PHYSICS

# 大学物理
# 学习与习题辅导

（附大学物理学习与习题辅导作业）

陶桂琴　张本袁
殷　实　陈小凤　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

# 大学物理学习与习题辅导

## （附大学物理学习与习题辅导作业）

陶桂琴　张本袁　殷　实　陈小凤　编著



东南大学出版社
南京

**图书在版编目(CIP)数据**

大学物理学习与习题辅导/陶桂琴等编著. —南京:
东南大学出版社, 2009.1
ISBN 978-7-5641-1045-1

Ⅰ. 大… Ⅱ. 陶… Ⅲ. 物理学—高等学校—教学
参考资料 Ⅳ. 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 008100 号

**大学物理学习与习题辅导**

| | |
|---|---|
| **出版发行** | 东南大学出版社 |
| **出 版 人** | 江 汉 |
| **网　　址** | http://press.seu.edu.cn |
| **电子邮箱** | press@seu.edu.cn |
| **社　　址** | 南京市四牌楼 2 号 |
| **邮　　编** | 210096 |
| **电　　话** | 025-83793191(发行)　025-57711295(传真) |
| **经　　销** | 全国新华书店 |
| **排　　版** | 南京理工大学印刷厂 |
| **印　　刷** | 溧阳市晨明印刷有限公司 |
| **开　　本** | 787mm×1092mm　1/16 |
| **印　　张** | 22.5 |
| **字　　数** | 542 千 |
| **版　　次** | 2009 年 1 月第 1 版 |
| **印　　次** | 2009 年 1 月第 1 次印刷 |
| **书　　号** | ISBN 978-7-5641-1045-1/O·64 |
| **印　　数** | 1—4000 册 |
| **定　　价** | 44.00 元(共 2 册) |

# 序

随着时代的发展，大学物理课程的教学工作面临的新问题不断地出现. 怎样帮助同学们在有限的学时内，更好地达到大学物理课程的教学基本要求，掌握大学物理课程的核心内容，是从事大学物理教学的广大教师孜孜以求的目标之一.

同学们在学习大学物理课程时，常常对一些物理基本概念和规律理解不深，掌握不透，表现在遇到问题时束手无策，无从下手. 这说明他们在分析问题、解决问题的能力上还有待进一步提高. 多看、多练是学习过程中不可缺少的环节，这时手头有一本好的学习参考书，可以帮助同学们少走弯路，起到事半功倍的作用. 为此我向同学们推荐这本《大学物理学习与习题辅导》.

东南大学的系科众多，要求各异，东南大学从事大学物理教学的老师们总结了许多行之有效的教学模式，习题讨论课是其中一个比较成功的经验. 在历届的教学工作中，他们不断地总结经验，不断地创新提高，《大学物理学习与习题辅导》就是他们多年辛勤汗水的结晶. 书中对一些有典型意义的问题作了深入细致的分析，富有启发性，对同学们加深理解和切实掌握物理概念和物理规律很有帮助. 书中更重视基本解题方法指导和训练. 题目精炼，类型丰富，难度适中，便于同学们复习参考，也便于教师上课时选用. 他们将物理相关内容适当合并成七个单元，十分有利于同学们学完有关章节后的综合复习和提高. 每单元都有内容提要、解题指导、讨论题、综合习题、自测题和活页作业，构成了一个完整的学习体系. 此外，还为一些基础较好、学有余力的优秀学生穿插了少部分的拓展内容.

愿编者的意愿和同学们的学习目标一致，共同为大学物理的教与学取得丰硕成果而努力.

馬文蔚

2008 年 10 月

# 前　言

本书是根据马文蔚教授主编的高教版《物理学》(第五版)和《物理学教程》(第二版)两本教材的内容,在原《大学物理学习与习题指导》(第一版)基础上,参照教育部非物理类大学物理课程教学基本要求的最新精神改编的.它力求适应当今大学物理课程的教学需要,既可为学生课后自己理解、复习、提高提供详尽指导,也为教师积极开展旨在提高学生科学素质的习题讨论课提供素材,并为正在学习大学物理课程的学生提供分单元的课后作业,在帮助学生加深理解大学物理的基本概念和规律的同时,也注重帮助同学们掌握物理学的各种思想方法,从而提高学生分析问题、解决问题的能力.

本书根据物理课程的知识体系分为七个单元,覆盖大学物理课程的所有基本内容和部分拓展内容.每个单元设有内容提要、解题指导、讨论题、综合习题、自测题和活页作业6个部分,内容提要总结了本单元的基本概念和规律,指出了应用条件和需要注意的问题,归纳了本单元所涉及的重要思想方法.解题指导则针对教学内容的重点和难点有层次地精选了若干经典例题,通过分析,帮助学生建立正确的物理图像和解题思路.书中所选例题、讨论题、综合习题和自测题除了注重物理知识的覆盖面外,还注重对重点、难点内容的必要的重点训练,这里有各种解题方法的综合应用、物理学各部分知识的融合以及物理学基本原理在工程技术中的应用等,以期培养学生的创新思维和工程意识,自测题则为学生学完本单元内容后检查学习效果提供一种手段.活页作业则为学生提供课后作业,其内容着重于基本概念的理解和基本规律的常规训练,涉及物理知识的方方面面,与本书其他内容构成了一个完整的教育和训练体系.为适应教学新需要,活页作业单列印刷成册.全书除了为所有学习大学物理课程的学生达到课程基本要求提供各种训练外,还为那些学有余力的优秀学生提供指导,并冠以“*”号以示区别.

本书绪论及第三、七单元由陶桂琴编写,第一单元由陈小凤编写,第二、四单元由张本袁编写,第五、六单元由殷实编写,东南大学叶善专教授主审了全书并提出了许多中肯的修改建议.全书一方面集编者二十多年的教学经验,同时也参考了兄弟院校编写的相关书籍,马文蔚教授、叶善专教授、谈漱梅教授等以及东南大学物理教研室的新老同仁们都在成书过程中给予关心、帮助和支持,作者在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,敬请读者不吝指正.

编者<br>于东南大学<br>2008年10月

# 目　录

# 0 绪 论

物理学研究的内容非常广泛,物理学定律是自然界最基本的定律,物理学研究问题的方法是人类认识自然的最基本方法,物理学的前沿是世界科学的前沿,物理学既是自然科学的基础学科,也是自然科学前沿的伴侣. 在大学里,"大学物理"课是理工科专业必修课,必须学好大学物理课,才能在今后的专业工作中充分地施展能力.

如何能够学好"大学物理"课呢? 我们做以下推荐:

1. 必须正确理解、深刻领会物理学中的基本概念及基本定理　只有这样你才能准确知道定律及有关公式的适用范围.

2. 善于抽象　物理学定律常常是以数学形式表达出来的,因而必须善于把具体的、实际的问题抽象化为数学关系,当通过定理或定律计算出结果时,也必须善于分析、讨论,转化到具体实际问题中来.

3. 必须完成一定量的作业　为了提高分析问题、解决问题的能力,必须完成一定量的作业,以此复习巩固知识,加深对问题的理解,同时通过作业培养表达能力.

为了帮助同学们高标准地完成物理作业,对此提出以下要求:首先认真复习有关内容;仔细审题,搞清题意,简要地写出该题的已知条件和待求的物理量;画出必要的示意图(例如示力图、坐标系等);说明应用的物理概念、物理定律、思路、列方程的依据;先求文字解,再代入数据计算;对计算结果进行讨论.

下面举两例作为示范,供参考.

**【例 0-1】**　质量 $M=10\ \mathrm{kg}$,半径 $R=0.20\ \mathrm{m}$ 的匀质圆柱体与质量 $m=4\ \mathrm{kg}$,半径 $r=0.10\ \mathrm{m}$ 的匀质圆柱体固定在一起,可以绕水平光滑几何轴 $OO'$ 转动,现分别绕以足够长的轻绳,绳的一端固定在圆柱体上,另一端系一质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ 的物体,且 $m_1=m_2=2\ \mathrm{kg}$,它们挂在圆柱体的两侧(如图 0-1),若开始时 $m_1$ 与 $m_2$ 离地高度均为 $h(h=2.0\ \mathrm{m})$,并由静止释放,求:

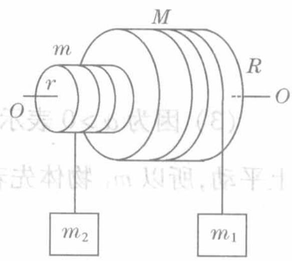

图 0-1

(1) 圆柱体转动的角加速度;

(2) 两侧轻绳的张力;

(3) 经过多长时间一物体着地.

**解**:(1) 隔离物体,画出联合圆柱体、$m_1$、$m_2$ 的受力图(如图 0-2). 设各物体的加速度如图所示,$m_1$ 物体作平动,选向下为坐标轴正向,据运动定律有

$$m_1 g - F_{T_1} = m_1 a_1 \tag{1}$$

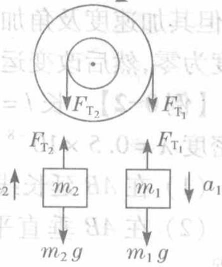

图 0-2

联合圆柱体作定轴转动,设顺时针向为转动正方向,据转动定律有

$$F_{T_1}R - F_{T_2}r = J\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2\right)\cdot\alpha \tag{2}$$

$m_2$ 物体作平动，设向上加速度为 $a_2$，据运动定律有

$$F_{T_2} - m_2 g = m_2 a_2 \tag{3}$$

根据运动之间关系有

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= R\cdot\alpha \\ a_2 &= r\cdot\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式(1) · $R$ + 式(2) + 式(3) · $r$，并代入式(4)可解得

$$\alpha = \frac{m_1 gR - m_2 gr}{m_1R^2 + m_2r^2 + \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2}$$

$$= \frac{2\times9.8\times0.20 - 2\times9.8\times0.10}{2\times0.20^2 + 2\times0.10^2 + \frac{1}{2}\times10\times0.20^2 + \frac{1}{2}\times4\times0.10^2}\ \mathrm{s^{-2}}$$

$$= 6.13\ \mathrm{s^{-2}}$$

(2) 由式(1)及式(4)得

$$\begin{aligned} F_{T_1} &= m_1 g - m_1 a_1 = m_1(g - R\alpha) \\ &= 2\times(9.8 - 0.20\times6.13)\ \mathrm{N} = 17.1\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

由式(3)及式(4)得

$$\begin{aligned} F_{T_2} &= m_2 g + m_2 a_2 = m_2(g + r\alpha) \\ &= 2\times(9.8 + 0.10\times6.13)\ \mathrm{N} = 20.8\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

(3) 因为 $\alpha>0$ 表示联合圆柱体顺时针转动，$a_1>0$ 表示 $m_1$ 向下平动，$a_2>0$ 表示 $m_2$ 向上平动，所以 $m_1$ 物体先着地，对 $m_1$，$h=\frac{1}{2}a_1t^2$，所以

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = \sqrt{\frac{2\times2}{0.20\times6.13}}\ \mathrm{s} = 1.81\ \mathrm{s}$$

讨论：当 $m_1$ 着地后，与它相联系的绳中张力 $T_1$ 消失，$m_2$ 及联合圆柱体依靠惯性继续运动，但其加速度及角加速度数值和方向都发生变化，作减速运动及减速转动，直至速度及角速度为零，然后改变运动、转动方向……

**【例 0-2】** 长 $l=0.20$ m 的绝缘线 $AB$ 上均匀带电，线电荷密度 $\lambda=0.5\times10^{-8}\ \mathrm{C\cdot m^{-1}}$（如图 0-3），求：

(1) 在 $AB$ 延长线上，离 $B$ 点 $d_1=0.10$ m 的 $P$ 点场强；

(2) 在 $AB$ 垂直平分线上，距垂足 $d_2=0.10$ m 的 $Q$ 点场强.

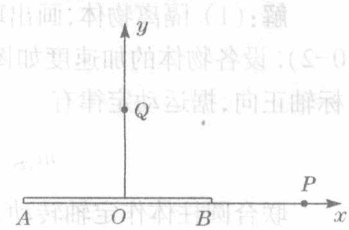

**图 0-3**

**解：**以 $AB$ 中点为坐标原点，沿 $AB$ 方向为 $x$ 轴正方向，与

它垂直方向为 $y$ 轴正方向，$P$ 点在 $x$ 轴上，$Q$ 点在 $y$ 轴上.

(1) 把 $AB$ 带电体看作由许多点电荷组成，其中位于 $x \to x+\mathrm{d}x$ 的电荷元带电量 $\mathrm{d}q=\lambda \mathrm{d}x$，它在 $P$ 点产生的场强 $\mathrm{d}E=\dfrac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\left(d_1+\dfrac{l}{2}-x\right)^2}$，沿 $x$ 轴方向（如图 0-4），其余各点电荷在 $P$ 点场强也都沿 $x$ 轴方向.

由叠加原理得


图 0-4

$$E=\int \mathrm{d}E=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\left(d_1+\dfrac{l}{2}-x\right)^2}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(d_1+\dfrac{l}{2}-x\right)}\Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 d_1(d_1+l)}$$

$$=9\times10^9\times\frac{0.5\times10^{-8}\times0.20}{0.10\times(0.10+0.20)}\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$$

$$=300\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$$

方向沿 $x$ 轴正方向.

(2) 位于 $x\to x+\mathrm{d}x$ 的点电荷在 $Q$ 点产生的场强 $\mathrm{d}E=\dfrac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+d_2^2)}$，沿 $Q$ 点相对电荷元径矢方向如图 0-5，其余电荷在 $Q$ 点产生的场强方向分布也如图 0-5，因电荷分布对称于 $y$ 轴，故电场分布也对称于 $y$ 轴，合场强在 $x$ 方向分量为零，下面仅将电场向 $y$ 方向投影叠加.

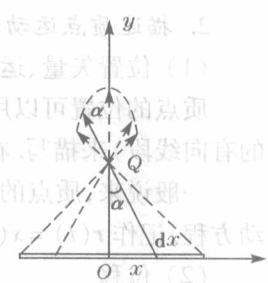


图 0-5

$$\mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\cos\alpha,\quad \cos\alpha=\frac{d_2}{\sqrt{x^2+d_2^2}}$$

$$E_y=\int \mathrm{d}E_y=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+d_2^2)}\cdot\frac{d_2}{\sqrt{x^2+d_2^2}}$$

$$=\frac{\lambda d_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{d_2^2\sqrt{x^2+d_2^2}}\Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d_2}\cdot\frac{l}{\sqrt{\dfrac{l^2}{4}+d_2^2}}$$

$$=9\times10^9\times0.5\times10^{-8}\times\frac{0.20}{0.10\times\sqrt{\dfrac{0.20^2}{4}+0.10^2}}\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$$

$$=6.36\times10^2\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$$

方向沿 $y$ 轴正方向.

# 第一单元　力　学

## 第一部分　质点运动学

### 一、内容提要

1. 质点、参考系、坐标系

运动和静止都是相对的概念. 描述物体的运动必须选择一假定不动的物体作为参考系. 选择不同的参考系对物体运动的描述不一定相同. 定量描述物体运动引入坐标系. 常用坐标系有:直角坐标系,平面极坐标系,自然坐标系等.

"质点"是物理学中的一个理想模型. 它突出了物体具有质量、占有位置的基本特征,而忽略物体的形状、大小和形变等,不考虑物体的内部结构,也不涉及物体的转动、内部振动等运动形式.

2. 描述质点运动的物理量

(1) 位置矢量、运动方程

质点的位置可以用它的三个坐标来描述,也可以用位置矢量(即自坐标原点指向该点的有向线段)来描写. 在直角坐标系中,位置矢量的表达式为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

一般说来,质点的位置是时间的函数. 通常将质点位置随时间的变化关系称为质点的运动方程,记作 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$,它详尽地描述了质点的运动情况.

(2) 位移

质点运动了,质点的位置就发生了变化. 位移是描述质点运动位置变化的物理量,它是自质点运动的起点指向终点的有向线段. 在直角坐标系中,位移与质点的坐标变化之间的关系为 $\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$.

(3) 速度

质点位置变化的快慢用速度来描述,其定义式为 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,即质点位置矢量对时间的变化率. 在直角坐标系中,$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$;在自然坐标系中,$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$,式中 $s$ 为质点运动的路程(或质点运动径迹的长度),$\boldsymbol{e}_t$ 为轨道的切线方向.

速度是矢量,其大小为速率,其方向就是质点运动的方向.

(4) 加速度

质点的加速度反映质点速度的变化率,$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$. 在直角坐标系中,

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中，

$$a = \frac{dv}{dt}e_t + \frac{v^2}{\rho}e_n$$

式中第一项叫切向加速度 $a_t = \frac{dv}{dt}e_t$，它是由于速度大小发生变化而产生的；第二项为法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho}e_n$，它是由于速度的方向变化而产生的，其中 $\rho$ 是轨道的曲率半径.

3. 运动学问题的求解

运动学问题可分为两大类. 第一类：已知运动方程求运动的速度、加速度，这可通过求导方法解决；第二类：已知加速度求速度，已知速度求运动方程，一般运用积分法求解，但须知道初始条件.

由加速度的物理意义及定义式，可以推导出 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \boldsymbol{a}\,dt$；由速度的物理意义及定义式，可以推导出 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \int_0^t \boldsymbol{v}\,dt$. 请注意，它们都是矢量式，计算时通常采用分量式. 若加速度为恒矢量（即加速度的大小和方向都不变），则上面两积分式是容易完成的，结果为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

此为矢量式，必要时可用分量式计算. 对匀速直线运动，容易导出

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot \Delta x$$

4. 运动叠加原理

一个运动可以看成由几个同时进行的、各自独立的直线运动的叠加而成，这称为运动叠加原理（或运动独立性原理）. 叠加原理是物理学的基本原理之一.

5. 相对运动

运动是绝对的，但人们对运动的描述是相对的. 同一个物体的运动在不同的参考系中的描述不尽相同. 设有两个参考系，一个为 $S$ 系，另一个为 $S'$ 系，$S'$ 系相对于 $S$ 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 平动. 则质点相对于 $S$ 系的速度等于质点相对于 $S'$ 系的速度加上 $S'$ 系相对于 $S$ 系的速度，即 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$；质点相对于 $S$ 系的加速度等于质点相对于 $S'$ 系的加速度加上 $S'$ 系相对于 $S$ 系的加速度，即 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_{S'S}$.

6. 本部分要求

掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动和运动变化的物理量（注意这些物理量的矢量性、瞬时性和相对性）；理解其物理意义，并能用直角坐标系或自然坐标系求解质点的速度、加速度；或由质点的速度（或加速度）和已知条件求解质点的运动方程（或速度）.

## 二、解题指导

【例 1-1】 已知质点运动方程 $x=10+15t-2.5t^2$ m，求：(1) 质点的速度和加速度的表示式，并作出 $x-t, v-t, a-t$ 图；(2) 质点在最初 8 s 内走过的路程和第 8 s 末的位移.

解：这是已知运动方程求运动的一类问题. 质点作直线运动，其运动方程

$$x=(10+15t-2.5t^2)\ \mathrm{m}$$

求导一次得 $$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(15-5t)\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

再求导一次得 $$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

为了作出 $x-t, v-t, a-t$ 图线，可采用数值计算的方法，$t=0,1,2,3,\cdots,8$ 各时刻的位置、速度和加速度的数值见下表：

| $t$(s) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$(m) | 10 | 22.5 | 30 | 32.5 | 30 | 22.5 | 10 | −7.5 | −30 |
| $v$(m·s$^{-1}$) | 15 | 10 | 5 | 0 | −5 | −10 | −15 | −20 | −25 |
| $a$(m·s$^{-2}$) | −5 | −5 | −5 | −5 | −5 | −5 | −5 | −5 | −5 |

分析讨论：

(1) 从表中看到，加速度为恒定值 $a=-5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$，但不能认为物体在做减速运动(为什么?).

(2) $x-t, v-t, a-t$ 见图 1-1. 从图中可非常方便地看出它们的变化规律和相互联系.

(3) 计算 $x=0$ 的时间：

由 $x=10+15t-2.5t^2=0$，得 $t=6.6$ 秒和 $t=-0.61$ 秒. 这又如何理解呢?

(4) 第 8 秒末的位移：

$$\Delta x=x\big|_{t=8}-x\big|_{t=0}=-30-10=-40\ \mathrm{m}$$

最初 8 秒内走过的路程：

$$s=(32.5-10)+32.5+30=85\ \mathrm{m}$$

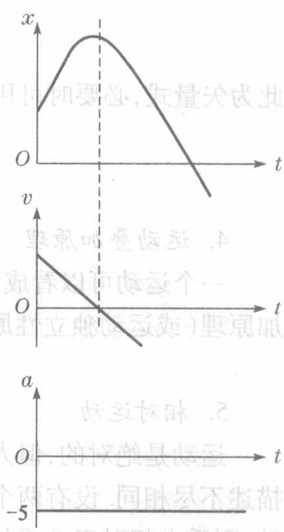

图 1-1

可见，位移和路程不是同一个物理概念.

【例 1-2】 一电子在电场中运动，其运动方程为 $x=3t, y=12-3t^2$(SI). (1) 计算电子的运动轨迹；(2) 计算 $t=1$ s 时电子的切向加速度、法向加速度及轨道上该点处的曲率半径；(3) 在什么时刻电子的位矢与其速度矢量恰好垂直；(4) 什么时刻电子离原点最近.

解：本题为质点运动学的第一类问题. 通过本题的求解，可以看到质点的运动学方程包含着质点运动的全部信息.

(1) 质点的轨迹方程可以由参数方程消 $t$ 得到

$$y = 12 - 3t^2 = 12 - \frac{x^2}{3}$$

(2) 为了计算切向加速度和法向加速度,必须先计算电子速度的大小和加速度的大小

由运动方程,得 $\begin{cases} v_x = 3 \\ v_y = -6t \end{cases}$ $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -6 \end{cases}$

速度的大小为 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3\sqrt{1+4t^2}$

加速度的大小为 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 6(\text{SI})$

切向加速度 $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(3\sqrt{1+4t^2}\right) = \dfrac{12t}{\sqrt{1+4t^2}}$

法向加速度 $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{6^2 - \dfrac{144t^2}{1+4t^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{1+4t^2}}$

将 $t = 1$ s 代入,得

$$a_t = \frac{12}{\sqrt{1+4}} = 5.37\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad a_n = \frac{6}{\sqrt{1+4}} = 2.68\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

又,$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$. 在 $t = 1$ s 时刻,轨道曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = 16.8\ \text{m}$$

(3) 根据矢量点乘知识,位置矢量与速度矢量恰好垂直时,$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0$. 即

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = \{3t\boldsymbol{i} + (12 - 3t^2)\boldsymbol{j}\} \cdot (3\boldsymbol{i} - 6t\boldsymbol{j}) = 9t - 72t + 18t^3 = 0$$

解得 $t = 1.87$ s

(4) 电子离原点最近,意味着位矢的数值最小. 故,先求位矢的大小,再取极小值.

位矢的大小

$$r^2 = x^2 + y^2 = (3t)^2 + (12 - 3t^2)^2 = 9t^4 - 63t^2 + 144$$

对 $t$ 求导,由 $\dfrac{dr}{dt} = 0$ 解得 $t = 1.87$ s

**【例 1-3】** 已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r} = 3\cos\pi t\boldsymbol{i} + 3\sin\pi t\boldsymbol{j}$. 求:(1) 该质点的运动轨迹;(2) 任意时刻质点的速度和加速度.

**解:**(1) 由题意,在直角坐标系中,任意时刻质点的坐标为

$$x = 3\cos\pi t$$

$$y = 3\sin\pi t$$

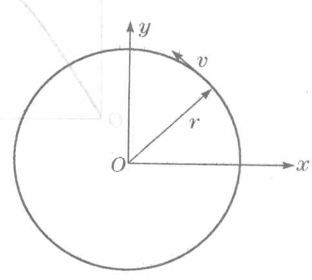

图 1-2

这是一个参数方程,消 $t$ 得质点的轨迹方程

$$x^2+y^2=9$$

所以,质点的运动轨迹是一个半径为 3 m 的圆.

(2) 把运动方程对时间求导,便可得到速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-3\pi\sin\pi t\boldsymbol{i}+3\pi\cos\pi t\boldsymbol{j}$$

速度的大小$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=3\pi$ 为常量,质点作匀速率圆周运动;速度的方向沿轨道的切线方向. 由于速度的方向始终在变化,故仍有加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-3\pi^2\cos\pi t\boldsymbol{i}-3\pi^2\sin\pi t\boldsymbol{j}=-\pi^2\boldsymbol{r}$$

由此可见,加速度的方向与 $\boldsymbol{r}$ 方向相反. 即沿半径指向圆心(向心加速度).

**分析讨论:**在已知轨道的情况下,往往采用自然坐标系比较方便.

质点的速度 $\boldsymbol{v}=3\pi\boldsymbol{e}_t$,切向加速度 $a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$,法向加速度 $a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{9\pi^2}{3}=3\pi^2$,质点的加速度 $\boldsymbol{a}=a_t\boldsymbol{e}_t+a_n\boldsymbol{e}_n=3\pi^2\boldsymbol{e}_n$.

**【例 1-4】** 一作直线运动的物体,因受到阻力而作减速运动,其加速度 $a=-\alpha v$($\alpha$ 为大于零的常量). 已知初始条件为:$t=0$ 时,$x=0$,$v=v_0$,求此物体的运动方程.

**解:**本题属于运动学第二类问题. 已知加速度和初始条件求运动方程,通常采用积分法求解.

由题意,加速度 $a=-\alpha v$ 是速度 $v$ 的函数,由于函数中不明显含时间 $t$,不能将 $a$ 直接对时间 $t$ 积分,但根据 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\alpha v$,可将变量 $v$ 和 $t$ 分别写于方程的两边,叫分离变量,并对两边分别积分,得

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^t-\alpha\mathrm{d}t,\quad \ln v\Big|_{v_0}^{v}=-\alpha t\Big|_0^t$$

所以
$$v=v_0\mathrm{e}^{-\alpha t}\tag{1}$$

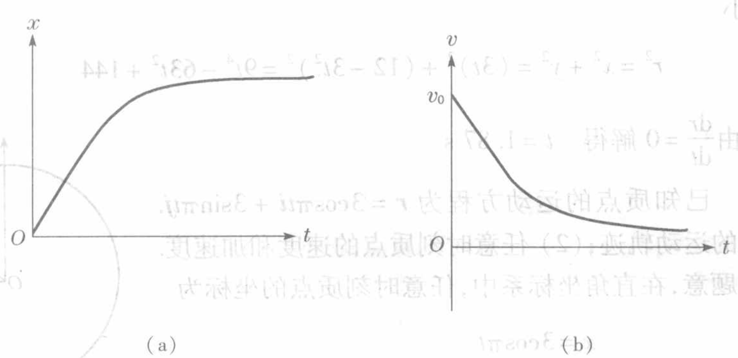


图 1-3

可见速度 $v$ 随时间呈指数衰减,当 $t\to\infty$ 时,$v\to0$.

根据 $v=\frac{dx}{dt}=v_0e^{-\alpha t}$，再积分一次，得

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-\alpha t} dt$$

物体的运动方程 $$x=-\frac{v_0}{\alpha}e^{-\alpha t}\Big|_0^t=\frac{v_0}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

**分析讨论：**(1) 虽然理论计算表明，只有当 $t\to\infty$ 时，才有 $v\to 0$，$x\to\frac{v_0}{\alpha}$. 换句话说，需要经过无限长的时间以后物体才会停止运动. 但实际上，速度 $v$ 随时间呈指数衰减是很快的，$\alpha$ 越大，衰减越快. 一般来说，经过 $t=\frac{1}{\alpha}$ 秒后，$v=e^{-\alpha\frac{1}{\alpha}}=v_0e^{-1}=0.37v_0$，速度已减少三分之二；当 $t=\frac{5}{\alpha}$，$v=v_0e^{-\alpha\frac{5}{\alpha}}=v_0e^{-5}=0.006\,7v_0$，完全可以认为物体已停止运动.

(2) 物体的加速度与速度及时间的关系：$a=-\alpha v=-\alpha v_0e^{-\alpha t}$. 所以，该物体作变减速直线运动.

**【例 1-5】** 在倾角为 $\alpha=30°$ 的斜坡顶上，有一个小孩以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 抛出一小石子. 设 $\boldsymbol{v}_0$ 与斜坡夹角 $\beta=60°$，如图 1-4(a)所示. 求小石子落地处离抛球点之间的距离 $L$. 假设小石子在运动过程中的空气阻力很小，可以忽略不计.

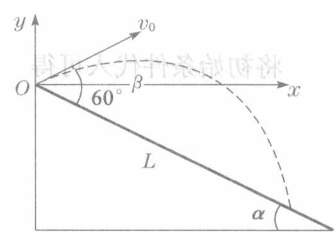

**图 1-4(a)**

**解：法一** 根据中学物理知识，抛体的运动可以认为是在水平方向的匀速直线运动与竖直方向的自由落体运动的叠加. 取图示直角坐标系，在忽略空气阻力的情况下，小石子飞行过程中的加速度始终是恒定的

$$\begin{cases} a_x=0 \\ a_y=-g \end{cases}$$

初始条件为：$t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，$v_x=v_0\cos30°$，$v_y=v_0\sin30°$

运用积分法，代入初始条件，可以解得

$$\begin{cases} v_x=v_0\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}v_0 \\ v_y=v_0\sin30°-gt=\frac{1}{2}v_0-gt \end{cases}$$

再积分一次，并代入初始条件

$$\begin{cases} x=x_0+v_0\cos30°t=\frac{\sqrt{3}}{2}v_0t \\ y=y_0+v_0\sin30°t-\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

落地时有 $\begin{cases} x=L\cos30° \\ y=-L\sin30° \end{cases}$，小石子落地处离抛球点之间的距离 $L=\frac{2v_0^2}{g}$.

**法二**　如果选用的坐标系的 $Ox'$ 与斜坡平行，组成 $x'Oy'$ 坐标系，原点也取在斜坡的顶点，如图 1-4(b) 所示. 则在 $Ox'$ 和 $Oy'$ 方向上小石子的加速度都不为零.

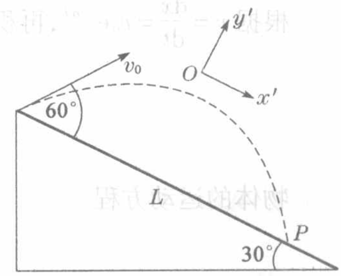

图 1-4(b)

$$\begin{cases} a_x = g\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}g \\ a_y = -g\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}g \end{cases}$$

初始条件为 $t=0$ 时，$x'_0=0$，$y'_0=0$，

$$v'_{x0} = v_0\cos 60^\circ = \frac{1}{2}v_0,\quad v'_{y0} = v_0\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0$$

运用积分法，解得

$$\begin{cases} v'_x = v'_{x0} + a'_x t \\ v'_y = v'_{y0} + a'_y t \end{cases}\qquad \begin{cases} x' = x'_0 + v'_{x0}t + \dfrac{1}{2}a'_x t^2 \\ y' = y'_0 + v'_{y0}t + \dfrac{1}{2}a'_y t^2 \end{cases}$$

将初始条件代入可得

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}v_0 t + \dfrac{1}{4}gt^2 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0 t - \dfrac{\sqrt{3}}{4}gt^2 \end{cases}$$

落地点的坐标　　$x'_P = L,\quad y'_P = 0$

于是小石子落地处离抛球点之间的距离 $L = \dfrac{2v_0^2}{g}$.

根据以上的分析可知，坐标系的选择并不会改变质点的运动情况. 在求解力学问题时，选择恰当的坐标系，可以简化运算，便于求解.

**法三**　在抛体运动中，加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}$，为一恒矢量（它的大小为恒定值，方向始终向下）. 利用矢量积分，我们立即可以得到

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

这样，也可以认为小石子是在初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 方向作匀速直线运动，与在竖直方向（重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 的方向）作匀加速直线运动的矢量叠加.

由图 1-4(c) 看出，

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BP} = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

$$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BP}|$$