21世纪高等院校创新教材

微积分学习与提高

柳翠华　王志宏　熊德之　主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪高等院校创新教材·

微积分学习与提高

柳翠华　王志宏　熊德之　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系高等学校微积分课程辅导教材，内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学及其应用、重积分、微分方程与差分方程、无穷级数.各章均由基本要求、内容提要、疑难解析、例题精讲和综合练习几部分组成，以帮助读者复习基础知识，掌握基本方法和应用.

本书可作为学习微积分课程的参考用书，也可供考研复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习与提高/柳翠华，王志宏，熊德之主编.—北京：科学出版社，2008

21世纪高等院校创新教材

ISBN 978-7-03-022862-8

Ⅰ.微… Ⅱ.①柳…②王…③熊… Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第133154号

责任编辑：张颖兵 梅 莹/责任校对：曾 莉

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中远印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008年9月第一次印刷 印张：21 1/4

印数：1—5 000 字数：418 000

定价：35.00元

前　言

“数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是知识，而且是一种素养；不仅是科学，而且是一种文化.”在现代科学技术和经济建设中，数学的应用越来越广泛.能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志.另一方面，由于数学概念抽象，逻辑性强，分析解决问题的方法灵活巧妙，加上近年来很多专业因课程设置增多而减少了数学课时，这使学生在学习数学的过程中遇到许多障碍，感到困难重重.书店里，适用于理工类学生用的高等数学辅导书很丰富，但专为经济管理、文科等专业学生用的微积分参考书少之又少.我们编写此书，旨在增强学生学习微积分的兴趣，提高学习效率，让学生更好地把握微积分课程的主脉，使学生在巩固基础，掌握重点的同时，对难点有所突破.

本书紧扣教育部制定的《经济管理类数学课程教学基本要求》，参照修订后的《全国硕士研究生统一考试数学考试大纲》编写，内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数的微分法及其应用、重积分、无穷级数、微分方程与差分方程以及附录部分.**附录部分**编者精心选录了近年来全国硕士生入学考试数学试题中的典型试题，并对各题的特点进行归纳分析及详细的解答.其余各章都由基本要求、内容提要、疑难解析、例题精讲、综合练习和答案组成.**基本要求**介绍了教学大纲对各知识点所要达到的目标要求；**内容提要**简略地呈现各章中零散繁杂的概念、公式、定理等，使读者在短时间内能系统地了解该章的主干内容，有规律有条理地理解和记忆，便于更有效地应用.**疑难解析**中，编者用心把平时教学过程中学生常出的错误或不易理解的重难点以问题形式提出，并加以解答.读者在这里可根据提问，先主动思考，再参阅解答，感受到犹如与老师在面对面地交流.**例题精讲**部分，我们精选各知识点具有代表性、启发性的典型例题，由浅入深地进行分析、解答.例题分A、B两类.A类例题根据教学基本要求，以灵活多样的题型帮助读者复习基础知识，掌握基本方法和应用；B类例题以考研大纲为标准，难度相对较大，解法往往方便

快捷，有志考研的读者朋友阅读该部分后会有豁然开朗之感. **综合练习**题型丰富，层次分明，根据难易程度分A、B两类，每道练习题都配有答案，稍难题还附有分析或解题过程.

本书由柳翠华、王志宏、熊德之主编. 柳翠华负责拟定编写大纲，熊德之编写第一章和附录部分，柳翠华编写第二章、第三章，阮正顺编写第四章、第五章，王志宏编写第六章、第七章，刘雁鸣编写第八章、第九章. 全书由柳翠华、王志宏、熊德之统稿. 在编写过程中，我们参阅了大量微积分教材及高等数学辅导资料，并采用了各资料中的一些问题，在此谨向作者表示诚挚的感谢！也感谢郭光耀等对本书的帮助！

由于时间紧迫，加上编者水平所限，书中难免存在不妥与错误，恳请广大读者批评指正.

编　者

2008年8月

目　　录

第一章　函数与极限

基 本 要 求

（1）加深对函数概念的理解和对函数基本性态（奇偶性、周期性、单调性、有界性）的了解.

（2）理解复合函数的概念；了解反函数的概念，理解初等函数的概念.

（3）会建立简单的经济问题的函数关系式；了解经济学中常用的一些函数.

（4）理解数列极限和函数极限的概念.

（5）了解无穷大、无穷小、高阶无穷小和等价无穷小的概念；会用等价无穷小求极限.

（6）掌握极限的四则运算法则，会用变量代换求某些简单复合函数的极限.

（7）了解极限存在的两个准则（夹逼准则和单调有界准则）；了解两个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，并会用它们求一些相关的极限.

（8）理解函数连续的概念；了解函数间断点的概念，会判断间断点的类型.

（9）了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和有界性定理、零点定理和介值定理）.

内 容 提 要

1. 函数概念

函数的定义，函数的运算，求函数的定义域，求函数表达式.

2. 函数特性

有界性、单调性、奇偶性和周期性.

3. 经济学中的常用函数

1）需求函数

$Q=f(P)$，其中 Q 为需求量，P 为价格. 通常需求函数是单调减少函数.

常用的需求函数：

线性函数 $Q=-aP+b$,其中 $a>0$, $b>0$;

幂函数 $Q=aP^{-b}$,其中 $a>0$, $b>0$;

指数函数 $Q=ae^{-bP}$,其中 $a>0$, $b>0$.

2) 供给函数

$Q=g(P)$, 其中 Q 为供给量,P 为价格,一般供给函数是单调增加函数.

常用的供给函数:

线性函数 $Q=aP-b$,其中 $a>0$, $b>0$;

幂函数 $Q=aP^{b}$,其中 $a>0$, $b>0$;

指数函数 $Q=ae^{bP}$,其中 $a>0$, $b>0$.

3) 成本函数

$C(Q)=C_0+C_1(Q)$, 其中 C 为成本,Q 为产量或销售量,C_0 为固定成本,C_1 为可变成本.

平均成本函数 $\overline{C}(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}=\dfrac{C_0}{Q}+\dfrac{C_1(Q)}{Q}=\overline{C_0}(Q)+\overline{C_1}(Q)$, 其中$\overline{C_0}(Q)$和$\overline{C_1}(Q)$分别是平均固定成本和平均可变成本.

4) 收益函数

$R=R(Q)=PQ$, 其中 R 表示总收益,Q 表示销售量,P 为价格.

5) 利润函数

$$L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

6) 库存函数

设在时间 T 内,总需求量为 Q,每次进货批量为 $q=\dfrac{Q}{n}$, 每件物品单位时间贮存费用为 C_1,每次进货费用为 C_2,平均库存为$\dfrac{q}{2}$,则总费用 E 为

$$E=\frac{1}{2}C_1Tq+C_2\frac{Q}{q}.$$

4. 极限定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时, $|x_n-a|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

一般地,$\lim f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 时刻,从该时刻以后,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

5. 极限的性质

唯一性、有界性、保号性.

6. 极限的运算法则

(1) 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\begin{cases}\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B; \\ \lim f(x)g(x)=AB; \\ \lim f(x)/g(x)=A/B \quad (B\neq 0).\end{cases}$$

(2) $\lim f(x)=0$，$g(x)$ 有界 $\Rightarrow \lim f(x)g(x)=0$.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ 且 $u=\varphi(x)\neq a$ $(x\in \mathring{U}(x_0))$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

7. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小与极限的关系：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x) \quad (\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0).$$

(2) 无穷小与无穷大的关系：在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小，恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

(3) 无穷小的比较.

(4) 无穷小替换定理.

(5) 常用等价无穷小：$x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a,$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x \ (\alpha\neq 0).$$

8. 两个准则和两个重要极限

准则 I：夹逼定理.

准则 II：单调有界数列必有极限.

两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

9. 函数连续的概念

在点 x_0 处的等价定义：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0, \text{当} |x-x_0|<\delta \text{时,恒有} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

左连续：

$$f(x_0-0)=f(x_0).$$

右连续：

$$f(x_0+0)=f(x_0).$$

10. 间断点的类型

第一类间断点：x_0 为 $f(x)$的间断点，且 $f(x_0 \pm 0)$都存在.

第二类间断点：不是第一类间断点的任何间断点.

11. 连续函数的运算

(1) 四则运算.

(2) 复合运算.

(3) 初等函数在其定义区间内是连续的.

12. 闭区间上连续函数的性质

有界性定理、最大值最小值定理、零点定理、介值定理.

13. 连续复利

设本金为 A_0，年利率为 r，如果一年分 n 期计息，则每期利率为$\frac{r}{n}$，k 年后本利和为

$$A_k=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk}.$$

如果计息期数 $n\to\infty$，称为连续复利，则 k 年后的本利和为

$$A_k=A_0\mathrm{e}^{rk}.$$

疑 难 解 析

1. 单调函数必存在反函数，不单调的函数是否一定没有反函数?

答 不是的. 函数 f 是否存在反函数，取决于 f 是否为 D 到 $f(D)$的一一映射. 如果是，则存在反函数，否则就不存在反函数. 函数 f 在 D 上单调只是 f 为一一映射的一个充分而非必要条件. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x & (-1\leqslant x\leqslant 0);\\ x+1 & (0<x\leqslant 1).\end{cases}$$

在区间$[-1,1]$不单调(图 1.1(a)),但它存在反函数(图 1.1(b))

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & (0\leqslant x\leqslant 1);\\ x-1 & (1<x\leqslant 2).\end{cases}$$

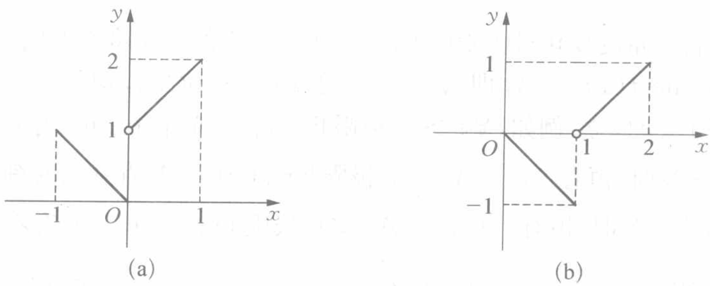

图 1.1

2. 如何理解类似 $f(x+2)$, $f(\sin x)$这样的函数记号?

答　$f(x+2)$, $f(\sin x)$都是表示复合函数的记号. 如果令 $u=x+2$,则 $f(x+2)$ 表示由 $f(u)$ 和 $u=x+2$ 复合而成的函数. 例如,若设 $f(x+2)=x^2-2x+4$,则

$$x^2-2x+4=(x+2)^2-6(x+2)+12=u^2-6u+12,$$

即 $f(u)=u^2-6u+12$. 这就是说,$f(x+2)=x^2-2x+4$ 是由 $f(u)=u^2-6u+12$ 和 $u=x+2$ 复合而成的函数. 此时 $f(\sin x)=\sin^2 x-6\sin x+12$.

3. 为什么在极限的定义中,ε要任意给定?

答　以 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的极限是 A 为例来说明. 因为 ε 是刻画函数 $f(x)$ 与常数 A 接近程度的量,只有 ε 的任意性(不论它多么小)才能表明 $f(x)$与 A 的无限接近. 又"给定"是指在通过 ε 找 δ 的过程中,ε 是不变的常数,因为只有 ε 暂时不变,才能通过分析 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 找到正数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

4. 在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中,δ 与 ε 是什么关系?

答　因为 x 与 x_0 无限接近时,$f(x)$才能与 A 无限接近,即只有 x 与 x_0 接近到一定程度,才能保证 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. δ 正是表达 x 与 x_0 接近程度的量. 一般来说,当 ε 变化时,δ 也变化,但 δ 不是由 ε 而唯一确定的. 因为 $\forall\varepsilon>0$,找到了一个 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则对于所有小于 δ 的正数 δ_1,当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,仍然有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,因此 δ 不是唯一的,

也不必要找到一个最大的 δ. 所以在利用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 时，常常将 $|f(x)-A|$ 适当放大，以便于通过 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 较容易找到 δ，这也是用定义证明极限时常用的技巧.

5. 如何掌握不同极限过程中极限的定义？

答 所谓极限过程，指的是自变量的变化趋势. 一般有 7 种情形：

$$n\to\infty,\quad x\to x_0,\quad x\to x_0^-,\quad x\to x_0^+,\quad x\to\infty,\quad x\to-\infty,\quad x\to+\infty.$$

虽然当自变量的变化过程不同的时候，极限定义的表述略有差别，但它们的本质是相同的. $\lim f(x)=A$，即 $\forall\varepsilon>0$，总存在一个时刻，使得该时刻后，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. 例如，$\forall\varepsilon>0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，存在的时刻是指存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$；极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，存在的时刻是指存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，存在的时刻是指存在正数 δ，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 掌握了极限定义的实质，再表述各种极限过程中的极限定义就不难了.

6. 求函数的极限时，在什么情况下要讨论左右极限？

答 (1) 若 x_0 是分段函数的分段点，且 x_0 的左右两侧函数的表达式不一样，则求分段点 x_0 的极限时一定要先考察左、右极限是否存在，再确定 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在. 但是，并不是所有分段函数在分段点的极限都要求左、右极限. 当在分段点 x_0 的左右两侧函数表达式相同，且 $x\to x_0$ 时，x_0 的左右两侧 $f(x)$ 的变化趋势也一样，则不必求左、右极限，可直接求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 例如，求

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & (x\neq 0);\\[2mm] 1 & (x=0)\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时的极限.

(2) 一般来说，求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，应先考察单侧极限的情况. 如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 两侧变化趋势一致，则不必分开讨论；如果发现两侧变化趋势可能有差别，则应分别研究左、右极限. 例如，求 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，所以需要考察左、右极限. 这时 $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以极限不存在. 类似的例子还有 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$ 等.

7. 无穷大量与无界量有什么联系和区别？

答　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则根据无穷大的定义，$\forall M > 0$（不论 M 多么大），$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$. 这表明对于 x_0 的去心邻域里的一切点 x，都必有 $|f(x)| > M$.

若 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域内无界，则对于无论多么大的正数 M，都存在点 x 属于该邻域，使得 $|f(x)| > M$. 这表明 $\exists x_1 \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，使得 $|f(x_1)| > M$，但不是 $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，使得 $|f(x)| > M$.

对比上述定义可知，在自变量的同一变化过程中，无穷大量一定是无界量，但无界量未必是无穷大量. 例如，$x \to 0$ 时，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是无界量，但不是无穷大量.

8. 利用等价无穷小代换求极限时，应该注意什么问题？

答　根据等价无穷小代换定理，用等价无穷小代换求极限时，是将分子和分母的整体分别代换成与它们各自等价的无穷小. 若将分子（或分母）中的和（或差）中的某项用与之等价的无穷小作代换，则不能保证代换后的新分子（或分母）与原来的分子（或分母）是等价无穷小. 例如，求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$，若将 $\tan x$，$\sin x$ 分别换成 x，则分子为 0，从而极限为 0，显然 0 与 $\tan x - \sin x$ 不等价，所以这个极限结果是错误的. 事实上，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

这说明当 $x \to 0$ 时，$\tan x - \sin x$ 与 $\frac{1}{2}x^3$ 是等价的.

特别指出的是，若分子（或分母）为若干因子的乘积，则可对其中的一个或多个无穷小因子作等价无穷小代换，这时可保证所得的新的分子（或分母）的整体为原分子（或分母）的整体的等价无穷小. 还可以证明，求形如 $\lim\limits_{u(x) \to 0} (1 + u(x))^{f(x)}$ 的极限时，$u(x)$ 可用其等价无穷小 $v(x)$ 代换，变为求 $\lim\limits_{v(x) \to 0} (1 + v(x))^{f(x)}$ 的结果.

9. 关于初等函数的连续性，结论为："初等函数在其定义区间内都是连续的"，为什么不表述成"初等函数在其定义域内都是连续的"？

答　我们知道基本初等函数在其定义域内是连续的，但初等函数在其定义域的某些点却不连续. 例如，初等函数 $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)^3}$ 的定义域为 $D = \{0\} \cup [1, +\infty)$，$f(x)$ 在 D 中的点 $x = 0$ 的很小去心邻域无定义，按连续的定义，就不能讨论 $f(x)$ 在该点处的连续性，因此不能说 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

但由连续函数的运算法则（四则运算法则和复合运算法则）可知，初等函数在其定义区间内是连续的. 所谓定义区间，就是包含在定义域内的区间. 以

连续函数的复合运算法则为例，如果初等函数 $f[g(x)]$ 的定义域 $D_{f\circ g}$ 内的某点 x_0 的某个邻域包含在 $D_{f\circ g}$ 内：$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$（即 x_0 属于 $f[g(x)]$ 的某一定义区间），则 $f[g(x)]$ 在点 x_0 必定连续. 即初等函数 $f[g(x)]$ 在其定义区间内是连续的.

10. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续时，则它具有几个重要性质. 如果 $f(x)$ 是在开区间 $(a,\ b)$ 连续，或是在无穷区间 $[a,\ +\infty)$ 连续，这些性质还能成立吗？

答 不一定成立. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,\ 1)$ 连续，但它在该区间上无最大值和最小值，也无界. 又如，函数 $f(x)=x$ 在 $[a,\ +\infty)$ 连续，但它在该区间上无最大值，也无界.

对于无穷区间，有时通过适当加强条件，可以使某些性质成立. 例如，设 $f(x)$ 在 $[a,\ +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,\ +\infty)$ 上有界. 又如，$f(x)$ 在 $[a,\ +\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且与 $f(a)$ 异号，则 $f(x)$ 在 $(a,\ +\infty)$ 内必存在零点.

例 题 精 讲

A　类

例 1.1 判定 $f(x)=\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}^2 x}$ 与 $g(x)=\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}x$ 是否相同.

解 $f(x)=\sqrt{(\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}x)^2}=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x-\log_2 x & (0<x\leqslant 1);\\ \log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}x & (x>1).\end{cases}$

虽然两函数的定义域都是 $(0,\ +\infty)$，但对应法则不同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

例 1.2 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\ln(x+2)$；　(2) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；　(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $x+2=e^{y-1}$，所以 $x=e^{y-1}-2$，反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(2) $2^x=\dfrac{1+y}{1-y}$，$x=\log_2\dfrac{1+y}{1-y}$，反函数为 $y=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$.

(3) $x+\sqrt{1+x^2}=e^y$，$e^{-y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-x+\sqrt{1+x^2}$，

所以 $x=\dfrac{(e^y-e^{-y})}{2}$，反函数为 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x$.

例 1.3 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$（$a,\ b,\ c$ 均为常数），且 $|a|\neq|b|$，

证明：$f(x)$为奇函数.

证　由条件知

$$af(-x)+bf\left(\frac{-1}{x}\right)=\frac{-c}{x},$$

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,\quad af\left(-\frac{1}{x}\right)+bf(-x)=-cx.$$

于是，

$$a[f(x)+f(-x)]+b\left[f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)\right]=0,$$

$$a\left[f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)\right]+b[f(x)+f(-x)]=0.$$

故

$$\frac{b}{a}[f(x)+f(-x)]=\frac{a}{b}[f(x)+f(-x)].$$

由于 $|a|\neq|b|$，得 $f(x)+f(-x)=0$. 故 $f(x)$为奇函数.

例 1.4　证明：定义在对称区间$(-l, l)$上的任何函数 $f(x)$都可表示为一个奇函数与一个偶函数之和，并且表示法是唯一的.

证　令

$$F_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\quad F_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

因为 $F_1(-x)=-F_1(x)$，$F_2(-x)=F_2(x)$，所以 $F_1(x)$ 为奇函数，$F_2(x)$ 为偶函数，且 $f(x)=F_1(x)+F_2(x)$.

下证表示法是唯一的.

设 $G_1(x)$ 是奇函数，$G_2(x)$ 是偶函数，且 $f(x)=G_1(x)+G_2(x)$. 因此有

$$f(-x)=G_1(-x)+G_2(-x)=-G_1(x)+G_2(x).$$

由以上两式即得

$$G_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=F_1(x),$$

$$G_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=F_2(x),$$

所以表示法唯一.

例 1.5　求函数 $f(x)$的表达式：

(1) 设 $f(x)=ax^2+bx+2$，且 $f(x+1)-f(x)=2x-1$；