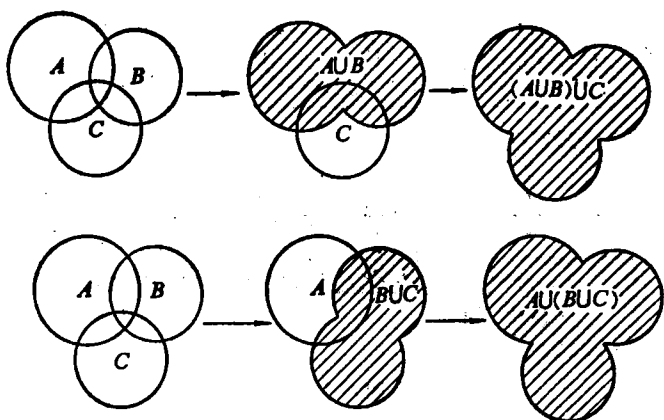


图 1-9

因此 $x \in A' \cap B'$
 所以 $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$
 反之, 如果 $x \in A' \cap B'$
 则 $x \in A'$ 且 $x \in B'$
 即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$
 亦即 $x \notin A \cup B$
 因此 $x \in (A \cup B)'$
 所以 $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$
 于是得到 $(A \cup B)' = A' \cap B'$

说明摩根律(i)成立的文氏图见图1-10。

例1 设学生考试成绩分为优、良、中、差四类。如果 A 是成绩为优的学生集合, B 是成绩为良的学生集合, 试验证摩根律(i)成立。

解: $A \cup B$ 是成绩为优或良的学生集合, 因此, $(A \cup B)'$ 是成绩为中或差的学生集合。 A' 是成绩为良或中或差的学生集合, B' 是成绩为优或中或差的学生集合, 因此 $A' \cap B'$ 是成绩为中或差的学生集合。所以 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ 。

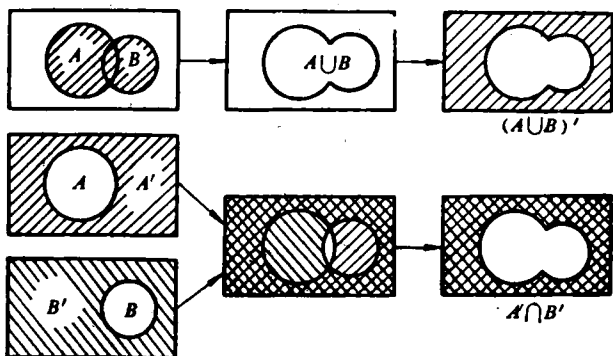


图 1-10

例2 利用集合运算律证明:

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$$

证: 由分配律(i)有

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap B = U \cap B = B$$

(七) 集合的笛卡尔乘积

集合的元素是不涉及顺序问题的, 例如 $\{a, b\}$ 与 $\{b, a\}$ 是指同一个集合。但有时需要研究元素必须按某种规定顺序排列的问题。

将两元素 x 和 y 按前后顺序排列成一个元素组 (x, y) , 称为有序元素组。 (x, y) 与 (y, x) 是两个不同的有序元素组。

对于有序元素组 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 当且仅当 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$ 时, 才称 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 是相等的。

由两个元素组成的有序数组 (x_1, x_2) 称为二元有序数组, 由三个元素组成的有序数组 (x_1, x_2, x_3) 称为三元有序数组, …… 由 n 个元素组成的有序数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 称为 n 元有序数组。

定义1.7 设有集合 A 和 B 。 $x \in A, y \in B$, 所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合, 称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积。记为