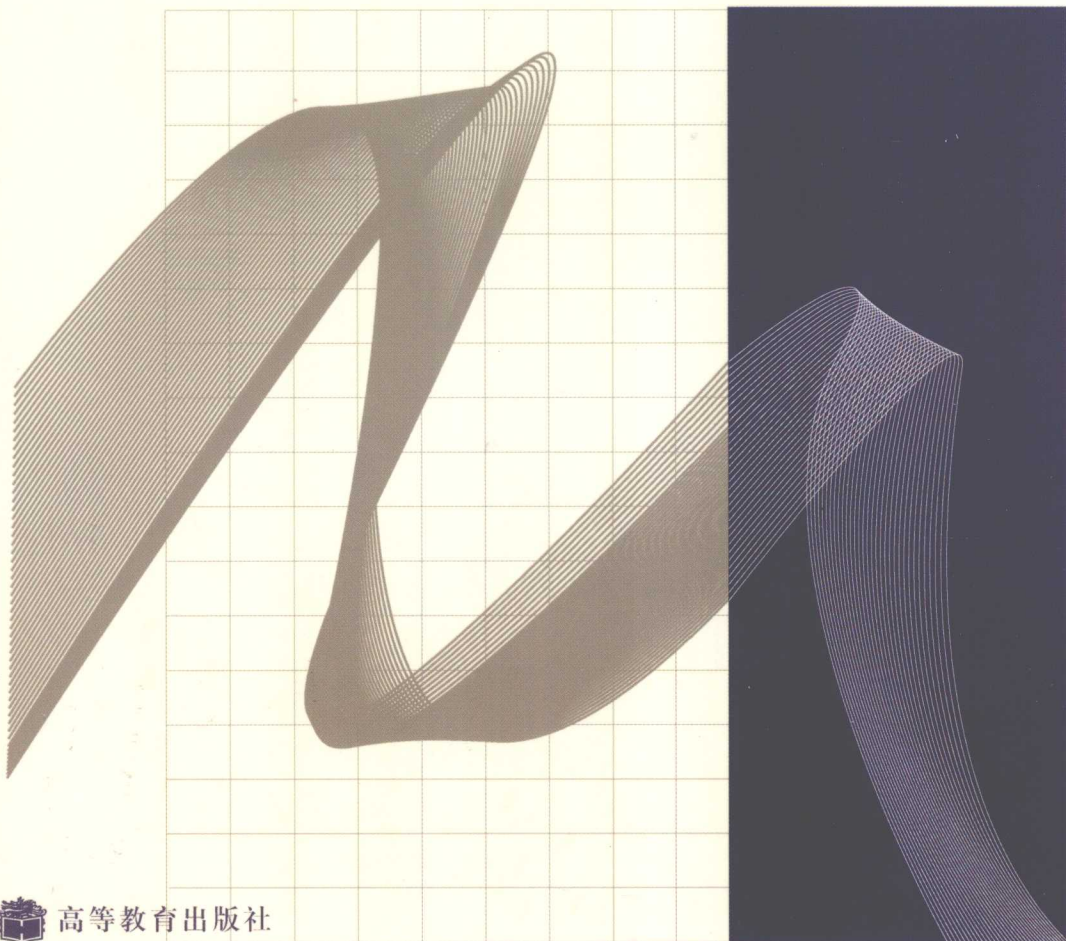


College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

经济应用数学基础 (二)

线性代数习题解答

胡显佑 主编



高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

经济应用数学基础(二)

线性代数习题解答



高等教育出版社

内 容 提 要

本书是与高等学校经济管理类数学基础课程系列教材《经济应用数学基础(二)线性代数》相配套的学习辅导书,全书按照主教材的要求和章节顺序进行编排,与主教材习题顺序一致,由教材主编对教材中的习题给出详尽解答。

本书具有相对的独立性,可供学习经济应用数学基础的大学生和准备报考硕士研究生的考生参考,也可供讲授经济应用数学基础课程的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础(二)线性代数习题解答/胡显佑主编.

—北京:高等教育出版社,2009.2

ISBN 978-7-04-025698-7

I. 经… II. 胡… III. ①经济数学-高等学校-教材
②线性代数-高等学校-习题 IV. F224.0 O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 207583 号

策划编辑	马 丽	责任编辑	崔梅萍	封面设计	张志奇
版式设计	马敬茹	责任校对	杨雪莲	责任印制	朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 保定市中国画美凯印刷有限公司

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×960 1/16
印 张 9
字 数 160 000

版 次 2009 年 2 月第 1 版
印 次 2009 年 2 月第 1 次印刷
定 价 10.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 25698-00

前 言

为了适应高等学校数学基础课程教学多样性的需要,高等教育出版社出版了高等学校经济管理类数学基础课程系列教材:《经济应用数学基础(一)微积分》、《经济应用数学基础(二)线性代数》、《经济应用数学基础(三)概率论与数理统计》三个分册。为了配合该系列教材的教与学,各分册作者对教材中的习题进行了解答,现仍分为三册出版,作为该系列教材的配套参考书(下称《题解》)。该《题解》可供学习经济应用数学基础的大学生和准备报考硕士研究生的考生作为解题指导的参考书,也可供讲授经济应用数学基础课程的教师在备课和批改作业时参考。

解答习题是学好数学课程的重要环节。因此,这里要强调指出,使用本《题解》的正确态度是:学生在解题前,应先复习教材中的相关知识并认真思考如何求解,然后自己动手独立地求解(切忌照抄《题解》的解法和结果)。解出后(或不会解时),再看《题解》,将你的解法与《题解》的解法进行比较(或找出不会解的原因)。只有这样,才能使你对所学数学知识(基本概念、理论和方法)的理解不断深化,并逐步达到灵活运用之目的。

通常,一道数学题可能有多种解法,而本《题解》的大多数题只给出一种解法(少数题给出两种解法),而且不一定是最简单、最好的解法。因此,使用本《题解》的读者,如果您的解法与《题解》的解法不同,不应感到意外,也许您的解法比《题解》的解法更简单、更巧妙。显然,在解题时,如能经常尝试一题多解,不但能加深您对所学数学知识的理解,也能使您灵活运用数学知识的能力提高到一个更高的水平。

限于能力,《题解》中难免存在不足或失误之处,欢迎广大读者批评指正。

编者

2008年6月10日

目 录

第一章 矩阵	(1)
习题一	(1)
(A)	(1)
(B)	(19)
第二章 行列式	(30)
习题二	(30)
(A)	(30)
(B)	(43)
第三章 线性方程组与向量	(55)
习题三	(55)
(A)	(55)
(B)	(75)
第四章 矩阵的特征值和特征向量	(93)
习题四	(93)
(A)	(93)
(B)	(105)
第五章 二次型	(117)
习题五	(117)
(A)	(117)
(B)	(125)

第一章 矩 阵

习 题 一

(A)

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+2b & 3a-c \\ b-3d & a-b \end{pmatrix}$, 如果 $A = E$, 求 a, b, c, d 的值.

解 由题设条件, 有

$$\begin{pmatrix} a+2b & 3a-c \\ b-3d & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $a+2b=1$, $a-b=1$; $3a-c=0$, $b-3d=0$,

解得 $a=1$, $b=0$, $c=3$, $d=0$.

2. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

求 (1) $2A+B$; (2) $A-3B$.

解 (1)

$$\begin{aligned} 2A+B &= 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} A-3B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ -9 & 3 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 13 & -1 & -13 \end{pmatrix}$$

3. 设矩阵 X 满足 $X - 2A = B - X$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

求 X .

解 由 $X - 2A = B - X$, 可得 $2X = 2A + B$. 所以

$$\begin{aligned} X &= A + \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. 计算:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) (-1, 3, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2);$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \quad (6) (1, -1, 2) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解 (1)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-2) \times 1 + (-3) \times 3 & 1 \times 3 + (-2) \times (-2) + (-3) \times 1 \\ 2 \times 2 + (-1) \times 1 + 0 \times 3 & 2 \times 3 + (-1) \times (-2) + 0 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times (-2) + 3 \times (-1) & 2 \times (-3) + 3 \times 0 \\ 1 \times 1 + (-2) \times 2 & 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) & 1 \times (-3) + (-2) \times 0 \\ 3 \times 1 + 1 \times 2 & 3 \times (-2) + 1 \times (-1) & 3 \times (-3) + 1 \times 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -7 & -6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & -7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(3) (-1, 3, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times (-1) = 1$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2) = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) & 2 \times 2 \\ 1 \times (-1) & 1 \times 2 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(6) (1, -1, 2) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5, 1, 3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 15$$

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求(1) AB 和 BA ; (2) $AB - BA$.

解 (1)

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 利用(1)的结果,有

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

6. 求所有与 A 可交换的矩阵:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ 满足 $AB = BA$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} & x_{12} \\ x_{21} + x_{22} & x_{22} \end{pmatrix}$$

由此可得

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{11} + x_{12}; & x_{12} &= x_{12} \\ x_{11} + x_{21} &= x_{21} + x_{22}; & x_{12} + x_{22} &= x_{22} \end{aligned}$$

化简后解得

$$x_{11} = x_{22}, \quad x_{12} = 0$$

令 $x_{11} = x_{22} = a, x_{21} = b$, 则所求矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \text{ 为任意常数})$$

(2) 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ 满足 $AB = BA$, 所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可得方程组

$$x_{11} + x_{21} = x_{11}, \quad x_{12} + x_{22} = x_{11} + x_{12}, \quad x_{13} + x_{23} = x_{12} + x_{13}$$

$$x_{21} + x_{31} = x_{21}, \quad x_{22} + x_{32} = x_{21} + x_{22}, \quad x_{23} + x_{33} = x_{22} + x_{23}$$

$$x_{31} = x_{31}, \quad x_{32} = x_{31} + x_{32}, \quad x_{33} = x_{32} + x_{33}$$

解得 $x_{21} = 0, x_{31} = 0, x_{32} = 0, x_{11} = x_{22} = x_{33}, x_{12} = x_{23}$.

令 $x_{11} = x_{22} = x_{33} = a, x_{12} = x_{23} = b, x_{13} = c$, 则所求矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c \text{ 为任意常数})$$

7. 计算:

$$(1) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^3; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3.$$

解 (1) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$

所以

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 当 $n=2$ 时, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $n=k-1$ 时, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则当 $n=k$ 时, 有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k-1+0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. 设 n 阶矩阵 A, B 可交换, 即 $AB = BA$. 试证:

$$(1) (A+B)(A-B) = A^2 - B^2; \quad (2) (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

证 (1) $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$, 由于 $AB = BA$, 所以

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

(2) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$, 由于 $AB = BA$, 所以

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

小结 一般地, 对于 n 阶矩阵 $A, B, AB \neq BA$, 所以 8 题的结论未必成立.

然而, 如果矩阵 A 与 B 可交换, 即 $AB = BA$, 则以下“乘法公式”成立:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2;$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2;$$

$$(A+B)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1} B + \cdots + C_m^m B^m \quad (m \text{ 为正整数}).$$

特别地, 由于单位矩阵 E 与任一 n 阶矩阵 A 可交换, 所以当我们计算 $(E+A)(E-A), (E \pm A)^2, \cdots$ 时, 都可直接利用上述结果.

9. 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, A$ 是 n 阶矩阵. 定义 $f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2$,

如果 $f(x) = 3 - 5x + x^2, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $f(A)$.

解 $f(A) = 3E - 5A + A^2$

$$\begin{aligned} &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. 设某港口在一月份出口到三个地区的两种货物的数量以及两种货物的单位价格、质量、体积如下表:

出口 货物	地区 量	北美	西欧	非洲	单位价格 /万元	单位 质量/t	单位体积 /m ³
A ₁		2 000	1 000	800	0.2	0.011	0.12
A ₂		1 200	1 300	500	0.35	0.05	0.5

(1) 利用矩阵乘法计算经港口出口到三个地区的货物总价值、总质量、总体积各为多少?

(2) 利用(1)的结果计算经该港口出口的货物总价值、总质量、总体积为多少?

解 (1) 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.35 \\ 0.011 & 0.05 \\ 0.12 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2\,000 & 1\,000 & 800 \\ 1\,200 & 1\,300 & 500 \end{pmatrix}$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.35 \\ 0.011 & 0.05 \\ 0.12 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\,000 & 1\,000 & 800 \\ 1\,200 & 1\,300 & 500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 820 & 655 & 335 \\ 82 & 76 & 33.8 \\ 840 & 770 & 346 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{总价值} \\ \text{总质量} \\ \text{总体积} \end{matrix}$$

北美 西欧 非洲

(2) 利用(1)的结果,有

$$\begin{pmatrix} 820 & 655 & 335 \\ 82 & 76 & 33.8 \\ 840 & 770 & 346 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,810 \\ 191.8 \\ 1\,956 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{总价值} \\ \text{总质量} \\ \text{总体积} \end{matrix}$$

11. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 用两种方法计算 $(AB)^T$.

解 方法1 由已知条件,有

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

方法2 由已知条件,有

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. 已知列向量 $\alpha = (1, -1, 2)^T$, 计算 $E - 2\alpha\alpha^T$.

解

$$\begin{aligned} E - 2\alpha\alpha^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13. (1) 证明:对任意的 $m \times n$ 矩阵 A , $A^T A$ 和 AA^T 都是对称矩阵.

(2) 证明:对任意的 n 阶矩阵 A , $A + A^T$ 为对称矩阵;而 $A - A^T$ 为反称矩阵.

证 (1) 因为

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

所以 $A^T A$ 为对称矩阵.

因为

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

所以 AA^T 为对称矩阵.

(2) 因为

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A + A^T$$

所以 $A + A^T$ 为对称矩阵.

又

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$$

所以 $A - A^T$ 为反称矩阵.

14. 用指定的分块方法, 用分块矩阵的加法或乘法计算下列各题:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

求 $A + B$ 和 AB .

$$(2) A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ \hline 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 求 } AA^T.$$

解 (1) 记 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 其中

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

于是,

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

而

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

所以

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{array} \right)$$

(2) 记 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, 其中

$$\alpha_1 = (-2, -1, 2), \alpha_2 = (2, -2, 1), \alpha_3 = (1, 2, 2)$$

所以

$$AA^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_1^T & \alpha_1 \alpha_2^T & \alpha_1 \alpha_3^T \\ \alpha_2 \alpha_1^T & \alpha_2 \alpha_2^T & \alpha_2 \alpha_3^T \\ \alpha_3 \alpha_1^T & \alpha_3 \alpha_2^T & \alpha_3 \alpha_3^T \end{pmatrix}$$

其中, $\alpha_1 \alpha_1^T = (-2, -1, 2) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 9$, 类似地, 有

$$\alpha_1 \alpha_2^T = 0, \quad \alpha_1 \alpha_3^T = 0$$

$$\alpha_2 \alpha_1^T = 0, \quad \alpha_2 \alpha_2^T = 9, \quad \alpha_2 \alpha_3^T = 0$$

$$\alpha_3 \alpha_1^T = 0, \quad \alpha_3 \alpha_2^T = 0, \quad \alpha_3 \alpha_3^T = 9$$

于是

$$AA^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

15. 用矩阵的初等行变换将下列矩阵化为阶梯形矩阵.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 & -10 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

解 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 & -10 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -10 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16. 用矩阵的初等变换, 求下列矩阵的等价标准形:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 & 12 \\ 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad (4) A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解 (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 - 3c_1]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - 5c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{18}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 & 12 \\ 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 9 & 12 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 12 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2 + 3c_1 \\ c_3 - 4c_1 \\ c_4 - 5c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 12 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}r_2 \\ c_3 + \frac{1}{4}c_2 \\ c_4 + \frac{1}{4}c_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad A &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - r_2 \\ c_2 + c_1 \\ c_3 - 2c_1 \\ c_4 - c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}r_2 \\ c_4 + \frac{4}{3}c_2 \\ c_5 - \frac{1}{3}c_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}r_3 \\ c_3 \leftrightarrow c_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

17. 用初等变换法求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad (4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 对矩阵 $(A|E)$ 施以初等行变换:

$$\begin{aligned}
 (A|E) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{r_1 + 3r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$