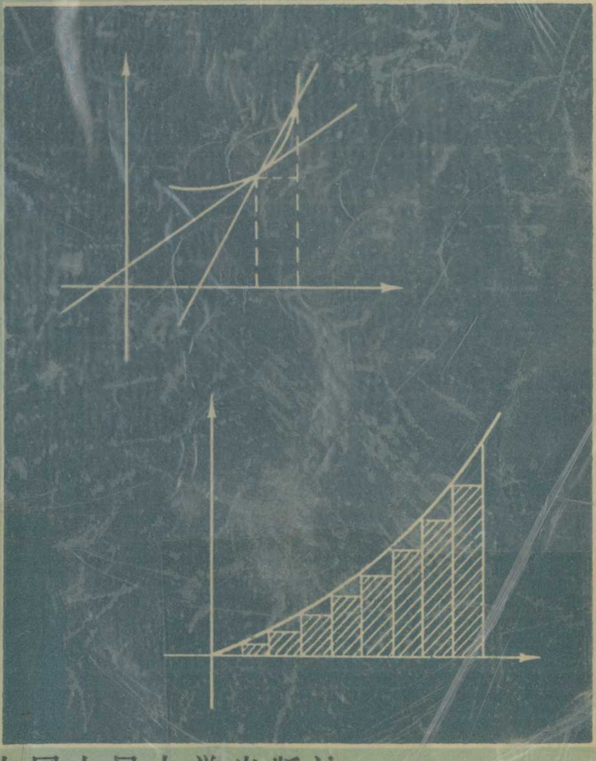
高等学校文科教材

经济应用数学基础（一）

微积分

（修订本）

赵树嫄 主编



中国人民大学出版社

高等学校文科教材

经济应用数学基础（一）

微积分

（修订本）

赵树嫄 主编

高等学校文科教材
经济应用数学基础(一)
微　积　分
(修订本)
赵树嫄　主编
•
中国人民大学出版社出版
(北京西郊海淀路39号)
人大印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
•
开本：850×1168毫米32开　印张：15.25
1982年5月第1版
1988年5月第2版　1989年2月第8次印刷
字数：374000　册数：3585 001－3785 000
•
ISBN　7－300－00105－x
O·3　　定价：4.20元

目　录

第一章　函　数

§1.1　集合

（一）集合的概念

“集合”是数学中一个重要的概念，它在现代数学中起着非常重要的作用。

我们常常研究某些事物组成的集体，例如一班学生、一批产品、全体正整数等等，这些事物组成的集体都是集合（有时简称集）。

一般说来，集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总，构成集合的事物或对象，称为集合的元素。

下面举几个集合的例子：

例1　1980年2月1日在北京市出生的人。

例2　彩电，电冰箱，录像机。

例3　$x^2-5x+6=0$的根。

例4　全体偶数。

例5　直线$x+y-1=0$上所有的点。

由有限个元素构成的集合，称为有限集合，如例1、2、3；由无限多个元素构成的集合，称为无限集合，如例4、5。

通常，我们用大写字母A、B、C……等表示集合，用小写字母a、b、c……等表示集合的元素。如果a是集合A的元素，则记作$a\in A$，读作a属于A或a在A中；如果a不是集合A的元素，则记作$a\overline{\in}A$，读作a不属于A或a不在A中。

例如 如果F表示全体有理数的集合，则$\frac{3}{5}\in F$，$\sqrt{2}\ \overline{\in}\ F$。

我们这里讲的集合，具有确定性的特征，即对于某一个元素是否属于某个集合是确定的，“是”或者“不是”二者必居其一。如前面例2中的集合是彩电，电冰箱，录像机三个对象的汇总。但是假如说“高档消费品”的汇总，则不是我们这里所讨论的集合，因为对构成它的对象，人们的看法是不一致的。

（二）集合的表示法

（1）列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号$\{\ \}$括起来。

例1 由a、b、c、d四个元素组成的集合A，可表示为

$$A=\{a,b,c,d\}$$

例2 由$x^2-5x+6=0$的根所构成的集合A，可表示为

$$A=\{2,3\}$$

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复。

（2）描述法：设$P(a)$为某个与a有关的条件或法则，A为满足$P(a)$的一切a构成的集合，则记为

$$A=\{a\mid P(a)\}$$

例3 设A为$x^2+5x+6=0$的根构成的集合，可表示为

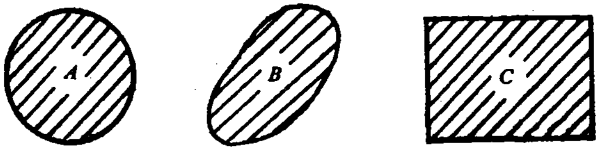
$$A=\{x\mid x^2+5x+6=0\}$$

例4 设A为全体偶数的集合，可表示为

$$A=\{x\mid x=2n,n\text{为整数}\}$$

集合以及集合间的关系可以用图形表示，称为文氏图。文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，如图1-1。集合内的元素以区域内的点表示。

（三）全集与空集



集合A　　　　集合B　　　　集合C

图　1-1

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为U。全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集。例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；讨论的问题包括正整数和负整数，则全体正整数的集合就不是全集。又如，要检查某工厂产品的优劣，则全厂产品为全集；如只检查某车间，则该车间产品为全集。

不包含任何元素的集合称为空集，记作Φ。

例1　$x^2+1=0$的实数根集合为空集。

例2　平面上两条平行线的交点集合为空集。

注意　$\{0\}$及$\{\Phi\}$都不是空集，前者含有元素"0"，后者以空集"Φ"为其元素。

（四）子集

定义1.1　如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，即"如果$a\in A$，则$a\in B$"，则称A为B的子集。记为$A\subset B$或$B\supset A$，读作A包含于B或B包含A。如图1-2。

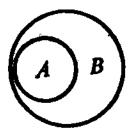


图　1-2

例1　设N表示全体自然数的集合，F表示全体有理数的集合，则有

$$N\subset F$$

例2　设$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,5\}$，则

$$B\subset A$$

定义1.2　设有集合A和B，如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B相等，记作$A=B$。

例3 设$A=\{x|x$为大于1小于4的整数$\}$

$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$

则$A=B$

关于子集有下列结论：

(1) $A\subset A$，即"集合A是其自己的子集"；

(2) 对任意集合A，有$\Phi\subset A$，即"空集是任意集合的子集"；

(3) 如果$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$，即"集合的包含关系有传递性"。

（五）集合的运算

前面我们给出了集合的概念，下面我们将定义集合的运算。这些运算与数的运算一样都是来源于实践，反映了客观世界中数量间的关系。

先看一个例子。

例 某工地设有一个日用品代销点，代销商品有：香烟，啤酒，糖果，肥皂，洗衣粉，毛巾，牙刷，牙膏，搪瓷杯，手电筒共10种。该店每周进货两次。

某周第一次进货的商品品种集合$A_1=\{$香烟，啤酒，肥皂，洗衣粉，搪瓷杯$\}$；第二次进货的商品品种集合$A_2=\{$香烟，啤酒，肥皂，牙膏，毛巾，搪瓷杯$\}$。

两次共进货的商品品种集合$B=\{$香烟，啤酒，肥皂，洗衣粉，搪瓷杯，牙膏，毛巾$\}$；两次都进货的商品品种的集合为$C=\{$香烟，啤酒，肥皂，搪瓷杯$\}$；该周没进货的商品品种集合$D=\{$糖果，牙刷，手电筒$\}$。

这些关系都是集合间的运算关系。下面给出集合运算的定义。

定义1.3 设有集合A和B，由A和B的所有元素构成的集合，称为A与B的并，记为$A\cup B$，如图1-3。即

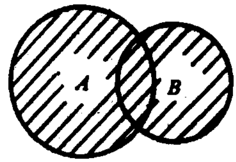
$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$$

集合的并有下列性质：

(1) $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$

(2) 对任何集合A，有

$$A\cup\Phi=A,A\cup U=U,A\cup A=A$$



$A\cup B$

图 1-3

定义1.4 设有集合A和B，由A和B的所有公共元素构成的集合，称为A与B的交，记为$A\cap B$，如图1-4的阴影部分。即

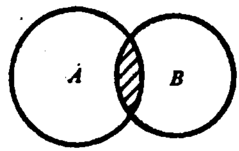
$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}$$

集合的交有下列性质：

(1) $A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$

(2) 对任何集合A，有

$$A\cap\Phi=\Phi,\ A\cap U=A,A\cap A=A$$



$A\cap B$

图 1-4

例1 设$A=\{1,2,3,4\}$

$B=\{3,4,5,6\}$

则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A\cap B=\{3,4\}$

例2 设$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b\}$，则

$A\cup B=\{a,b,c\}$，$A\cap B=\{a,b\}$

例3 设A为某单位会英语的人的集合，B为会日语的人的集合，则

$A\cup B$表示会英语或会日语的人的集合，

$A\cap B$表示既会英语又会日语的人的集合。

例4 设$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，则

$A\cup B=\{x\mid x\geqslant -1\}$

$A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

例5 如果A为奇数集合，B为偶数集合，则

$A\cup B=\{x\mid x\text{为奇数或偶数}\}$

$$A \cap B = \Phi$$

如果$A \cap B = \Phi$，则称A、B是分离的，如图1-5。

定义1.5 设有集合A和B，属于A而不属于B的所有元素构成的集合，称为A与B的差，记为$A - B$，如图 1-6 的阴影部分。即

$$A - B = \{ x \mid x \in A 且 x \notin B \}$$

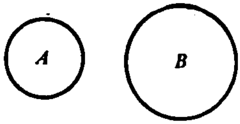


图 1-5

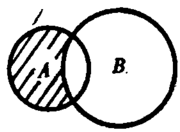


图 1-6

例6 如果$A = \{ 1,2,3,4 \}$，$B = \{ 1,3,5,7 \}$，则

$$A - B = \{ 2,4 \}$$

定义1.6 全集U中所有不属于A的元素构成的集合，称为A的补集，记为A'，如图1-7。即

$$A' = \{ x \mid x \in U 且 x \notin A \}$$

补集有下列性质：

$$A \cup A' = U, \quad A \cap A' = \Phi$$

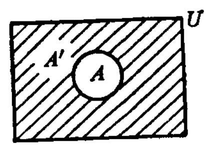


图 1-7

例7 设参加考试的学生为全集U。

如果A表示及格的学生集合，则A'表示不及格的学生集合。

如果将考分分为优秀、良好、及格和不及格四类，以A表示考分为优秀或良好的学生集合，则A'表示考分为及格或不及格的学生集合。

例8 前面工地代销点的例子中，全集$U = \{$香烟，啤酒，糖果，肥皂，洗衣粉，毛巾，牙刷，牙膏，搪瓷杯，手电筒$\}$。

第一次进货品种集合$A_1 = \{$香烟，啤酒，肥皂，洗衣粉，搪瓷杯$\}$。

第二次进货品种集合$A_2=\{$香烟，啤酒，肥皂，牙膏，毛巾，搪瓷杯$\}$。

两次共进货品种集合$B=A_1\cup A_2=\{$香烟，啤酒，肥皂，洗衣粉，搪瓷杯，牙膏，毛巾$\}$。

两次均进货品种集合$C=A_1\cap A_2=\{$香烟，啤酒，肥皂，搪瓷杯$\}$。

该周没进货的品种集合$D=(A_1\cup A_2)'=\{$糖果，牙刷，手电筒$\}$。

设第一次进货而第二次未进货的品种集合为E，则$E=A_1-A_2=\{$洗衣粉$\}$。

例9 某地区的100个工厂，有80个工厂生产甲种机床，以集合A表示这些厂，有61个厂生产乙种机床，以集合B表示这些厂，有55个厂两种机床都生产。试用集合表示下列各类工厂，并计算出各类工厂的数目：

(1) 生产甲种机床而不生产乙种机床的工厂；

(2) 生产乙种机床而不生产甲种机床的工厂；

(3) 甲、乙两种机床中至少生产其中一种的工厂；

(4) 甲、乙两种机床都不生产的工厂。

解：(1) 生产甲种机床而不生产乙种机床的工厂的集合为$A-B$，工厂数目为

$$80-55=25(\text{个})$$

(2) 生产乙种机床而不生产甲种机床的工厂集合为$B-A$，工厂数目为

$$61-55=6(\text{个})$$

(3) 甲、乙两种机床中至少生产其中一种的工厂的集合为$A\cup B$，工厂数目为

$$55+25+6=86(\text{个})，或80+61-55=86(\text{个})$$

(4) 甲、乙两种机床都不生产的工厂集合为$(A\cup B)'$，工厂

数目为

$$100-86=14(\text{个})$$

文氏图见图1-8。

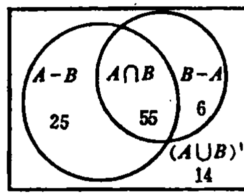


图 1-8

（六）集合运算律

（1）交换律：(i) $A\cup B=B\cup A$

(ii) $A\cap B=B\cap A$

（2）结合律：(i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(ii) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

（3）分配律：(i) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

（4）摩根律：(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

(ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

下面证明结合律的(i)和摩根律的(i)，作为示范，其它几条定律可类似地证明。

结合律（i）的证明：

如果　$x\in(A\cup B)\cup C$

则　$x\in A\cup B$ 或 $x\in C$

即　$x\in A$ 或 $x\in B$ 或 $x\in C$

因而　$x\in A$ 或 $x\in B\cup C$

所以　$x\in A\cup(B\cup C)$

由此可得　$(A\cup B)\cup C\subset A\cup(B\cup C)$

同理可证　$A\cup(B\cup C)\subset(A\cup B)\cup C$

所以　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

说明结合律(i)成立的文氏图见图1-9。

摩根律(i)的证明：

如果　$x\in(A\cup B)'$，则 $x\notin A\cup B$

即　$x\notin A$ 且 $x\notin B$

亦即　$x\in A'$ 且 $x\in B'$

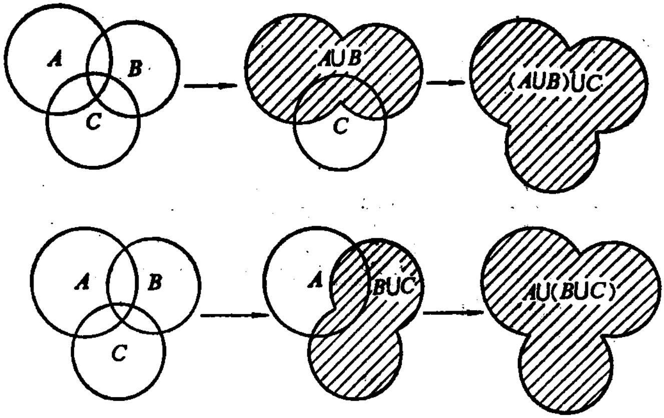


图 1-9

因此　　$x \in A' \cap B'$

所以　　$(A \cup B)' \subset A' \cap B'$

反之，如果　$x \in A' \cap B'$

则　　$x \in A'$ 且 $x \in B'$

即　　$x \notin A$ 且 $x \notin B$

亦即　　$x \notin A \cup B$

因此　　$x \in (A \cup B)'$

所以　　$A' \cap B' \subset (A \cup B)'$

于是得到　$(A \cup B)' = A' \cap B'$

说明摩根律(i)成立的文氏图见图1-10。

例1　设学生考试成绩分为优、良、中、差四类。如果 A 是成绩为优的学生集合，B 是成绩为良的学生集合，试验证摩根律(i)成立。

解： $A \cup B$ 是成绩为优或良的学生集合，因此，$(A \cup B)'$ 是成绩为中或差的学生集合。A' 是成绩为良或中或差的学生集合，B' 是成绩为优或中或差的学生集合，因此 $A' \cap B'$ 是成绩为中或差的学生集合。所以 $(A \cup B)' = A' \cap B'$。

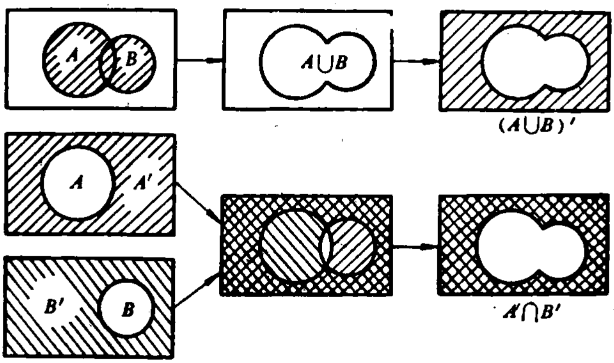


图 1-10

例2 利用集合运算律证明：

$$(A\cap B)\cup(A'\cap B)=B$$

证：由分配律(i)有

$$(A\cap B)\cup(A'\cap B)=(A\cup A')\cap B=U\cap B=B$$

（七）集合的笛卡尔乘积

集合的元素是不涉及顺序问题的，例如 $\{a,\ b\}$ 与 $\{b,\ a\}$ 是指同一个集合。但有时需要研究元素必须按某种规定顺序排列的问题。

将两元素 x 和 y 按前后顺序排列成一个元素组 $(x,\ y)$，称为有序元素组。$(x,\ y)$ 与 (y,x) 是两个不同的有序元素组。

对于有序元素组 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$，当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$ 时，才称 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$ 是相等的。

由两个元素组成的有序数组 $(x_1,\ x_2)$ 称为二元有序数组，由三个元素组成的有序数组 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 称为三元有序数组，……，由 n 个元素组成的有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)$ 称为 n 元有序数组。

定义1.7 设有集合 A 和 B。$x\in A$，$y\in B$，所有二元有序数组 $(x,\ y)$ 构成的集合，称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积。记为